

Wykład 9

Gaz Fermiego elektronów swobodnych

Wiele właściwości fizycznych metali i półprzewodników można wyjaśnić na podstawie prostego modelu gazu swobodnych elektronów, wprowadzonego w roku 1933 przez Sommerfelda i Bethego. W modelu tym elektrony walencyjne atomów metalu lub półprzewodnika przemieszczają się w obszarze próbki w sposób mniej lub więcej swobodny.

Najpierw przypomnijmy jak mechanika kwantowa opisuje ruch elektronu swobodnego. Stacjonarne równanie Schrödingera dla elektronu swobodnego ma postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E\psi \quad (9.1)$$

Rozwiązanie równania (9.1) będziemy szukali w postaci

$$\psi(\vec{r}) = A \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \equiv A \cdot \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] \quad (9.2)$$

Po podstawieniu (9.2) do (9.1) znajdujemy

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \psi \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi = E\psi \quad (9.3)$$

Skąd dla poziomów energetycznych elektronu otrzymujemy

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (9.4)$$

Ze wzoru (9.4) widzimy, że widmo energetyczne elektronu swobodnego jest widmem ciągłym. Łatwo sprawdzić, że funkcje falowe (9.2) są własnymi funkcjami operatora pędu elektronu ($\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$). Istotnie

$$\hat{p}(e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = -i\hbar\vec{\nabla}(e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = \hbar\vec{k} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (9.5)$$

A zatem dla swobodnego elektronu w stanie stacjonarnym E_k pęd elektronu jest dobrze określony i jest równy $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Ze wzoru (9.4) wynika, że powierzchnie stałej energii elektronu swobodnego ($E_k = \text{const}$) są kulami w przestrzeni wektorów falowych \vec{k} . Wiemy, że w kryształach

dozwolone wektory falowe \vec{k} leżą w przedziale pierwszej strefy Brillouina i dla skończonego kryształu, zawierającego N komórek elementarnych, gęstość rozmieszczenia wektorów \vec{k} w pierwszej strefie Brillouina wynosi $V/(2\pi)^3$, gdzie V - objętość kryształu. Elektrony posiadają spin $1/2$, a zatem są cząstkami, które nazywamy *fermionami*. Dla wszystkich fermionów obowiązuje zakaz Pauliego. A to oznacza, że w stanie określonym wektorem falowym \vec{k} mogą znajdować się tylko dwa elektrony o przeciwnie skierowanych spinach. Zakaz Pauliego powoduje, że w stanie podstawowym (tj., gdy $T = 0$) gazu elektronów swobodnych elektrony obsadzają kolejno poziomy energetyczne, zaczynając od poziomu z $\vec{k} = 0$ do jakiegoś górnego poziomu. Ta górna granica, która przy $T = 0$ oddziela stany obsadzone od stanów nie obsadzonych nazywa się *energiją Fermiego* (E_F^0) dla zerowej temperatury. Energii Fermiego, zgodnie z (9.4) odpowiada maksymalny wektor falowy \vec{k}_F , który nosi nazwę *wektora falowego Fermiego*. Długość wektora falowego \vec{k}_F łatwo obliczyć z równania

$$\left(\frac{4\pi}{3}k_F^3\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{V}{8\pi^3}\right) = n \cdot V . \quad (9.6)$$

Tu n - koncentracja elektronów swobodnych w próbce.

Ze wzory (9.6) otrzymujemy następujący wzór na wartość k_F , która nosi nazwę *promienia kuli Fermiego*

$$k_F = (3\pi^2 \cdot n)^{1/3} . \quad (9.7)$$

Po podstawieniu (9.7) do (9.4) otrzymujemy dla energii Fermiego następujący wzór

$$E_F^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \cdot n)^{2/3} . \quad (9.8)$$

Energia Fermiego dla metali jest rzędu kilku eV i w normalnych temperaturach jest znacznie większa niż kT . Aby jeszcze bardziej to uwidocznić, wprowadzają pojęcie *temperatury Fermiego*: $T_F = E_F^0 / k$. Dla większości metali $T_F \approx 10^4 K$.

Statystyka Fermiego – Diraca

Znajdziemy funkcję rozkładu $f(E, T)$ gazu Fermiego, określającą prawdopodobieństwo obsadzenia przez elektron przy temperaturze T poziom energetyczny

E . W celu otrzymania rozkładu $f(E, T)$ przypomnimy kilku podstawowych pojęć z fizyki statystycznej.

Stan równowagowy układu fizycznego, znajdującego się tylko w kontakcie cieplnym z otoczeniem (łaźnią cieplną albo termostatem) i nie mogący wymieniać się z otoczeniem cząstkami jest opisywany rozkładem nazywanym *rozkładem kanonicznym*. Dla rozkładu kanonicznego prawdopodobieństwo tego, że energia układu wynosi E_n jest określone wzorem

$$P(E_n) = \frac{1}{Z} e^{-E_n / kT} . \quad (9.9)$$

Tu $Z = \sum_n \exp(-E_n / kT)$ nosi nazwę *sumy statystycznej*.

Stan równowagowy układu fizycznego, znajdującego się nie tylko w kontakcie cieplnym z otoczeniem, ale mogący wymieniać się z otoczeniem cząstkami jest opisywany rozkładem nazywanym *rozkładem wielkim kanonicznym*. Niech liczba niezależnych cząstek w stanie o energii ε_i wynosi n_i . Wtedy całkowita liczba cząstek w układzie jest równa

$$N = \sum_i n_i , \quad (9.10)$$

a całkowita energia układu wynosi

$$E(N) = \sum_i \varepsilon_i n_i . \quad (9.11)$$

Dla rozkładu wielkiego kanonicznego prawdopodobieństwo tego, że układ zawierający N nierozróżnialnych cząstek ma energię $E(N)$ jest określone wzorem

$$P(E(N)) = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta \cdot [E(N) - \mu N]} \equiv \frac{1}{\Xi} \cdot \exp\left(-\beta \sum_i n_i (\varepsilon_i - \mu)\right) . \quad (9.12)$$

Tu $\beta = 1/kT$ a

$$\Xi = \sum_{n_0} \cdots \sum_{n_s} \exp\left[-\beta \sum_i n_i (\varepsilon_i - \mu)\right] \quad (9.13)$$

nazywa się *wielką sumą statystyczną*. We wzorach (9.12) i (9.13) μ jest *potencjałem chemicznym cząstek*. Sens fizyczny tego potencjału omówimy później.

Ze wzoru (9.13) wynika, że średnią energię $\langle E \rangle$ układu oraz średnią liczbę cząstek $\langle N \rangle$ możemy obliczyć przez wielką sumę statystyczną jako

$$\langle N \rangle = \sum_N N \cdot P(E(N)) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln \Xi) , \quad (9.14)$$

$$\langle E \rangle = \sum_N E(N) \cdot P(E(N)) = - \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln \Xi) + \mu \langle N \rangle . \quad (9.15)$$

Zauważmy, że wielką sumę statystyczną (9.13) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{n_0} \cdots \sum_{n_\infty} \exp \left[- \beta \sum_i n_i (\varepsilon_i - \mu) \right] \\ &= \sum_{n_0} \exp[-\beta n_0 (\varepsilon_0 - \mu)] \cdots \sum_{n_\infty} \exp[-\beta n_\infty (\varepsilon_\infty - \mu)] = \\ &= \prod_{i=0}^{\infty} \sum_{n_i} \exp[-\beta n_i (\varepsilon_i - \mu)] . \end{aligned} \quad (9.16)$$

Ze wzoru (9.16) wynika, że wielka suma statystyczna Ξ jest iloczynem wielkich sum statystycznych ξ_i obliczanych dla każdego i -go stanu oddzielnie

$$\Xi = \prod_i \xi_i ,$$

gdzie

$$\xi_i = \sum_{n_i} \exp[-\beta (\varepsilon_i - \mu) \cdot n_i] . \quad (9.17)$$

Dla bozonów (cząstek o całkowitym spinie) liczba cząstek n_i w danym stanie kwantowym może przyjmować dowolne wartości, czyli $n_i = 0, 1, 2, 3, \dots$ i ze wzoru (9.17) natychmiast otrzymujemy

$$\xi_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp[-\beta (\varepsilon_i - \mu) \cdot n_i] = \frac{1}{1 - \exp[-\beta (\varepsilon_i - \mu)]} .$$

Skąd dla średniej wartości liczby bozonów w stanie ε_i otrzymujemy wiadomy rozkład Bosego-Einsteina

$$\langle n_i \rangle \equiv f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln \xi_i) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} . \quad (9.18)$$

W przypadku fermionów (cząstek o połówkowym spinie), dla których spełniony jest zakaz Paulego, w danym stanie kwantowym może znajdować się nie więcej niż jedna cząstka, czyli $n_i = 0,1$. Wobec tego dla fermionów

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sum_{n_i=0,1} \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu) \cdot n_i] \\ &= 1 + \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)] . \end{aligned} \quad (9.19)$$

Skąd dla średniej wartości liczby fermionów w stanie ε_i otrzymujemy

$$\langle n_i \rangle \equiv f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln \xi_i) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}} . \quad (9.20)$$

Rozkład (9.20) nazywa się *rozkładem Fermiego – Diraca*.

Sens potencjału chemicznego μ w przypadku gazu elektronów swobodnych jest najlepiej widoczny w granicznym przypadku $T = 0$. Wtedy, jak widzieliśmy wcześniej, prawdopodobieństwo obsadzenia stanów jest przy $T = 0$ funkcją schodkową (rys.9.1): $f(\varepsilon_i) = 1$ dla $\varepsilon_i \leq E_F^0$ i $f(\varepsilon_i) = 0$ dla $\varepsilon_i > E_F^0$. Ze wzoru (9.20) wynika, że ten rozkład ma taką samą właściwość przy $T = 0$, jeżeli

$$\mu = E_F^0 . \quad (9.21)$$

Ze względu na tę równość często w rozkładzie Fermiego – Diraca piszą energię Fermiego zamiast potencjału chemicznego

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_i - E_F)}} . \quad (9.22)$$

Należy zwrócić uwagę, że równość (9.21) jest słuszna tylko przy $T = 0$, a zatem stosując w rozkładzie (9.22) zamiast μ „poziom Fermiego” musimy pamiętać, że taki poziom Fermiego jest wtedy wielkością zależną od temperatury.

W wyższych temperaturach rozkład Fermiego – Diraca staje się rozmyty w okolicy energii Fermiego. Szerokość obszaru, na którym odchylenie rozkładu Fermiego – Diraca od funkcji schodkowej jest znaczące, jest rzędu $2kT$ (rys.9.1). Z tego wynika, że w miarę podnoszenia temperatury próbki tylko niewielka liczba elektronów jest wzbudzona.

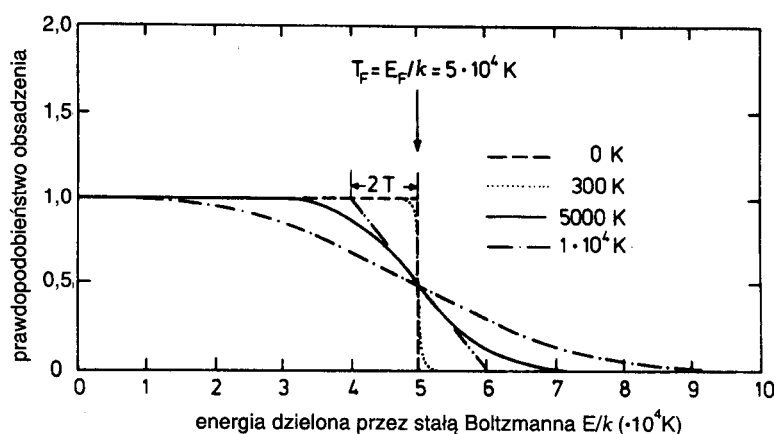
Odstępstwo w zachowaniu się gazu fermionów od klasycznego gazu cząstek Maxwella-Boltzmana nosi nazwę *degeneracji gazu*. Parametrem degeneracji gazu η jest wielkość

$$\eta = \frac{\mu}{kT}, \quad (9.23)$$

gdzie μ jest potencjałem chemicznym cząstek.

Jeżeli $\eta \ll 1$, czyli $\mu \ll kT$, to łatwo wykazać, że rozkład Fermiego - Diraca przechodzi w klasyczną funkcję rozkładu Maxwella - Boltzmana

$$P(E) = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{kT}\right). \quad (9.24)$$



Rys.9.1. Funkcja rozkładu Fermiego – Diraca w różnych temperaturach

Jeżeli $\eta \gg 1$, czyli $\mu \gg kT$, to gaz cząstek Fermiego nie podlega statystyce klasycznej Maxwella-Boltzmana. Dla metali w całym dostępnym przedziale temperatur poniżej temperatury topnienia parametr $\eta \gg 1$, a zatem gaz elektronowy metali jest gazem silnie zdegenerowanym. Fakt ten, jak zobaczymy później, ma istotne konsekwencje, np. dla własności cieplne metali.

Funkcja gęstości stanów elektronów swobodnych

Jednej wartości energii elektronowej, $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, odpowiada prawie nieskończona

liczba stanów elektronowych dla których $|\vec{k}| = const$, a kierunek wektora \vec{k} w przestrzeni

wektorów falowych jest dowolny. Zdefiniujemy funkcję gęstości stanów elektronowych $g(E)$, taką że $g(E)dE$ równa się liczbie stanów elektronowych o energiach leżących w przedziale $(E, E + dE)$. W celu wyznaczenia funkcji $g(E)$ $g(E)$ podzielimy kulę Fermiego na warstwy sferyczne o grubości dk . Objętość takiej warstwy wynosi $d\Omega = d(4\pi k^3/3) = 4\pi k^2 dk$. Ponieważ na jeden wektor falowy w przestrzeni odwrotnej przypada objętość $(8\pi^3/V)$, gdzie V - objętość kryształu), dzieląc $d\Omega$ przez $8\pi^3/V$ otrzymujemy liczbę wektorów falowych, znajdujących się w warstwie o promieniu k i grubości dk :

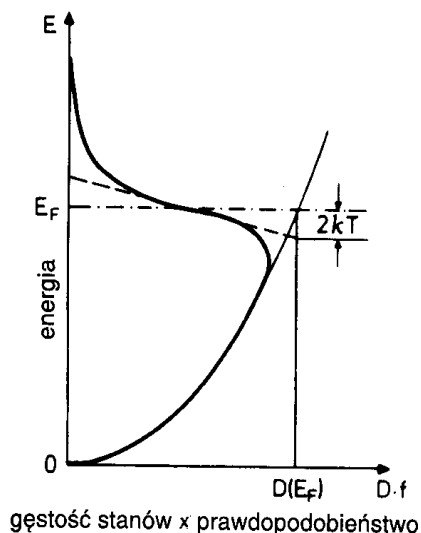
$$dn = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk . \quad (9.25)$$

Biorąc pod uwagę wzór $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ znajdujemy

$$k^2 dk = \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \cdot dE . \quad (9.26)$$

Po podstawieniu (9.26) do wzoru (9.25) otrzymujemy

$$dn = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \cdot dE . \quad (9.27)$$



Rys.9.2. Funkcja rozkładu $D(E)$

Ponieważ jednemu wektorowi falowemu, zgodnie z zakazem Paulego, odpowiadają dwa stany, liczba stanów elektronowych będzie w dwa razy większa, czyli $2 \cdot dn$. Wobec tego dla funkcji gęstości stanów elektronowych mamy (rys.9.2)

$$\begin{aligned} g(E)dE &= 2 \cdot dn = \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \cdot dE \end{aligned} \quad (9.28)$$

Otrzymaliśmy, więc wzór na funkcję $g(E)$, która określa jak są rozłożone wzdłuż osi energii stany, które mogą być obsadzone przez elektrony. Obsadzenie tych stanów określa rozkład Fermiego – Diraca, a zatem gęstość stanów obsadzonych przez elektrony określa funkcja

$$G(E)dE = g(E)f(E)dE , \quad (9.29)$$

gdzie funkcja $f(E)$ opisuje rozkład Fermiego - Diraca

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E-E_F)}} \quad (9.30)$$

Ciepło właściwe gazu elektronów

W początkowym stadium rozwoju teorii metali jednym z najtrudniejszym problemem było wytłumaczenie ciepła właściwego metali. Zgodnie z zasadą ekwipartycji energii dowolna punktowa cząstka powinna dawać wkład w ciepło właściwe próbki równy $3k/2$. A zatem dla typowej koncentracji elektronów $n = 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ należałoby oczekiwać wkładu od elektronów przewodnictwa rzędu $3kn/2$. Doświadczalnie stwierdzono jednak, że wkład elektronowy jest rzędu 1% od oczekiwanej wielkości $3kn/2$.

Dla obliczenia ciepła właściwego gazu elektronowego znajdziemy średnią energię elektronów

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E g(E) f(E) dE = A \int_0^{\infty} E^{3/2} f(E) dE \quad (9.31)$$

Tu

$$A = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (9.32)$$

Całkując (9.31) przez części, otrzymujemy

$$\langle E \rangle = A \int_0^{\infty} E^{3/2} f(E) dE = A \cdot \left[\frac{2}{5} E^{5/2} \cdot f(E) \Big|_0^{\infty} - \frac{2}{5} \int_0^{\infty} E^{5/2} \frac{\partial f}{\partial E} dE \right] \quad (9.33)$$

Pierwszy wyraz w (9.33) jest równy zero. W dalszym ciągu dokonamy podstawienia

$$\xi = (E - E_F) / kT \quad (9.34)$$

Skąd

$$E = E_F + kT \cdot \xi, \quad dE = kT \cdot d\xi \quad (9.35)$$

Pochodna $\partial f / \partial E$ wyrażona przez nową zmienną ma postać

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{1}{kT} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{e^{\xi} + 1} \right) = - \frac{1}{kT} \frac{e^{\xi}}{(e^{\xi} + 1)^2} = - \frac{1}{kT} \frac{1}{(1 + e^{\xi})(1 + e^{-\xi})} \quad (9.36)$$

Uwzględniając (9.34) – (9.36) znajdujemy ze wzoru (9.33)

$$\langle E \rangle = \frac{2}{5} A \int_{-E_F/kT}^{\infty} (E_F + kT \cdot \xi)^{5/2} \frac{1}{(1 + e^\xi)(1 + e^{-\xi})} d\xi . \quad (9.37)$$

Dla metali, jak już mówiliśmy, w temperaturze pokojowej ($T = 300K$, $kT \cong 10^{-2} eV$) energia Fermiego E_F jest prawie w 1000 razy większa niż kT . Oznacza to, że przy zwykłych temperaturach wzbudzona jest tylko niewielka liczba elektronów w pobliżu poziomu Fermiego i gaz elektronów w metali znajduje się w *stanie zwyrodniałym*.

Przy $T \ll T_F = E_F / k$ możemy zapisać

$$(E_F + kT \cdot \xi)^{5/2} \approx E_F^{5/2} \left[1 + \frac{5}{2} \left(\frac{kT}{E_F} \cdot \xi \right) + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2!} \left(\frac{kT}{E_F} \cdot \xi \right)^2 + \dots \right] . \quad (9.38)$$

Biorąc pod uwagę (9.38) ze wzoru (9.37) otrzymujemy

$$\langle E \rangle = E_0 + E_1 + E_2 , \quad (9.39)$$

gdzie

$$E_0 = \frac{2}{5} A \cdot E_F^{5/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1 + e^\xi)(1 + e^{-\xi})} = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{10m} V \cdot (n)^{5/3} , \quad (9.40)$$

$$E_1 = A \cdot E_F^{3/2} \cdot kT \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi d\xi}{(1 + e^\xi)(1 + e^{-\xi})} = 0 , \quad (9.41)$$

$$E_2 = \frac{3}{4} A \cdot E_F^{1/2} (kT)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + e^\xi)(1 + e^{-\xi})} = \frac{3^{1/2} \pi^{2/3} m^{2/3}}{4\hbar^2} V \cdot (n)^{1/3} \cdot (kT)^2 . \quad (9.42)$$

We wzorach (9.40) – (9.42) zamieniliśmy dolny przedział całkowania na $(-\infty)$, ponieważ ($E_F / kT \gg 1$).

Ze wzoru (9.39) wynika, że w temperaturze bezwzględnego zera $T = 0$ gaz elektronowy posiada energię

$$\langle E \rangle = E_0 = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{10m} V \cdot (n)^{5/3} . \quad (9.43)$$

Fakt ten jest zupełnie niezrozumiały z klasycznego punktu widzenia.

Korzystając ze wzoru (9.39) łatwo znaleźć wzór na ciepło właściwe gazu elektronowego

$$C_{el} = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \gamma \cdot T, \quad (9.44)$$

gdzie współczynnik γ jest określony wzorem

$$\gamma = \frac{3^{1/2} \pi^{2/3} m}{2\hbar^2} V \cdot (n)^{1/3} \cdot k^2. \quad (9.45)$$

Przewidywana liniowa zależność ciepła właściwego elektronów od temperatury została potwierdzona eksperymentalnie.

Zadania do Wykładu 9

9.1. Udowodnić wzór (9.18).

9.2. Wykazać, że pochodna funkcji (9.20) jest funkcją symetryczną względem parametru $x = (\varepsilon_i - \mu) / kT$ i przy $T \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = \delta(\eta),$$

gdzie $\delta(\eta)$ jest delta - funkcja Diraca.

9.3. Zakładając, że dla większości metali $T_F \approx 10^4 K$ obliczyć parametr degeneracji gazu elektronowego w temperaturze pokojowej.

9.4. Wykazać, że $\eta \ll 1$ rozkład Fermiego - Diraca oraz rozkład Bosego - Einsteina przechodzą w klasyczny rozkład Maxwella - Boltzmanna.

9.5. Udowodnić, że funkcja gęstości stanów elektronów swobodnych w przypadku jednowymiarowym ma postać

$$g(E) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{E}}.$$

9.6. Wykazać, że funkcja gęstości stanów elektronów swobodnych w przypadku dwuwymiarowym jest równa

$$g(E) = \frac{1}{\pi} \frac{m}{\hbar^2}.$$

9.7. Udowodnić, że energia kinetyczna gazu trójwymiarowego N elektronów, w temperaturze 0 K, wynosi

$$E_{kin} = \frac{3}{5} N \cdot E_F.$$

9.8. Wykazać, że wzór na molowe ciepło właściwe jednowymiarowego gazu Fermiego wynosi

$$C_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{\pi^2}{12E_F} k^2 T = \frac{\pi^2 k}{12} \cdot \frac{T}{T_F}.$$

9.9. Wyprowadzić wzór na molowe ciepło właściwe dwuwymiarowego gazu elektronowego.

Odpowiedź:

$$C_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{\pi^2}{3E_F} k^2 T = \frac{\pi^2 k}{3} \cdot \frac{T}{T_F}.$$

9.10. Wykazać, że w rozkładzie Fermiego - Diraca przy $\mu \gg kT$ potencjał chemiczny pokrywa się z energią Fermiego

$$\mu \equiv E_F^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \cdot n)^{2/3}.$$

9.11. Wykazać, że potencjał chemiczny μ silnie zwyrodniałego gazu elektronowego w pierwszym przybliżeniu względem temperatury określa wzór

$$\mu = \frac{E_F^0}{2} \pm \frac{E_F^0}{2} \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{E_F^0} \right)^2} \approx \frac{E_F^0}{2} \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{E_F^0} \right)^2 \right] \right\} = E_F^0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right],$$

gdzie $T_F = E_F^0 / k$ - temperatura Fermiego.