

Wykład 10

Przewodnictwo elektryczne metali. Równanie Boltzmann

Przewodnictwo elektryczne metali jest związane z ruchem elektronów swobodnych. Pod wpływem pola elektrycznego zachodzi swoiste przegrupowanie elektronów, wskutek czego rozkład Fermiego, który jest niezależny od współrzędnych elektronu, modyfikuje się i przechodzi w rozkład zależny od współrzędnych przestrzennych. Aby wyznaczyć ten nowy rozkład $f(\vec{r}, \vec{k})$ rozważmy zmianę funkcji f w czasie od t do $t + \Delta t$. Załóżmy, że w dowolnej chwili t elektron znajdował się w miejscu określonym wektorem wodzącym \vec{r} i posiadał pęd $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Wtedy w polu elektrycznym \vec{E} w nieobecności zderzeń ten elektron w czasie $t + \Delta t$ będzie miał współrzędne: $(\vec{r} + \vec{v}(\vec{k})\Delta t)$, $\hbar \vec{k} + (-e\vec{E}) \cdot \Delta t$. Jeżeli czas Δt jest mały i zmiany funkcji $f(\vec{r}, \vec{k})$ są również małe, możemy zapisać zmiany tej funkcji w postaci szeregu Taylora

$$f[\vec{r} + \vec{v}(\vec{k})\Delta t; \vec{k} - (e\vec{E}/\hbar)\Delta t] = f(\vec{r}, \vec{k}, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z\right)\Delta t - \frac{e}{\hbar}(E_x \frac{\partial f}{\partial k_x} + E_y \frac{\partial f}{\partial k_y} + E_z \frac{\partial f}{\partial k_z})\Delta t + O(\Delta t^2). \quad (10.1)$$

Z równania (10.1) łatwo znaleźć równanie ruchu dla funkcji rozkładu $f(\vec{r}, \vec{k})$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f[\vec{r} + \vec{v}(\vec{k})\Delta t; \vec{k} - (e\vec{E}/\hbar)\Delta t] - f(\vec{r}, \vec{k})}{\Delta t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z\right) - \frac{e}{\hbar}(E_x \frac{\partial f}{\partial k_x} + E_y \frac{\partial f}{\partial k_y} + E_z \frac{\partial f}{\partial k_z}). \quad (10.2)$$

Otrzymane równanie musimy uzupełnić dodatkowym członem, ponieważ elektrony mogą być rozpraszane na drganiach (fononach) i defektach sieci krystalicznej. Ten człon wybierzemy w sposób fenomenologiczny w tak zwanym *przybliżeniu czasu relaksacji*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_r = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (10.3)$$

Tu f_0 - funkcja rozkładu równowagowego, czyli rozkładu Fermiego. W ogólnym przypadku czas relaksacji τ zależy od \vec{r} i \vec{k} .

Z uwzględnieniem (10.3) ze wzoru (10.2) otrzymujemy jedno z fundamentalnych równań w fizyce – *równanie Boltzmann*

$$\frac{df}{dt} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z \right) + \frac{e}{\hbar} (E_x \frac{\partial f}{\partial k_x} + E_y \frac{\partial f}{\partial k_y} + E_z \frac{\partial f}{\partial k_z}) = \frac{f_0 - f}{\tau} . \quad (10.4)$$

Równanie Boltzmann stanowi punkt wyjścia do rozważań różnych zagadnień transportu w ciele stałym. Równanie Boltzmann umożliwia przybliżone obliczenie stacjonarnego rozkładu nierównowagowego. Na przykład, jeżeli funkcja rozkładu $f(\vec{r}, \vec{k})$ nie zależy od \vec{r} (ośrodek jednorodny), ze wzory (10.4) przy $(df/dt) = 0$ mamy

$$\frac{e}{\hbar} (E_x \frac{\partial f}{\partial k_x} + E_y \frac{\partial f}{\partial k_y} + E_z \frac{\partial f}{\partial k_z}) = \frac{f_0 - f}{\tau} . \quad (10.5)$$

Skąd

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) - \frac{e}{\hbar} \tau (\vec{k}) (E_x \frac{\partial f}{\partial k_x} + E_y \frac{\partial f}{\partial k_y} + E_z \frac{\partial f}{\partial k_z}) . \quad (10.6)$$

Oznaczając

$$\Delta k_x \equiv \frac{e}{\hbar} \tau (\vec{k}) E_x , \quad \Delta k_y \equiv \frac{e}{\hbar} \tau (\vec{k}) E_y , \quad \Delta k_z \equiv \frac{e}{\hbar} \tau (\vec{k}) E_z ,$$

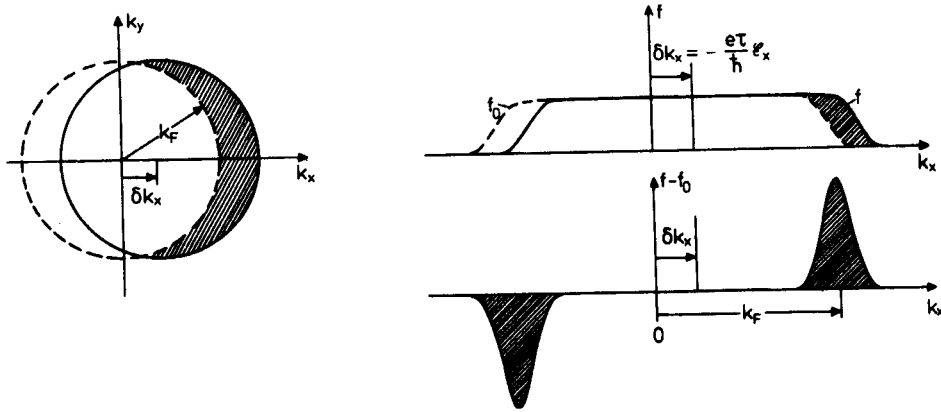
wzór (10.6) możemy zapisać w postaci

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) - \left(\frac{\partial f}{\partial k_x} \Delta k_x + \frac{\partial f}{\partial k_y} \Delta k_y + \frac{\partial f}{\partial k_z} \Delta k_z \right) . \quad (10.7)$$

Dla małych odchyłeń od stanu równowagi termicznej, czyli dla małych pól elektrycznych, wzór (10.7) możemy zapisać w postaci

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) - \left(\frac{\partial f_0}{\partial k_x} \Delta k_x + \frac{\partial f_0}{\partial k_y} \Delta k_y + \frac{\partial f_0}{\partial k_z} \Delta k_z \right) \cong f_0(\vec{k} - \Delta \vec{k}) . \quad (10.8)$$

Ze wzoru (10.8) wynika, że wpływ słabego stałego pola elektrycznego na rozkład elektronów sprowadza się do przesunięcia kuli Fermiego rozkładu równowagowego o wielkość $\Delta \vec{k} = (e\tau \vec{E} / \hbar)$ (rys.10.1). Nowy rozkład Fermiego f różni się w sposób istotny od rozkładu równowagowego f_0 tylko w pobliżu energii (promienia) Fermiego.



Rys.10.1. Wpływ pola stałego elektrycznego na rozkład elektronów

Korzystając z równania Boltzmann'a rozważmy przewodnictwo elektryczne gazu elektronów. Gęstość prądu elektrycznego, jak wiadomo z podstaw fizyki, jest określona wzorem

$$\vec{j} = \frac{1}{V} \sum_i e \vec{v}_i . \quad (10.9)$$

Sumowanie w (10.9) przebiega po wszystkich elektronach. Sumowanie po elektronach można zastąpić przez całkowanie po energii, używając do tego celu funkcję rozkładu $G(E) = f(E)g(E)$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{e}{V} \int_0^\infty \vec{v}(E) f(E) g(E) dE . \quad (10.10)$$

Przypuśćmy, że pole elektryczne jest skierowane wzdłuż osi Ox . Wtedy, w przypadku ośrodka izotropowego $j_y = j_z = 0$ i korzystając z przybliżenia (10.8) otrzymujemy dla x -składowej gęstości prądu

$$j_x = \frac{e}{V} \int_0^\infty v_x(E) \cdot g(E) \cdot [f_0(E) - \frac{e}{\hbar} \tau(\vec{k}) E_x \frac{\partial f_0}{\partial k_x}] dE . \quad (10.11)$$

Łatwo udowodnić, że całka z $v_x(E) f_0(E) g(E)$ w (10.11) znika, a zatem

$$j_x = - \frac{e^2 E_x}{V \hbar} \int v_x \cdot g(E) \cdot \tau(\vec{k}) \frac{\partial f_0}{\partial k_x} dE . \quad (10.12)$$

Funkcja Fermiego $f_0(E)$ zmienia gwałtownie swoją wartość przy $E \approx E_F$, czyli przy $\vec{k} \approx \vec{k}_F$, gdzie \vec{k}_F - wektor falowy Fermiego. Zatem w dobrym przybliżeniu możemy zapisać

$$\frac{\partial f_0}{\partial k_x} = \frac{\partial f_0}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial k_x} = \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar v_x \rightarrow -\hbar v_x \cdot \delta(E - E_F), \quad (10.13)$$

gdzie $\delta(x)$ jest delta funkcja Diraca. Tu skorzystaliśmy z równości $\partial E / \partial k_x = \hbar^2 k_x / m = \hbar v_x$ oraz $\partial f_0 / \partial E = -\delta(E - E_F)$.

Po podstawieniu (10.13) do wzoru (10.12) znajdujemy

$$j_x = \frac{e^2 E_x}{V} \int v_x^2 \cdot \tau(\vec{k}) \cdot g(E) \cdot \delta(E - E_F) dE. \quad (10.14)$$

Wykorzystując właściwości δ - funkcji Diraca otrzymujemy

$$j_x = \sigma E_x, \quad (10.15)$$

gdzie przewodnictwo elektryczne σ wzdłuż osi $0x$ wynosi

$$\sigma \equiv \frac{e^2}{V} v_x^2(E_F) g(E_F) \tau_F. \quad (10.16)$$

Tu τ_F - czas relaksacji na powierzchni Fermiego.

Ponieważ

$$g(E_F) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E_F}, \quad (10.17)$$

zakładając, że

$$v_x^2(E_F) = \frac{1}{3} v^2(E_F) = \frac{1}{3} \left(\frac{2E_F}{m} \right), \quad (10.18)$$

ze wzoru (10.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \frac{e^2}{V} v_x^2(E_F) g(E_F) \tau_F = \frac{e^2}{V} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2E_F}{m} \right) \cdot \frac{V}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{1/2} \tau_F = \\ &= \frac{e^2}{3\pi^2 m} \left(\frac{2mE_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} \tau_F. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Uwzględniając, że

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \cdot n)^{2/3} \rightarrow 3\pi^2 \cdot n = \left(\frac{2mE_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} .$$

przekształćmy wzór (10.19) do postaci

$$\sigma \cong \frac{e^2}{3\pi^2 m} \left(\frac{2mE_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} \tau_F = \frac{e^2 \tau_F}{m} n . \quad (10.20)$$

Wzór (10.20) nie zawiera stałej Plancka, a zatem może być wyprowadzony na podstawie fizyki klasycznej. Udowodnił to po raz pierwszy Drude około roku 1900, na długo za nim powstała mechanika kwantowa.

Wielkość

$$\mu = \frac{e\tau_F}{m} \quad (10.21)$$

nosi nazwę *ruchliwości elektronów*.

Z uwzględnieniem (10.21) wzór (10.20) przyjmuje postać

$$\sigma = e\mu n . \quad (10.22)$$

Ze wzorów (10.22) i (10.21) wynika, że zależność temperaturową oporu metali określa temperaturowa zależność czasu relaksacji τ_F . Czas relaksacji τ_F określa prawdopodobieństwo rozproszenia elektronu, które jest odwrotnie proporcjonalne do τ_F . Rozproszenie elektronów w ciele stałym zachodzi na drganiach i defektach sieci krystalicznej. Jeżeli założymy, że oba mechanizmy rozproszenia są od siebie niezależny, to całkowite prawdopodobieństwo rozproszenia jest sumą prawdopodobieństw rozproszenia elektronu na defektach i fononach

$$\frac{1}{\tau_F} = \frac{1}{\tau_{def}} + \frac{1}{\tau_{fon}} . \quad (10.23)$$

Czas relaksacji τ_F można z grubsza określić jako średni czas swobodnego przelotu, czyli bez rozpraszania, elektronu. Można przypuszczać, że czasy τ_{def} i τ_{fon} są odwrotnie proporcjonalne do iloczynów odpowiednich przekroju czynnego na rozpraszanie Ω i średniej prędkości elektronu v :

$$\tau \propto \frac{1}{v \cdot \Omega} . \quad (10.24)$$

W przypadku metali wkład w przewodnictwo pochodzi od elektronów znajdujących się na poziomie Fermiego, a zatem v jest po prostu prędkością elektronu na poziomie Fermiego $v(E_F)$ i słabo zależy od temperatury, gdyż sama energia Fermiego jest słabo zależna od temperatury. Dla defektów nie ma podstawy przypuszczać, że przekrój czynny zależy od temperatury, a zatem dla defektów

$$\frac{1}{\tau_{def}} \approx const. \quad (10.25)$$

W przypadku rozpraszania na drganiach sieci krystalicznej przekrój czynny jest proporcjonalny do średniego kwadratu amplitudy drgań $\langle u_n^2(\vec{k}) \rangle$ o wektorze falowym \vec{k} i częstości $\omega(\vec{k})$. Można wykazać, że przy $T \gg T_D$ (gdzie T_D jest tak zwana temperatura Debye'a)

$$\frac{1}{\tau_{fon}} \approx \alpha \cdot T. \quad (10.26)$$

A zatem, zgodnie z (10.20), (10.23) – (10.26), możemy dla oporu właściwego metalu zapisać

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{e^2 n \tau_F} = \rho_{def} + \rho_{fon}(T). \quad (10.27)$$

Niezależny od temperatury opór, wynikający z rozpraszania elektronów na defektach, ρ_{def} nazywa się *oporem właściwym resztkowym*. Opór właściwy, związany z rozpraszaniem elektronów na drganiach sieci $\rho_{fon}(T)$ w niskich temperaturach zmienia się jak T^5 . Dla temperatur wysokich $\rho_{fon}(T)$ jest wprost proporcjonalny do temperatury.

Przewodnictwo cieplne metali

W kinetycznej teorii gazów przewodność cieplna gazu jest określona wzorem

$$\kappa = \frac{1}{3} C_v \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle, \quad (10.28)$$

gdzie $\langle v \rangle$ - średnia prędkość cząstki gazu, a $\langle l \rangle$ - średnia droga swobodna cząstki między zderzeniami, C_v - pojemność cieplna gazu na jednostkę objętości.

Główny wkład w przewodnictwo pochodzi od elektronów znajdujących się w pobliżu powierzchni Fermiego, a zatem zakładając, że $\langle v \rangle = v_F$, a $\langle l \rangle = v_F \tau_F$, ze wzoru (10.28) otrzymujemy

$$\kappa = \frac{1}{3} C_{el} v_F^2 \cdot \tau_F . \quad (10.29)$$

Wzór na pojemność cieplną na jednostkę objętości gazu elektronowego otrzymaliśmy wcześniej

$$C_{el} = \frac{3^{1/2} \pi^{2/3} m}{2 \hbar^2} \cdot (n_e)^{1/3} \cdot k^2 \cdot T = \frac{\pi^2 n_e k^2}{m v_F^2} T . \quad (10.30)$$

Po podstawieniu (10.30) do (10.29) otrzymujemy

$$\kappa = \frac{1}{3} C_{el} v_F^2 \cdot \tau_F = \frac{\pi^2 n_e k^2 \tau_F}{3m} T . \quad (10.31)$$

Korzystając ze wzorów (10.31) oraz (10.20) znajdujemy

$$L = \frac{\kappa_{el}}{\sigma T} = \frac{\pi^2 n_e k^2 \tau_F}{3m} \cdot \frac{m}{e^2 \tau_F n_e} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2.45 \cdot 10^{-8} W \cdot \Omega / K . \quad (10.32)$$

Wzór (10.32) wyraża *prawo Wiedemanna – Franza*: stosunek przewodności cieplnej do przewodności elektrycznej jest wprost proporcjonalny do temperatury, przy czym współczynnik proporcjonalności nie zależy od rodzaju metalu. Liczba L we wzorze (10.32) nosi nazwę *liczby Lorenza*.

Dielektryki

Pole elektryczne w dowolnym ośrodku opisuje się, jak wiadomo z kursu elektrodynamiki, trzema wektorami \vec{E} , \vec{D} i \vec{P} , między którymi istnieje związek

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t) . \quad (10.33a)$$

W równaniu (10.33a) wektor \vec{P} jest *wektorem polaryzacji elektrycznej próbki*. Wektor ten równa się wypadkowemu momentowi dipolowemu objętości V podzielonemu przez V .

W przypadku izotropowych ośrodków, albo kryształów symetrii regularnej, między wektorami \vec{P} i \vec{E} istnieje związek

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(t) . \quad (10.33b)$$

Wielkość $\chi(\omega)$ nosi nazwę *podatności elektrycznej* i w ogólnym przypadku, gdy na próbkę działa zmienne pole elektryczne o częstotliwości ω podatność elektryczna jest funkcją częstotliwości ω .

Po podstawieniu (10.33b) do (10.33a) otrzymujemy

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}(t) . \quad (10.33c)$$

Wielkość

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) \quad (10.33d)$$

nosi nazwę *przenikalności elektrycznej*.

Równoważną i często bardziej użyteczną reprezentacją można otrzymać wprowadzając zamiast wektorów $\vec{E}(t)$, $\vec{D}(t)$ i $\vec{P}(t)$ wektory

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} dt , \quad (10.34a)$$

$$\vec{D}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(t) \cdot e^{i\omega t} dt , \quad (10.34b)$$

$$\vec{P}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}(t) \cdot e^{i\omega t} dt . \quad (10.34c)$$

Ze wzoru (10.33a) wynika, że między wektorami $\vec{E}(\omega)$, $\vec{D}(\omega)$ i $\vec{P}(\omega)$ istnieje podobny związek

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon_0 \vec{E}(\omega) + \vec{P}(\omega) . \quad (10.35a)$$

Natomiast ze wzoru (10.33b) natychmiast otrzymujemy

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega) . \quad (10.35b)$$

Po podstawieniu (10.35b) do wzoru (10.35a) mamy

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega) . \quad (10.35c)$$

Polaryzacja dielektryka, określona przez wektor $\vec{P}(t)$ albo wektor $\vec{P}(\omega)$, może powstać wskutek jednego z trzech podstawowych mechanizmów polaryzacji: *polaryzacji elektronowej*, *polaryzacji jonowej* i *polaryzacji orientacyjnej*.

Polaryzacja elektronowa (atomowa)

Polaryzacja elektronowa albo atomowa polega na tym, że w polu elektrycznym zachodzi przesunięcie powłok elektronowych, wskutek czego "środek ciężkości" ładunku ujemnego elektronów nie pokrywa się z położeniem jądra atomowego naładowanego dodatnio i w atomie powstaje elektryczny moment dipolowy. Polaryzowalność elektronową rozważmy zakładając, że elektron w polu elektrycznym zachowuje się jak oscylator harmoniczny

$$\ddot{\vec{u}} + \gamma \dot{\vec{u}} + \omega_0^2 \vec{u} = \frac{e}{m} \vec{E}(t) . \quad (10.36)$$

Tu \vec{u} określa wychylenie elektronu z położenia równowagi; ω_0 - częstotliwość drgań własnych oscylatora; γ - stała tłumienia, opisująca skończony czas życia drgań normalnych elektronu. We wzorze (10.36) pole \vec{E} to jest tak zwane *lokalne pole*. Pole lokalne nie pokrywa się z zewnętrznym polem elektrycznym, ponieważ zawiera dodatkowe pole pochodzące od indukowanych w ciele dipoli elektrycznych.

Wprowadźmy zamiast wychylenia $\vec{u}(t)$ wielkość $\vec{u}(\omega)$

$$\vec{u}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(t) \cdot e^{i\omega t} dt , \quad (10.37)$$

$$\vec{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega . \quad (10.38)$$

Łatwo widzieć, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{u}}(t) \cdot e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} du = -i\omega \cdot \vec{u}(\omega) , \quad (10.39)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\vec{u}}(t) \cdot e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\dot{u} = -i\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{u}}(t) \cdot e^{i\omega t} dt = -\omega^2 \cdot \vec{u}(\omega) . \quad (10.40)$$

Korzystając ze wzorów (10.37), (10.39) i (10.40), wzór (10.36) możemy zapisać w postaci

$$\vec{u}(\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma) = \frac{e}{m} \vec{E}(\omega) . \quad (10.41)$$

Ze wzoru (10.41) wynika, że

$$\vec{u}(\omega) = \frac{(e/m)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \cdot \vec{E}(\omega) . \quad (10.42)$$

Wychylenie elektronu z położenia równowagi powoduje powstanie momentu dipolowego

$$\vec{p}(t) = e \cdot \vec{u}(t) , \quad (10.43a)$$

$$\vec{p}(\omega) = e \cdot \vec{u}(\omega) . \quad (10.43b)$$

Po podstawieniu (10.42) do wzoru (10.43b) otrzymujemy

$$\vec{p}(\omega) = \alpha_{el}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega) . \quad (10.44)$$

Tu

$$\alpha_{el}(\omega) = \frac{(e^2 / m)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (10.45)$$

nosi nazwę *polaryzowalności elektronowej*.

Ze wzoru (10.45) widać, że polaryzowalność elektronowa silnie zależy od ω i osiąga maksimum gdy $\omega = \omega_0$ (rezonans). Polaryzowalność elektronową możemy podzielić na część rzeczywistą i część urojoną

$$\alpha_{el}(\omega) = \alpha'_{el}(\omega) + i\alpha''_{el}(\omega) , \quad (10.46)$$

gdzie

$$\alpha'_{el}(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} , \quad (10.47a)$$

$$\alpha''_{el}(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} . \quad (10.47b)$$

Można udowodnić, że rzeczywista część polaryzowalności $\alpha'_{el}(\omega)$ jest odpowiedzialna za dyspersję światła w ośrodku. Natomiast część urojona polaryzowalności $\alpha''_{el}(\omega)$ określa absorpcję światła w ciele.

Zadania do Wykładu 10

10.1. Przewodność elektryczna miedzi w temperaturze pokojowej wynosi $\sigma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$, koncentracja elektronów przewodnictwa $n_e = 8.5 \cdot 10^{26} m^{-3}$. Ile wynosi czas relaksacji τ_F i ruchliwość elektronów w miedzi?

10.2. Oszacować średnią prędkość ruchu elektronów na poziomie Fermiego oraz ich średnią drogę swobodną, jeżeli energia Fermiego $E_F = 7 \text{ eV}$; $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ i $n_e = 8.5 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$.

10.3. Dla złota *Au* liczba Lorentza przy $T = 100\text{C}$ jest równa $L = 2.40 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega / \text{K}^2$. Natomiast przy $T = 0^0 \text{C}$ liczba Lorentza $L = 2.35 \cdot 10^{-8} \text{ W} \Omega / \text{K}^2$. Z czym może być związane zmniejszenie liczby Lorentza?

10.4. Wykazać, że po wprowadzeniu statycznej stałej dielektrycznej $\epsilon_{st} = \epsilon_{el}(0)$ i wysokoczęstotliwościowej granicy $\epsilon_{\infty} = \epsilon_{el}(\infty)$ wzór na przenikalność dielektryczną $\epsilon_{el}(\omega)$ możemy zapisać w postaci

$$\epsilon_{el}(\omega) = \epsilon_{\infty} + (\epsilon_{st} - \epsilon_{\infty}) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} . \quad (10.48)$$

Wskazówka: Skorzystać ze wzoru (10.45) oraz wzoru $\epsilon_{el}(\omega) = 1 + \alpha_{el}(\omega)$.

10.5. Korzystając ze wzoru (10.48) wykazać, że w przypadku $\gamma\omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$ część urojona przenikalności dielektrycznej może być opisana wzorem

$$\epsilon_{el}''(\omega) = (\epsilon_{st} - \epsilon_{\infty}) \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left[\gamma\omega - \frac{(\gamma\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right] .$$

10.6. Wykazać, że zależność przenikalności dielektrycznej gazu elektronów swobodnych od częstotliwości pola elektrycznego określa wzór

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega^2} . \quad (10.49)$$

10.7. Powyżej płaszczyzny $z = 0$ znajduje się gaz swobodnych elektronów. Dla dwóch dowolnych punktów (jeden punkt - wewnątrz gazu ($z > 0$) a drugi na zewnątrz ($z < 0$)) potencjał pola elektrycznego spełnia równanie Laplace'a $\Delta\phi = 0$.

a) Udowodnić, że rozwiązanie równania Laplace'a ma postać

$$\phi(x, z) = A \cdot \cos(kx) \cdot e^{-kz} .$$

b) Wykazać, że natężenie pola elektrycznego ma składowe

$$E_x = kA \cdot \sin(kx) \cdot e^{-kz} \quad ; \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z = kA \cdot \cos(kx) \cdot e^{-kz} .$$

c) Pokazać, że dla tego żeby był spełniony warunek ciągłości składowej normalnej wektora \vec{D} na płaszczyźnie $z = 0$, musi zachodzić $\varepsilon(\theta) = -1$.