

## Wykład 8

---

### Zjawiska transportu w ciałach stałych

Wiele ważnych zjawisk w ciałach stałych, takich jak przewodnictwo cieplne albo przewodnictwo elektryczne, dyfuzja cząsteczek (atomów) itd. jest związane z ruchem elektronów, cząsteczek (jonów) w ciele stałym. Zaczniemy rozważanie tych zjawisk transportu z przewodnictwa cieplnego.

#### Ciepne właściwości kryształów. Prawo Dulonga – Petita.

##### Model Einsteina. Statystyka Bosego – Einsteina

W roku 1819 francuscy fizycy P.Dulong i A.Petita wykryli, że w temperaturach pokojowych (i wyższych) *molowe ciepło właściwe ciał stałych nie zależy od temperatury i dla wszystkich ciał jest równe*  $C_v = 3R$ . Tu  $R = N_A k$  jest stała gazowa,  $k$  - stała Boltzmannna;  $N_A$  - liczba Avogadra. Prawo Dulonga – Petita znajduje proste objaśnienie w ramach uproszczonego modelu Einsteina drgań sieci krystalicznej. Zgodnie z tym modelem energia sprężysta kryształu zawierającego  $N$  atomów składa się z energii  $3N$  normalnych drgań – fononów, o tej samej częstotliwości  $\omega$ . Energią każdego z fononów określona jest wzorem dla oscylatora harmonicznego

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (8.1)$$

Ponieważ mamy do czynienia z zespołem takich samych fononów, nie możemy jednoznacznie powiedzieć, który z fononów znajduje się w określonym stanie o energii  $E_n$ . Zamiast tego możemy tylko określić prawdopodobieństwo  $P_n$  znalezienia oscylatora w stanie  $E_n$ . W mechanice statystycznej udowodniono, że prawdopodobieństwo tego, że energia oscylatora wynosi  $E_n$  jest dane *rozkładem Boltzmannna* (znanym także jako *rozkład kanoniczny*)

$$P_n = \frac{1}{Z} e^{-E_n/kT}. \quad (8.2)$$

Tu  $T$  - temperatura kryształu, a  $Z$  jest tak zwana *suma statystyczna*:

$$Z = \sum_n e^{-E_n/kT}. \quad (8.3)$$

Suma statystyczna odgrywa ważną rolę w fizyce statystycznej, ponieważ wiele wielkości statystycznych w prosty sposób wyraża się przez sumę statystyczną. Na przykład średnia wartość energii oscylatora, określona wzorem

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad (8.4)$$

gdzie  $\beta = 1/kT$ , może być zapisana, przez sumę statystyczną, w postaci

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z. \quad (8.5)$$

Przed tym jak znaleźć średnią energią oscylatora harmonicznego, zauważmy, że ze wzoru (8.1) wynika, iż średnia energia oscylatora wynosi

$$\langle E \rangle = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \langle n \rangle\right). \quad (8.6)$$

Tu

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_n n \cdot e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad (8.7)$$

jest wartość oczekiwanej liczby kwantowej  $n$  oscylatora będącego w równowadze termicznej w temperaturze  $T$ .

Obliczmy teraz średnią energią jednego oscylatora, korzystając ze wzoru (8.3):

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} = \frac{e^{-\hbar \omega \beta / 2}}{1 - e^{-\hbar \omega \beta}}. \quad (8.8)$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru na sumę postępu geometrycznego:  $S_n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

Po podstawieniu (8.8) do (8.5) otrzymujemy

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega\beta} - 1}\right). \quad (8.9)$$

Porównując wzory (8.6) i (8.9) znajdujemy następujący wzór na wartość oczekiwanej liczby kwantowej  $\langle n \rangle$  oscylatora

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} . \quad (8.10)$$

Ze wzoru (8.10) wynika, że przy  $T \rightarrow 0$  mamy  $\langle n \rangle \rightarrow 0$ . Natomiast, przy  $kT \gg \hbar\omega$  mamy  $\langle n \rangle \rightarrow \infty$ . Rozkład (8.10) określający średnią liczbę cząstek w danym stanie, gdy nie istnieją ograniczenia na tą liczbę, nosi nazwę *rozkładu* (albo *statystyki*) *Bosego – Einsteina*. Cząstki podlegające statystyce Bosego – Einsteina nazywamy *bozonami*. Z mechaniki kwantowej wiemy, że wszystkie cząstki o całkowitym spinie są bozonami. Więc termicznie wzbudzony gaz fononów jest przykładem idealnego gazu bozonów.

Zastosujemy teraz wzór (8.10) do obliczenia ciepła właściwego gazu fononów. Rozważmy najpierw przypadek bardzo wysokich temperatur ( $kT \gg \hbar\omega$ ). W temperaturach wysokich  $e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \hbar\omega/kT$ , a zatem średnia liczba fononów jest równa:  $\langle n \rangle \approx kT/\hbar\omega \gg 1$ . Po podstawieniu tego wyniku do (8.6) otrzymujemy, że średnia energia jednego oscylatora wynosi  $\langle E \rangle \approx kT$ , a dla układu  $3N$  oscylatorów -  $U = 3N\langle E \rangle = 3NkT$ . Ponieważ pojemność cieplna  $C_v$  przy stałej objętości ciała jest określona wzorem

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} , \quad (8.11)$$

otrzymujemy

$$C_v = 3Nk . \quad (8.12)$$

Dla jednego mola substancji liczba  $N$  jest równa liczbie Avogadra  $N_A$ , a  $N_A k = R$ , gdzie  $R$  - stała gazowa. Więc dla jednego mola substancji ze wzoru (8.12) otrzymujemy

$$C_v = 3R , \quad (8.13)$$

co jest zgodne z prawem Dulonga – Petita.

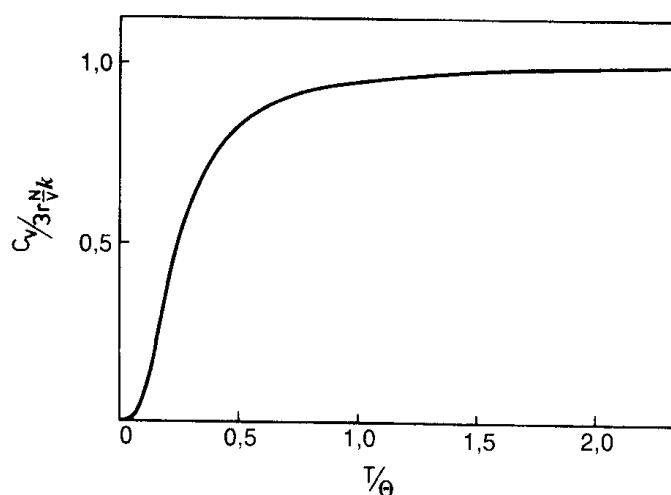
Z doświadczeń wynika, jednak, że w niskich temperaturach (rzędu kilkanaście Kelwinów)  $C_v$  staje się zależec od temperatury (rys.8.1), będąc proporcjonalną do  $T^3$ , przy czym współczynnik proporcjonalności zależy od budowy ciała.

Rozważmy teraz przypadek bardzo niskich ( $kT \ll \hbar\omega$ ) temperatur. Pomijając we wzorze (8.10) w mianowniku jedynkę, ze wzoru (8.9) mamy

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega + \hbar\omega \cdot e^{-\hbar\omega/kT} . \quad (8.14)$$

Korzystając ze wzoru (8.14) dla molarnej pojemności cieplnej – ciepła właściwego, otrzymujemy

$$C_v = \frac{d(3N_A \langle E \rangle)}{dT} = 3R \left( \frac{\hbar\omega}{kT} \right)^2 \cdot e^{-\hbar\omega/kT} . \quad (8.15)$$



Rys.8.1. Zależność sieciowego ciepła właściwego od temperatury

Łatwo udowodnić, że  $C_v$  zmierza do zera, gdy temperatura dąży do zera. Zbieżność ta jest jednak silniejsza niż doświadczalna. Nie zgodność modelu Einsteina z danymi doświadczalnymi przy niskich temperaturach wynika z założenia jednakowej częstości drgań fononów. Jest to dobre założenie dla fononów optycznych, które są wzbudzone przy wysokich temperaturach. Z tego mamy zgodność teorii i eksperymentu przy wysokich temperaturach.

Przy niskich temperaturach natomiast są wzbudzone przede wszystkim tak zwane fonony akustyczne, mające mniejszą energię. Częstości drgań fononów akustycznych leżą w znacznie szerszym zakresie, a zatem założenie jednakowej częstości drgań fononów przy niskich temperaturach źle opisuje rzeczywistość.

### Model Debye'a. Widmo drgań sieci krystalicznej

Debye udoskonalił model Einsteina zakładając, że

- częstości drgań fononów są proporcjonalne do wartości wektora falowego

$$\omega = v|\vec{k}|; \quad (8.16)$$

Założenie to jest zadowalające tylko przy bardzo niskich temperaturach, dla których wzbudzone są tylko długofalowe fonony ( $k \rightarrow 0$ );

- jednemu wektorowi falowemu odpowiadają trzy fonony, spolaryzowane we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Prędkości  $v$  fononów obu typów polaryzacji mogą być różne.

Nawet przy tych upraszczających założeniach obliczenie średniej energii drgań sieci

$$\langle E \rangle = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k}) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega(\vec{k})/kT} - 1} \right) \quad (8.17)$$

jest procedurą praktycznie niewykonalną. Dla obliczenia (8.17) Debye sprowadził sumowanie w (8.17) do całkowania, wprowadzając *widmo drgań sieci*  $D(\omega)$

$$\langle E \rangle = \int \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} D(\omega) d\omega. \quad (8.18)$$

Tu pominęliśmy w (8.17) mało znaczącą energię drgań zerowych.

We wzorze (8.18) człon  $D(\omega)d\omega$  określa liczbę fononów  $dn$  o częstościach leżących w przedziale  $(\omega, \omega + d\omega)$  i jak wykazał Debye'a ma on bardzo prostą postać

$$dn \equiv D(\omega)d\omega = \frac{3\omega^2}{\omega_D^3} d\omega. \quad (8.19)$$

Tu

$$\omega_D = v \cdot k_D \quad (8.20)$$

nosi nazwę *częstości Debye'a* i jest to maksymalna częstość drgań cieplnych.

Wprowadzając oznaczenie (*temperaturę Debye'a*)

$$T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k} \quad (8.21)$$

i biorąc pod uwagę (8.19), zapiszmy wzór (8.18) w postaci

$$\langle E \rangle = \frac{3(kT)^4}{(\hbar\omega_D)^3} \int_0^{x_D} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (8.22)$$

Tu  $x = \hbar\omega / kT$ , a  $x_D = \hbar\omega_D / kT = T_D / T$ .

Analityczne obliczenie całki możliwe jest tylko w przypadku bardzo wysokich, albo bardzo niskich temperatur. Dla pośrednich wartości temperatur wartość tej całki jest podana w tablicach funkcji specjalnych.

W przypadku bardzo wysokich temperatur  $kT \gg \hbar\omega_D$ , czyli  $T \gg T_D$ , przedział całkowania jest bardzo mały i na całej jego długości jest słuszne przybliżenie:  $e^x \approx 1 + x$ . Wtedy ze wzoru (8.22) otrzymujemy

$$\langle E \rangle \approx \frac{3(kT)^4}{(\hbar\omega_D)^3} \frac{x_D^3}{3} = kT \quad (8.23)$$

co pokrywa się ze wzorem otrzymanym przez nas dla modelu Einsteina.

W przypadku bardzo niskich temperatur  $kT \ll \hbar\omega_D$ , czyli  $T \ll T_D$ , górny przedział całkowania możemy przesunąć do nieskończoności. Wtedy ze wzoru (8.22) otrzymujemy

$$\langle E \rangle \approx \frac{3(kT)^4}{(\hbar\omega_D)^3} \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^4 k}{5} \frac{T^4}{T_D^3} \quad (8.24)$$

Tu uwzględniliśmy, że  $\int_0^{\infty} x^3 dx / (e^x - 1) = \pi^4 / 15$ .

Dla układu  $3N_A$  oscylatorów energia średnia wynosi

$$U = 3N_A \langle E \rangle = \frac{3N_A k \pi^4}{5} \frac{T^4}{T_D^3} \quad (8.25)$$

skąd dla ciepła właściwego otrzymujemy

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{12\pi^4}{5} N_A k \cdot \left( \frac{T}{T_D} \right)^3. \quad (8.26)$$

Otrzymana proporcjonalność przy niskich temperaturach  $C_v$  do  $T^3$  jest zgodna z danymi doświadczalnymi i ten wynik jest jednym z najważniejszych sukcesów wczesnej fizyki ciała stałego.

### Gaz Fermiego elektronów swobodnych. Energia Fermiego

Wiele właściwości fizycznych metali i półprzewodników można wyjaśnić na podstawie prostego modelu gazu swobodnych elektronów, wprowadzonego w roku 1933 przez Sommerfelda i Bethego. W modelu tym elektrony walencyjne atomów metalu lub półprzewodnika przemieszczają się w obszarze próbki w sposób mniej lub więcej swobodny.

Najpierw przypomnijmy jak mechanika kwantowa opisuje ruch elektronu swobodnego. Stacjonarne równanie Schrödingera dla elektronu swobodnego ma postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E \psi. \quad (8.27)$$

Rozwiązanie równania (8.27) będziemy szukali w postaci

$$\psi(\vec{r}) = A \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \equiv A \cdot \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]. \quad (8.28)$$

Po podstawieniu (8.28) do (8.27) znajdujemy

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cdot \psi \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi = E \psi. \quad (8.29)$$

Skąd dla poziomów energetycznych elektronu otrzymujemy

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (8.30)$$

Ze wzoru (8.30) widzimy, że widmo energetyczne elektronu swobodnego jest widmem ciągłym. Łatwo sprawdzić, że funkcje falowe (8.28) są własnymi funkcjami operatora pędu elektronu ( $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ ). Istotnie

$$\hat{p}(e^{i\vec{k}\vec{r}}) = -i\hbar\vec{\nabla}(e^{i\vec{k}\vec{r}}) = \hbar\vec{k} \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} . \quad (8.31)$$

A zatem dla swobodnego elektronu w stanie stacjonarnym  $E_k$  pęd elektronu jest dobrze określony i jest równy  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ .

Ze wzoru (8.30) wynika, że powierzchnie stałej energii elektronu swobodnego ( $E_k = const$ ) są kulami w przestrzeni wektorów falowych  $\vec{k}$ . Wiemy, że w kryształach dozwolone wektory falowe  $\vec{k}$  leżą w przedziale pierwszej strefy Brillouina i dla skończonego kryształu, zawierającego  $N$  komórek elementarnych, gęstość rozmieszczenia wektorów  $\vec{k}$  w pierwszej strefie Brillouina wynosi  $V/(2\pi)^3$ , gdzie  $V$  - objętość kryształu. Elektrony posiadają spin  $1/2$ , a zatem są cząstkami, które nazywamy *fermionami*. Dla wszystkich fermionów obowiązuje zakaz Pauliego. A to oznacza, że w stanie określonym wektorem falowym  $\vec{k}$  mogą znajdować się tylko dwa elektrony o przeciwnie skierowanych spinach. Zakaz Pauliego powoduje, że w stanie podstawowym (tj., gdy  $T = 0$ ) gazu elektronów swobodnych elektrony obsadzają kolejno poziomy energetyczne, zaczynając od poziomu z  $\vec{k} = 0$  do jakiegoś górnego poziomu. Ta górna granica, która przy  $T = 0$  oddziela stany obsadzone od stanów nie obsadzonych nazywa się *energiją Fermiego* ( $E_F^0$ ) dla zerowej temperatury.

### Rozkład Fermiego-Diraca

Jeżeli temperatura próbki nie jest zerowa, to część elektronów wskutek termicznego wzbudzenia będzie obsadzała stany o energii większej niż energia Fermiego. W tym przypadku ( $T \neq 0$ ), jak udowodniono w fizyce statystycznej, prawdopodobieństwo obsadzenia poziomu o energii  $\varepsilon_i$  określa wzór

$$\langle n_i \rangle \equiv f(\varepsilon_i) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}} . \quad (8.32)$$

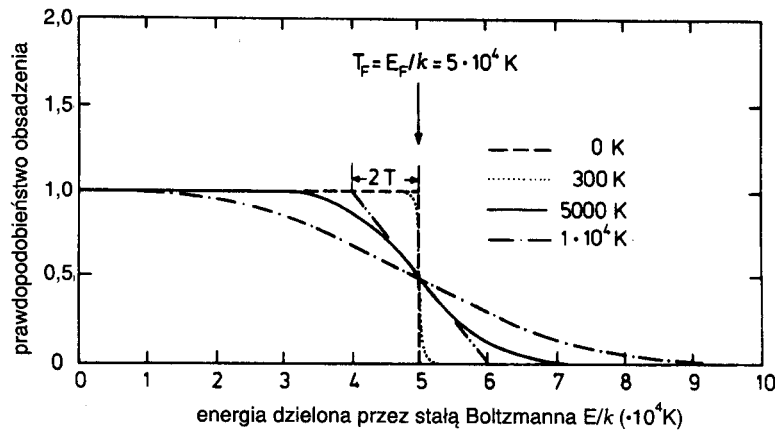
Rozkład (8.32) nazywa się *rozkładem Fermiego – Diraca*.

We wzorze (8.32) wielkość  $\mu$  nosi nazwę *potencjału chemicznego*. Sens potencjału chemicznego  $\mu$  w przypadku gazu elektronów swobodnych jest najlepiej widoczny w granicznym przypadku  $T = 0$ . Wtedy prawdopodobieństwo obsadzenia stanów jest przy



$T = 0$  funkcją schodkową (rys.8.2):  $f(\varepsilon_i) = 1$  dla  $\varepsilon_i \leq E_F^0$  i  $f(\varepsilon_i) = 0$  dla  $\varepsilon_i > E_F^0$ . Ze wzoru (8.31) wynika, że ten rozkład ma taką samą właściwość przy  $T = 0$ , jeżeli

$$\mu = E_F^0 . \quad (8.33)$$



Rys.8.2. Funkcja rozkładu Fermiego – Diraca w różnych temperaturach

Ze względu na równość (8.33) często w rozkładzie Fermiego – Diraca piszą energię Fermiego zamiast potencjału chemicznego

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_i - E_F)}} . \quad (8.34)$$

Należy zwrócić uwagę, że równość (8.33) jest słuszna tylko przy  $T = 0$ , a zatem stosując w rozkładzie (8.34) zamiast  $\mu$  „poziom Fermiego” musimy pamiętać, że taki poziom Fermiego jest wtedy wielkością zależną od temperatury.

W wyższych temperaturach rozkład Fermiego – Diraca staje się rozmyty w okolicy energii Fermiego. Szerokość obszaru, na którym odchylenie rozkładu Fermiego – Diraca od funkcji schodkowej jest znaczące, jest rzędu  $2kT$  (rys.8.2). Z tego wynika, że w miarę podnoszenia temperatury próbki tylko niewielka liczba elektronów jest wzbudzona. Odstępstwo w zachowaniu się gazu fermionów od klasycznego gazu cząstek Maxwella-Boltzmana nosi nazwę *degeneracji gazu*. Parametrem degeneracji gazu  $\eta$  jest wielkość

$$\eta = \frac{\mu}{kT} , \quad (8.35)$$

gdzie  $\mu$  jest potencjałem chemicznym cząstek.

Jeżeli  $\eta \ll 1$ , czyli  $\mu \ll kT$ , to łatwo wykazać, że rozkład Fermiego - Diraca przechodzi w klasyczną funkcję rozkładu Maxwella - Boltzmanna

$$P(E) = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) . \quad (8.36)$$

Jeżeli  $\eta \gg 1$ , czyli  $\mu \gg kT$ , to gaz cząstek Fermiego nie podlega statystyce klasycznej Maxwella-Boltzmanna. Dla metali w całym dostępnym przedziale temperatur poniżej temperatury topnienia parametr  $\eta \gg 1$ , a zatem gaz elektronowy metali jest gazem silnie zdegenerowanym. Fakt ten, jak zobaczymy później, ma istotne konsekwencje, np. dla własności cieplne metali.

### Kula i temperatura Fermiego

Energii Fermiego, zgodnie z (8.30) odpowiada maksymalny wektor falowy  $\vec{k}_F$ , który nosi nazwę *wektora falowego Fermiego*. Długość wektora falowego  $\vec{k}_F$  łatwo obliczyć z równania

$$\left(\frac{4\pi}{3} k_F^3\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{V}{8\pi^3}\right) = n \cdot V . \quad (8.37)$$

Tu  $n$  - koncentracja elektronów swobodnych w próbce.

Ze wzoru (8.37) otrzymujemy następujący wzór na wartość  $k_F$ , która nosi nazwę *promienia kuli Fermiego*

$$k_F = (3\pi^2 \cdot n)^{1/3} . \quad (8.38)$$

Po podstawieniu (8.38) do (8.30) otrzymujemy dla energii Fermiego następujący wzór

$$E_F^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \cdot n)^{2/3} . \quad (8.39)$$

Energia Fermiego dla metali jest rzędu kilku  $eV$  i w normalnych temperaturach jest znacznie większa niż  $kT$ . Aby jeszcze bardziej to uwidocznić, wprowadzają pojęcie *temperatury Fermiego*:  $T_F = E_F^0 / k$ . Dla większości metali  $T_F \approx 10^4 K$ .

### Funkcja gęstości stanów elektronów swobodnych

Jednej wartości energii elektronowej,  $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , odpowiada prawie nieskończona liczba stanów elektronowych dla których  $|\vec{k}| = const$ , a kierunek wektora  $\vec{k}$  w przestrzeni wektorów falowych jest dowolny. Zdefiniujemy funkcję gęstości stanów elektronowych  $g(E)$ , taką że  $g(E)dE$  równa się liczbie stanów elektronowych o energiach leżących w przedziale  $(E, E + dE)$ . W celu wyznaczenia funkcji  $g(E)$  podzielimy kulę Fermiego na warstwy sferyczne o grubości  $dk$ . Objętość takiej warstwy wynosi  $d\Omega = d(4\pi k^3 / 3) = 4\pi k^2 dk$ . Ponieważ na jeden wektor falowy w przestrzeni odwrotnej przypada objętość  $(8\pi^3 / V)$ , gdzie  $V$  - objętość kryształu), dzieląc  $d\Omega$  przez  $8\pi^3 / V$  otrzymujemy liczbę wektorów falowych, znajdujących się w warstwie o promieniu  $k$  i grubości  $dk$ :

$$dn = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \quad . \quad (8.40)$$

Biorąc pod uwagę wzór  $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  znajdujemy

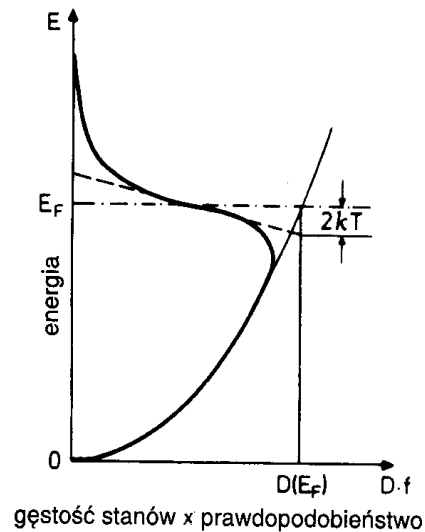
$$k^2 dk = \frac{1}{2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \cdot dE \quad . \quad (8.41)$$

Po podstawieniu (8.41) do wzoru (8.40) otrzymujemy

$$dn = \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \cdot dE \quad . \quad (8.42)$$

Ponieważ jednemu wektorowi falowemu, zgodnie z zakazem Paulego, odpowiadają dwa stany, liczba stanów elektronowych będzie w dwa razy większa, czyli  $2 \cdot dn$ . Wobec tego dla funkcji gęstości stanów elektronowych mamy (rys.8.3)

$$g(E)dE = 2 \cdot dn = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \cdot dE . \quad (8.43)$$



Rys.8.3. Funkcja rozkładu  $D(E)$

Otrzymaliśmy, więc wzór na funkcję  $g(E)$ , która określa jak są rozłożone wzdłuż osi energii stany, które mogą być obsadzone przez elektrony. Obsadzenie tych stanów określa rozkład Fermiego – Diraca, a zatem gęstość stanów obsadzonych przez elektrony określa funkcja

$$G(E)dE = g(E)f(E)dE , \quad (8.44)$$

gdzie funkcja  $f(E)$  opisuje rozkład Fermiego - Diraca

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E-E_F)}} . \quad (8.45)$$

### Zadania do Wykładu 8

1. Udowodnić wzór (8.18).

2. Wyprowadzić wzory na funkcję gęstości stanów dla łańcucha jednoatomowego zakładając, że  $\omega = v \cdot k$ . Określić częstotliwość Debye'a.

3. Korzystając z wyników zadania 2 wyprowadzić wzór na molowe ciepło właściwe.

3. Zakładając, że dla większości metali  $T_F \approx 10^4 K$  obliczyć parametr degeneracji gazu elektronowego w temperaturze pokojowej.

4. Wykazać, że  $\eta \ll 1$  rozkład Fermiego - Diraca oraz rozkład Bosego - Einsteina przechodzą w klasyczny rozkład Maxwella - Boltzmann.

5. Udowodnić, że funkcja gęstości stanów elektronów swobodnych w przypadku jednowymiarowym ma postać

$$g(E) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{E}} .$$

6 Udowodnić, że energia kinetyczna gazu trójwymiarowego  $N$  elektronów, w temperaturze 0 K, wynosi

$$E_{kin} = \frac{3}{5} N \cdot E_F .$$

7. Wykazać, że w rozkładzie Fermiego - Diraca przy  $\mu \gg kT$  potencjał chemiczny pokrywa się z energią Fermiego

$$\mu \equiv E_F^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \cdot n)^{2/3} .$$