

Podstawowe pojęcia i zasady fizyki kryształów

Skalary, wektory, tensory

Własności fizyczne kryształów zawsze określamy przez związki między mierzalnymi doświadczalnymi wielkościami. Na przykład gęstość kryształu ρ określana jest przez związek między masą m i objętością V kryształu w następujący sposób

$$m = \rho \cdot V . \quad (12.1)$$

Zarówno masę, jak i objętość kryształu możemy mierzyć nie biorąc pod uwagę orientacji kryształu w przestrzeni, ponieważ masa i objętość dowolnego ciała materialnego nie zależą od orientacji ciała w przestrzeni. Nie zależy od orientacji kryształu również temperatura T ciała w stanie równowagi termicznej. Definiując gęstość czy temperaturę kryształu nie ma sensu mówić o pomiarze tych wielkości w jakimś szczególnym kierunku. Takie “bezkierunkowe” wielkości fizyczne nazywamy *skalarami*. Wartość skalarną określa w zupełności pojedyncza liczba.

Oprócz skalarów, własności fizyczne kryształów określają również inne wielkości fizyczne zwane *wektorami*. Przykładem wektora, który definiuje własność fizyczną kryształów jest wektor współczynników piroelektrycznych \vec{p} , który określa zmianę składowych wektora polaryzacji \vec{P} przy zmianie temperatury

$$\Delta \vec{P} = \vec{p} \cdot \Delta T . \quad (12.2)$$

Tu własność fizyczna - piroelektryczność, którą opisuje wektor \vec{p} , zdefiniowana jest, zgodnie z (12.2), jako związek między dwiema mierzalnymi wielkościami: temperaturą T (skalar) i polaryzacją \vec{P} (wektor).

Oprócz wielkości wektorowych, w fizyce kryształów występują jeszcze inne wielkości zwane *tensorami*. Rozważmy pojęcie tensora na przykładzie przewodnictwa elektrycznego. Przewodnictwo elektryczne, zdefiniowane jest jako związek między dwiema mierzalnymi wektorami: wektorem natężenia pola elektrycznego \vec{E} i wektorem gęstości prądu elektrycznego \vec{j} :

$$\vec{j} \leftrightarrow \vec{E} . \quad (12.3)$$

Jeżeli przewodnik jest izotropowy i zachowuje się zgodnie z prawem Ohma, wektor \vec{j} jest równoległy do wektora \vec{E} i

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} . \quad (12.4a)$$

albo dla składowych wektorów

$$j_i = \sigma E_i , \quad (12.4b)$$

gdzie wielkość σ nosi nazwę *przewodnictwa elektrycznego*.

Więc, dla izotropowych ciał przewodnictwo jest wielkością skalarną. Natomiast jeżeli przewodnik jest kryształem, to z doświadczeń wynika, że wektor \vec{j} w ogólnym przypadku nie jest równoległy do wektora \vec{E} . Znajdziemy związek między wektorami \vec{j} i \vec{E} , zakładając, że dla kryształu słuszne jest prawo Ohma, tj. zależność między \vec{j} i \vec{E} jest liniowa. Niech wektor \vec{E} skierowany jest wzdłuż osi Ox_1 , tj. $\vec{E} = [E_1, 0, 0]$. Wtedy dla składowych wektora \vec{j} możemy napisać

$$j_1 = \sigma_{11}E_1, \quad j_2 = \sigma_{21}E_1, \quad j_3 = \sigma_{31}E_1 . \quad (12.5a)$$

Jeżeli wektor \vec{E} skierowany jest wzdłuż osi Ox_2 , tj. $\vec{E} = [0, E_2, 0]$, dla składowych wektora \vec{j} otrzymujemy

$$j_1 = \sigma_{12}E_2, \quad j_2 = \sigma_{22}E_2, \quad j_3 = \sigma_{32}E_2 . \quad (12.5b)$$

W przypadku, gdy wektor \vec{E} skierowany jest wzdłuż osi Ox_3 , tj. $\vec{E} = [0, 0, E_3]$, dla składowych wektora \vec{j} mamy

$$j_1 = \sigma_{13}E_3, \quad j_2 = \sigma_{23}E_3, \quad j_3 = \sigma_{33}E_3 . \quad (12.5c)$$

A więc, w przypadku gdy wektor \vec{E} skierowany jest w dowolny sposób, tj. $\vec{E} = [E_1, E_2, E_3]$, znajdziemy, że dla kryształów związek między wektorami \vec{E} i \vec{j} należy napisać w postaci

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 , \quad (12.6a)$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 , \quad (12.6b)$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 , \quad (12.6c)$$

albo

$$j_i = \sum_{k=1,2,3} \sigma_{ik} E_k . \quad (12.6d)$$

Ze wzorów (12.6) widać, że w celu określenia przewodnictwa kryształu musimy określić dziewięć współczynników σ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Możemy je dla wygody zapisać w postaci macierzy kwadratowej

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} . \quad (12.7)$$

Współczynniki σ_{ik} tworzą składowe *tensora drugiego rzędu*. Więc, w odróżnieniu od ciał izotropowych, przewodnictwo elektryczne dla kryształu jest wielkością tensorową.

Dlatego, żeby zdefiniować pojęcie tensora przypomnijmy sobie najpierw regułę transformacji składowych dowolnego wektora \vec{b} przy przejściu od jednego układu kartezjańskiego Ox_1, Ox_2, Ox_3 do drugiego układu kartezjańskiego Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 , zakładając, iż układy mają ten sam początek. Niech $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ będą jednostkowymi wektorami wzdłuż osi Ox_1, Ox_2, Ox_3 , a $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ są jednostkowymi wektorami wzdłuż osi Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 . Oznaczmy przez $\alpha_{i'k}$ iloczyn skalarny wektorów \vec{e}'_i i \vec{e}_k

$$\alpha_{i'k} \equiv \alpha_{ki'} = (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_k) = \cos \angle \vec{e}'_i \vec{e}_k , \quad (12.8)$$

gdzie przez $\angle \vec{e}'_i \vec{e}_k$ oznaczyliśmy kąt między jednostkowym wektorem \vec{e}'_i „nowego” układu współrzędnych i jednostkowym wektorem \vec{e}_k „starego” układu współrzędnych. Składowe macierzy przekształcenia $\alpha_{i'k}$ są określone jednoznacznie przez wybrane bazy $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

Załóżmy teraz, że wektor \vec{b} ma składowe b_1, b_2, b_3 , względem osi Ox_1, Ox_2, Ox_3 i składowe b'_1, b'_2, b'_3 , względem osi Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 . Przez składowe, wektor \vec{b} możemy zapisać w postaci

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 , \quad (12.9)$$

$$\vec{b} = b_1' \vec{e}_1' + b_2' \vec{e}_2' + b_3' \vec{e}_3' . \quad (12.10)$$

Mnożąc (12.9) skalarnie przez $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ i uwzględniając (12.8), oraz że

$$b_1' = (\vec{e}_1' \cdot \vec{b}), \quad b_2' = (\vec{e}_2' \cdot \vec{b}), \quad b_3' = (\vec{e}_3' \cdot \vec{b}) , \quad (12.11)$$

znajdujemy

$$b_1' = \alpha_{1'1} b_1 + \alpha_{1'2} b_2 + \alpha_{1'3} b_3 ,$$

$$b_2' = \alpha_{2'1} b_1 + \alpha_{2'2} b_2 + \alpha_{2'3} b_3 ,$$

$$b_3' = \alpha_{3'1} b_1 + \alpha_{3'2} b_2 + \alpha_{3'3} b_3 ,$$

co można zapisać również jako

$$b_i' = \sum_{k=1,2,3} \alpha_{i'k} b_k . \quad (12.12a)$$

Powtarzając rozumowanie dla (12.10) otrzymujemy

$$b_i = \sum_{k=1,2,3} \alpha_{ik'} b_k' . \quad (12.12b)$$

Łatwo wykazać, że dla macierzy przekształcenia $\alpha_{ik'}$ są słuszne związki

$$\alpha_{ik'} \alpha_{k'j} = \delta_{ij} , \quad \alpha_{ki'} \alpha_{j'k} = \delta_{i'j'} . \quad (12.13)$$

Gdzie δ_{ij} i $\delta_{i'j'}$ są symbolami Kroneckera.

Rozpatrzmy dalej związek (12.6d) między wektorem gęstości prądu \vec{j} i wektorem natężenia pola elektrycznego \vec{E} dla kryształów. Zależność ta powinna być słuszną w dowolnym układzie współrzędnych, a więc w układzie współrzędnych Ox_i' ($i=1,2,3$) możemy zapisać

$$j_i' = \sum_{k=1,2,3} \sigma_{ik'} E_k' . \quad (12.14)$$

gdzie j_i' i E_k' ($i, k=1,2,3$) są składowe wektorów \vec{j} i \vec{E} w układzie współrzędnych Ox_i' .

W celu znalezienia związków między σ_{ik} i σ'_{ik} posłużmy się wzorami (12.12) przekształcenia składowych wektora. Korzystając z (12.12a) możemy zapisać

$$j'_i = \sum_{m=1,2,3} \alpha'_{i'm} j_m . \quad (12.15)$$

Podstawiając (12.6d) do (12.15) znajdujemy

$$j'_i = \sum_{m=1,2,3} \alpha'_{i'm} \sum_{l=1,2,3} \sigma_{ml} E_l . \quad (12.16)$$

Dalej, ze związku (12.12b) mamy

$$E_l = \sum_{k=1,2,3} \alpha_{k'l} E'_k . \quad (12.17)$$

Podstawiając (12.17) do (12.16) otrzymujemy

$$j'_i = \sum_{k=1,2,3} \left(\sum_{m=1,2,3} \sum_{l=1,2,3} \alpha'_{i'm} \alpha_{k'l} \sigma_{ml} \right) \cdot E'_k . \quad (12.18)$$

Z porównania wzorów (12.14) i (12.18) wynika, że

$$\sigma'_{ik} = \sum_{m,l} \alpha'_{i'm} \alpha_{k'l} \sigma_{ml} . \quad (12.19)$$

Powtarzając rozumowanie dla transformacji odwrotnej znajdziemy

$$\sigma_{ik} = \sum_{m,l} \alpha_{m'i} \alpha'_{l'k} \sigma'_{ml} . \quad (12.20)$$

Prawa transformacji (12.19) i (12.20) stanowią podstawę definicji tensora drugiego rzędu.

Tensorem drugiego rzędu nazywamy $3^2 = 9$ liczb rzeczywistych T_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$), które transformują się przy przejściu od jednego układu współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 do drugiego Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 zgodnie z równaniami

$$T'_{ik} = \sum_{m,l} \alpha'_{i'm} \alpha_{k'l} T_{ml} , \quad (12.21)$$

$$T_{ik} = \sum_{m,l} \alpha_{m'i} \alpha'_{l'k} T'_{ml} . \quad (12.22)$$

W fizyce kryształów często dla prostoty zapisu sum stosuje się konwencję sumowania Einsteina

$$b_i = \sum_{k=1,2,3} \alpha_{ik} c_k \equiv \alpha_{ik} c_k, \quad (12.23a)$$

$$b_{ik} = \sum_{m,l} \alpha_{mi} \alpha_{lk} c_{ml} \equiv \alpha_{mi} \alpha_{lk} c_{ml}, \quad (12.23b)$$

czyli opuszcza się znak sumowania, jeżeli wskaźnik literowy powtarza się dwa razy w tym samym wyrazie.

W ogólnym przypadku mówimy, że dany jest tensor T n -go rzędu jeżeli z każdą bazą współrzędnych kartezjańskich $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jest związany zbiór 3^{2n} liczb rzeczywistych $T_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ($k_1, k_2, \dots, k_n = 1, 2, 3$) zwanych składowymi tensora w bazie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i jeżeli te liczby $T_{k_1 k_2 \dots k_n}$ są związane z liczbami $T'_{k_1 k_2 \dots k_n}$ (składowymi tensora T w bazie współrzędnych kartezjańskich $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$) równaniami:

$$T'_{k_1 k_2 \dots k_n} = \alpha_{k'_1 k_1} \alpha_{k'_2 k_2} \dots \alpha_{k'_n k_n} T_{k_1 k_2 \dots k_n}, \quad (12.24a)$$

$$T_{k_1 k_2 \dots k_n} = \alpha_{k'_1 k_1} \alpha_{k'_2 k_2} \dots \alpha_{k'_n k_n} T'_{k_1 k_2 \dots k_n}. \quad (12.24b)$$

Tu skorzystaliśmy z konwencji sumowania Einsteina.

Symetria własności fizycznych. Zasada Neumanna

Jak wynika z określenia tensora (patrz wzory (12.24)) wartości liczbowe składowych tensora zależą od wybranego układu współrzędnych i przy przejściu od jednego układu współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 do innego Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 składowe tensora zmieniają się. Obecność elementów symetrii w kryształach powoduje, że postać tensora właściwości fizycznej (wartości liczbowe składowych tensora) powinna być niezmiennicza względem przekształceń symetrii kryształu. Oznacza to, że w różnych układach współrzędnych, związanych między sobą przekształceniami symetrii punktowej grupy kryształu, tensor właściwości fizycznej musi mieć tę samą postać. Związek między symetrią kryształu a symetrią właściwości fizycznych kryształów stanowi zasadniczy postulat fizyki kryształów, znany jako *zasada Neumanna*: elementy symetrii własności fizycznej kryształu muszą zawierać elementy symetrii grupy punktowej kryształu.

Oznaczając przez G_p grupę punktową kryształu, a przez G_f - symetrię własności fizycznej i używając symbolu \subset oznaczającego zawieranie (inkluzję) zasadę Neumanna możemy zapisać w postaci relacji:

$$G_p \subset G_f . \quad (12.25)$$

Tabela 12.1. Przykłady tensorów opisujących właściwości fizyczne kryształów

Nazwa właściwości fizycznej	Równanie określające własność fizyczną
A. Tensory pierwszego rzędu łączące skalar i wektor	
Piroelektryczność	$\Delta P_i = p_i \Delta T$
Efekt elektrokaloryczny	$\Delta T = q_i \Delta E_i$
B. Tensory drugiego rzędu łączące dwa wektory	
Przenikalność dielektryczna	$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j$
Dielektryczna nieprzenikalność	$E_i = \eta_0 \eta_{ij} D_j$
Podatność dielektryczna	$P_i = \epsilon_0 \zeta_{ij} E_j$
Przenikalność magnetyczna	$B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j$
Podatność magnetyczna	$J_i = \mu_0 \chi_{ij} H_j$
Przewodnictwo elektryczne	$j_i = \sigma_{ij} E_j$
Opór elektryczny	$E_i = \rho_{ik} j_k$
C. Tensory drugiego rzędu łączące skalar z tensorem drugiego rzędu	
Rozszerzalność cieplna	$r_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T$
D. Tensory trzeciego rzędu łączące wektor z tensorem drugiego rzędu	
Efekt piezoelektryczny prosty	$P_i = d_{ijk} t_{jk}$
Efekt piezoelektryczny odwrotny	$r_{jk} = d_{ijk} E_i$
Efekt piezoelektryczny	$P_i = e_{ijk} r_{jk}$
Efekt piezoelektryczny odwrotny	$t_{jk} = -e_{ijk} E_i$
Efekt elektrooptyczny	$\Delta \eta_{ij} = r_{ijk} E_k$
E. Tensory czwartego rzędu łączące dwa tensory drugiego rzędu	
Współczynniki sprężystości	$r_{ij} = s_{ijkl} t_{kl}$
Współczynniki sztywności	$t_{ij} = c_{ijkl} r_{kl}$
Współczynniki elastoptyczne	$\Delta \eta_{ij} = p_{ijkl} r_{kl}$
Współczynniki piezoptyczne	$\Delta \eta_{ij} = \pi_{ijkl} t_{kl}$
Elektrostrykcja	$r_{jk} = \gamma_{ijk} E_i E_l$

Warto podkreślić, że z zasady Neumanna nie wynika, że elementy symetrii własności fizycznej są takie same jak elementy symetrii grupy punktowej kryształu. Własność fizyczna często wykazuje symetrię względem dodatkowych elementów symetrii i ma symetrię wyższą niż grupa punktowa kryształu. Jednak zgodnie z zasadą Neumanna symetria własności fizycznej powinna zawierać geometryczne symbole i ich orientacje w przestrzeni wszystkich elementów symetrii grupy punktowej kryształu. Przykłady niektórych tensorów opisujących właściwości fizyczne kryształów podano w tablicy 12.1.

Jako przykład zastosowania zasady Neumanna udowodnimy, że własności wektorowe (efekt piroelektryczny; efekt zmiany temperatury kryształu na skutek zmiany natężenia pola elektrycznego - efekt elektrokaloryczny; polaryzacja kryształu pod wpływem ciśnienia hydrostatycznego - efekt piezoelektryczny itp.) mogą powstać tylko w kryształach klas polarnych: 1, 2, 3, 4, 6, m , $mm2$, $3m$, $4mm$, $6mm$.

Grupa punktowa symetrii wektora polarnego jest ∞m (patrz przykład II.2.2) i zawiera oś dowolnej krotności (∞) stanowiącej własny kierunek wektora i nieskończoną liczbę płaszczyzn symetrii leżących na tej osi. Zastosujemy zasadę Neumanna dla poszczególnych klas symetrii układów krystalograficznych.

a) Układ trójskośny. Klasa 1 nie wykazuje zupełnie elementów symetrii, a więc nie nakłada żadnych ograniczeń na możliwość istnienia własności fizycznej wektorowej w kryształach tej klasy. Kierunek wektora polarnego może być dowolnym. W kryształach klasy $\bar{1}$ istnieje środek symetrii którego nie ma w grupie punktowej ∞m symetrii wektora polarnego. Zatem, zgodnie z (11.25) w kryształach zawierających środek symetrii nie mogą powstać właściwości fizyczne, które charakteryzują wektory polarne.

b) Układ jednoskośny. W kryształach układu jednoskośnego własności wektorowe mogą mieć tylko kryształy klasy 2 i m (klasa $2/m$ zawiera środek symetrii). Dla kryształów klasy 2 wektor własności fizycznej, zgodnie z (11.25) musi być skierowany tylko wzdłuż osi 2. Dla kryształów klasy m relacja (11.25) wymaga, żeby wektor osiowy znajdował się w płaszczyźnie symetrii. Kierunek wektora w tej płaszczyźnie może być dowolny.

c) Układ rombowy. W tym przypadku środka symetrii nie zawierają dwie klasy: $mm2$ i 222 . Jednak klasa 222 ma trzy wzajemnie prostopadłe osi 2 - krotne i nie jest zgodna z symetrią punktową wektora polarnego. Zatem dla kryształów układu rombowego tylko kryształy klasy $mm2$ mogą mieć właściwości wektorowe. Wektor polarny powinien być skierowany wzdłuż osi 2 - krotnej.

d) *Układ tetragonalny.* Spośród klas układu tetragonalnego tylko klasy 4 i 4mm zawierają polarny kierunek, tj. kierunek który nie zmienia swojego zwrotu przekształceniami symetrii kryształu. Łatwo zauważyć, że kierunek polarny pokrywa się z osią 4 - krotną. W pozostałych klasach jest środek symetrii, albo osie 2 - krotne prostopadłe do osi 4. Właściwości wektorowe mogą więc posiadać tylko kryształy klas 4 i 4mm układu tetragonalnego i wektor właściwości fizycznej musi być skierowany wzdłuż osi 4 - krotnej.

e) *Układ regularny.* W kryształach układu regularnego, obecność czterech osi 3 - krotnych powoduje, że w kryształach nie istnieje kierunek polarny, a zatem kryształy układu regularnego nie mogą mieć właściwości fizycznych, które opisują tensory pierwszego rzędu.

f) *Układy heksagonalny i trygonalny.* Dla układów heksagonalnego i trygonalnego tylko w kryształach klas 6, 6mm, 3 i 3m istnieją kierunki polarne, a więc tylko kryształy tych klas wykazują właściwości wektorowe. Wektor własności fizycznej w tym przypadku ma kierunek wzdłuż osi 3 albo 6.

Reasumując możemy powiedzieć, że tylko kryształy należące do wymienionych dziesięciu klas polarnych mogą mieć właściwości fizyczne, które opisują tensory pierwszego rzędu (wektory).

Zadania do Wykładu 12

1. Płytkę z kryształu KDP (KH_2PO_4 , grupa punktowa $\bar{4}2m$) jest umieszczona w polu elektrycznym o natężeniu 20 kV/cm . Zakładając, że wartość współczynnika elektrokalorycznego wynosi $q = -2 \cdot 10^{-6} \text{ Km/V}$ znaleźć o ile się zmieni temperatura płytki jeżeli pole elektryczne jest skierowane wzdłuż: a) osi inwersyjnej; b) prostopadłe do tej osi.

Odpowiedź: a) $\Delta T = -4K$; b) $\Delta T = 0$.

2. Z kryształu turmalinu ($(Na, Ca)(Mg, Li, Al)_3 Al_6 (BO_3)(Si_6 O_{18})$, grupa punktowa 3m) została wycięta płytka. Jakie pole elektryczne wywołałoby tę samą polaryzację płytki co zmiana jej temperatury o $1K$? (W temperaturze pokojowej wartość współczynnika piroelektrycznego turmalinu wynosi $p \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ Cm}^{-2} K^{-1}$, a stałą dielektryczną w kierunku osi 3 jest równa $\epsilon_3 = 7.5$).

Odpowiedź: $E = 5.2 \cdot 10^3 \text{ V/m}$.

Wskazówka: skorzystać ze wzorów: $\epsilon_3 = 1 + \zeta_3$, $E = P / \epsilon_0 \zeta_3$ ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$).

3. Obliczyć gęstość ładunków elektrycznych które się pojawiają na powierzchni płytki z turmalinu przy ogrzewaniu płytki o $30K$. Płytkę została wycięta tak aby: a) wektor

normalny do powierzchni płytki był równoległy do osi symetrii kryształu; b) kąt między wektorem normalnym do powierzchni płytki i osią 3 wynosił 60° ; c) oś 3-krotna leżała w płaszczyźnie płytki.

Odpowiedź: a) $\sigma = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Cm}^{-2}$; b) $\sigma = 4.5 \cdot 10^{-6} \text{ Cm}^{-2}$; c) $\sigma = 0 \text{ Cm}^{-2}$.

Wskazówka: gęstość ładunków elektrycznych σ jest liczbowo równa polaryzacji P .

4. Płytkę z kryształu kwasu winowego ($\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_6$, grupa punktowa 2) ma wymiary $1 \times 1 \times 0,1 \text{ cm}^3$. Oś symetrii 2 jest normalna do powierzchni płytki. Obliczyć: a) ładunek elektryczny który się pojawia na powierzchni płytki przy jej ogrzewaniu o 10K ; b) różnicę potencjałów między powierzchniami przeciwległymi płytki. (Wartość współczynnika piroelektrycznego kwasu winowego wynosi $p = -1.3 \cdot 10^{-6} \text{ Cm}^{-2}\text{K}^{-1}$, a tensor przenikalności dielektrycznej ma składowe: $\epsilon_{11} = 6.44$, $\epsilon_{22} = 5.80$, $\epsilon_{33} = 6.49$, $\epsilon_{13} = 0.005$).

Odpowiedź: a) $Q = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$; b) $U = 2.5 \cdot 10^6 \text{ V}$.

Wskazówka: różnicę potencjałów obliczamy ze wzoru $U = Q/C$, gdzie Q - wartość bezwzględna ładunku elektrycznego na jednej z powierzchni płytki, $C = \epsilon_0 \epsilon S/d$ - pojemność kondensatora.

5. Wykazać, że składowymi głównymi tensora symetrycznego drugiego rzędu S_{ij} są trzy pierwiastki równania trzeciego stopnia względem λ

$$\det(S_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0,$$

zwanego *równaniem wiekowym*. Kierunek osi głównej x'_1, x'_2, x'_3 , odpowiadającej pierwiastkowi λ' , szukamy przez rozwiązanie układu równań

$$S_{ij} x'_j = \lambda' x'_i,$$

$$x'_i x'_i = 1.$$

6. Udowodnić twierdzenie: iloczyn $(x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_n})$ (gdzie $k_1, k_2, \dots, k_n = 1, 2, 3$ i x_1, x_2, x_3 są współrzędnymi wektora wodzącego dowolnego punktu w przestrzeni) transformuje się przy przejściu od jednego układu współrzędnych (Ox_1, Ox_2, Ox_3) do drugiego układu współrzędnych (Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3) tak jak składowa tensora n -go rzędu $T_{k_1 k_2 \dots k_n}$.

7. Tensor rozszerzalności cieplnej α_{ij} w pewnym układzie współrzędnych ma postać

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -7.5 \\ 0 & 41 & 0 \\ -7.5 & 0 & 32 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} K^{-1} .$$

Znaleźć postać tensora α_{ij} w układzie osi głównych.

Odpowiedź: $\alpha_1 = 34.8 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_2 = 41 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_3 = 12.2 \cdot 10^{-6} K^{-1}$,

Wskazówka: Skorzystać ze wzorów zadania 11.5.

8. Jak musimy wyciąć płytkę z kryształu kalcytu ($CaCO_3$, grupa punktowa $\bar{3}m$; główne współczynniki rozszerzalności cieplnej są równe: $\alpha_1 = \alpha_2 = -5.6 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_3 = 25 \cdot 10^{-6} K^{-1}$) aby przy ogrzewaniu jej grubość się nie zmieniała?

Odpowiedź: kąt między inwersyjną osią trójkrotną i kierunkiem wektora normalnego do płytki musi być równy $\theta = \arccos[\alpha_1 / (\alpha_1 - \alpha_3)] = 64^{\circ}43'$.

9. W których kierunkach kryształ grafitu (C , grupa punktowa $6/mmm$; główne współczynniki rozszerzalności cieplnej są równe: $\alpha_1 = \alpha_2 = -1.5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_3 = 28.2 \cdot 10^{-6} K^{-1}$) przy ogrzewaniu nie rozszerza się?

Odpowiedź: w kierunkach tworzących kąt $86^{\circ}50'$ z osią 6 - krotną.

10. Macierz $\alpha_{i'j}$ transformacji układu współrzędnych przy obrocie o kąt 60° dookoła osi Ox_3 ma postać

$$[\alpha_{i'j}] = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Znaleźć postać tensora drugiego rzędu, określającego właściwość fizyczną kryształów układu heksagonalnego ma postać.

11. Między okładkami kondensatora płaskiego zaciśnięta jest płytką z gipsu ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$, grupa punktowa $2/m$) o grubości 0.4 cm . Pole powierzchni płytki wynosi $1 \times 2.5 \text{ cm}^2$. Wektor \vec{N} normalny do powierzchni płytki tworzy następujące kąty z osiami krystalograficznymi

$$\angle x_1ON = 90^0, \angle x_2ON = 30^0, \angle x_3ON = 60^0.$$

Obliczyć pojemność elektryczną kondensatora, jeżeli główne stałe dielektryczne gipsu są równe: $\epsilon_1 = 9.9$, $\epsilon_2 = 5.1$, $\epsilon_3 = 5.0$.

Odpowiedź: $C = 1.4 \cdot 10^{-12} F$.

12. Jeżeli kryształ znajduje się w polu elektrycznym \vec{E}_{zew} , to wskutek polaryzacji kryształu pole elektryczne wewnątrz kryształu nie jest równe \vec{E}_{zew} . Niezrównoważone ładunki elektryczne, które powstają przy polaryzacji kryształu wytwarzają swoje własne pole elektryczne \vec{E}_{pol} i całkowite pole elektryczne w kryształach wynosi

$$\vec{E} = \vec{E}_{zew} + \vec{E}_{pol}.$$

Z kryształu układu regularnego wycięto długi pręt, płaski krążek (dysk) oraz kulę. Wykazać, że w przypadku:

a) długiego pręta umieszczonego w jednorodnym polu elektrycznym tak, aby wektor \vec{E}_{zew} był równoległym do osi pręta są słuszne wzory

$$\vec{E}_{pol} = 0, \quad P_i = \epsilon_0 \zeta_{ii} (E_{zew})_i.$$

b) płaskiego krążka, dla którego wektor \vec{E}_{zew} jest prostopadły do płaszczyzny krążka zachodzi

$$\epsilon_0 \vec{E}_{pol} = -\vec{P}, \quad P_i = \epsilon_0 \frac{\zeta_{ii}}{1 + \zeta_{ii}} (E_{zew})_i.$$

c) kuli umieszczonej w jednorodnym polu mamy

$$\epsilon_0 \vec{E}_{pol} = -\frac{1}{3} \vec{P}, \quad P_i = \epsilon_0 \frac{3\zeta_{ii}}{3 + \zeta_{ii}} (E_{zew})_i.$$

Wskazówka: Występujące we wzorze na polaryzację $P_i = \epsilon_0 \zeta_{ij} E_j$ pole elektryczne \vec{E} jest całkowitym polem elektrycznym.

13. Wektor normalny do płytki z winianu sodowo-potasowego (sól Seignette'a, $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$, grupa punktowa 222, główne współczynniki rozszerzalności cieplnej są równe: $\alpha_1 = 58.3 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_2 = 35.5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_3 = -136.1 \cdot 10^{-6} K^{-1}$) tworzy z osiami

krystalofizycznymi kąty 30° , 70° , $68,6^\circ$. Znaleźć współczynnik rozszerzalności cieplnej płytki w kierunku normalnym do jej powierzchni.

Odpowiedź: $\alpha = 0,63 \cdot 10^{-6} K^{-1}$.