Wykład 9

Prawo Hooke'a – Przedłużenie

Przykład 9.1. Dla kryształów układu regularnego macierz współczynników sprężystości określa wzór

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix}, \tag{9.1}$$

Wykażemy, że rozszerzalność $\delta = \Delta V / V$ kryształów układu regularnego nie zależy od kierunku działania naprężenia rozciągającego.

Wybierzemy oś $Ox_3^/$ wzdłuż kierunku działania naprężenia jednoosiowego. Wtedy tensor naprężenia w tym układzie współrzędnych będzie miał postać

$$\left[t_{kl}^/\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

W układzie krystałofizycznym tensor naprężenia znajdziemy, korzystając z reguł przekształcenia składowych tensora drugiego rzędu i wzoru (9.1)

$$t_{ij} = \alpha_{3i}\alpha_{3j}t_{33}^/ = n_i n_j t \ , \tag{9.3}$$

gdzie n_i - cosinusy kierunkowe wektora jednostkowego $\vec{n}$ równoległego do osi $Ox_3^/$ w układzie krystałofizycznym.

Rozszerzalność kryształu, zgodnie z określeniem, wynosi $\delta = r_{ii}$. Korzystając z prawa Hooke'a i (9.3) dla składowej tensora odkształceń r_{11} mamy

$$r_{11} = s_{11kl}t_{kl} = t[s_{1111}n_1^2 + s_{1122}n_2^2 + s_{1133}n_3^2 + (s_{1112} + s_{1121})n_1n_2 + (s_{1113} + s_{1131})n_1n_3 + (s_{1123} + s_{1132})n_2n_3] \; . \tag{9.4}$$

Stosując zapis macierzowy zapiszmy wzór (9.4) w postaci

$$r_1 = t(s_{11}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{13}n_3^2 + s_{16}n_1n_2 + s_{15}n_1n_3 + s_{14}n_2n_3) \; . \tag{9.5}$$

Biorąc pod uwagę (9.1) ze wzoru (9.5) otrzymujemy

$$r_1 = t(s_{11}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{12}n_3^2) \; . \tag{9.6a}$$

W podobny sposób znajdujemy

$$r_2 = t(s_{12}n_1^2 + s_{11}n_2^2 + s_{12}n_3^2) \; . \tag{9.6b}$$

$$r_3 = t(s_{12}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{11}n_3^2) \; . \tag{9.6c}$$

Po podstawieniu wzorów (9.6) do wzoru na rozszerzalność otrzymujemy

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = r_1 + r_2 + r_3 = t(s_{11} + 2s_{12}) \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \equiv t(s_{11} + 2s_{12}) \; , \tag{9.7}$$

ponieważ $(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = 1$. A więc zmiana objętości kryształu regularnego pod wpływem naprężenia jednoosiowego nie zależy od kierunku działania tego naprężenia.

Fale sprężyste w kryształach

Fale sprężyste w kryształach będziemy rozważali, traktując kryształ jako ośrodek ciągły, a więc pomijając atomową budowę kryształu. Przybliżenie to jest dobrym przybliżeniem dla fal o długościach λ znacznie większych od stałej sieci krystalicznej, czyli przy $\lambda > 10^{-6}\,cm$ ($\nu < 10^{11}\,Hz$). Za punkt wyjścia wybierzemy fundamentalne równania teorii sprężystości

$$\rho \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} \; . \tag{9.8}$$

Tu zgodnie z wyprowadzeniem wzoru (9.8) $x_i(t)$ są składowe wektora przemieszczenia punktu dowolnego w krysztale. Ponieważ interesują nas nie rzeczywiste przemieszczenia punktów, lecz ich względne przemieszczenie w stosunku do siebie, zapiszmy zamiast $x_i(t)$ w lewej części (9.8) $u_i(\vec{r},t) = x_i(t) - x_{i0}$, gdzie x_{i0} - składowe wektora, określającego położenie równowagi punktu w krysztale albo położenie punktu przed deformacją kryształu. Wtedy w przypadku małych odkształceń zupełną pochodną $x_i(t)$ względem czasu możemy zamienić, z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu cząstkową pochodną przemieszczenia $u_i(\vec{r},t)$ względem czasu

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + e_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial t} \approx \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad . \tag{9.9}$$

Uwzględniając wzór (9.9) otrzymujemy następujące równania ruchu klasycznego ośrodka sprężystego:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} = \sum_j \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \quad . \tag{9.10}$$

Biorąc pod uwagę prawo Hooke'a oraz jawną postać składowych tensora odkształcenia r_{ij} znajdujemy

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = c_{ijkl}\frac{\partial r_{kl}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}c_{ijkl}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}\right) = c_{ijkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad . \tag{9.11}$$

Po podstawieniu (9.11) do (9.10) mamy

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad . \tag{9.12}$$

Rozwiązanie układu równań (9.12) będziemy szukali w postaci fali płaskiej

$$\begin{aligned} u_i(\vec{r},t) &= A\cdot p_i \cdot \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)] \\ &= A\cdot p_i \cdot \exp[ik(\vec{m}\cdot\vec{r} - \upsilon_\varphi t)] \end{aligned} , \tag{9.13}$$

gdzie A - amplituda fali; wektor polaryzacji $\vec{p}$ określa kierunek przemieszczenia (drgań) punktu ($|\vec{p}| = 1$); $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\cdot\vec{m}$ - wektor falowy; $\omega = k\cdot\upsilon_\varphi$ - częstość kątowa; υ_φ - prędkość fazowa fali.

Wstawiając rozwiązanie (9.13) do układu równań (9.12) otrzymamy następujący układ równań algebraicznych

$$(c_{ijkl} m_j m_k - \rho \upsilon_\varphi^2 \delta_{il}) \cdot p_l = 0 \ . \tag{9.14}$$

Wprowadzając **tensor akustyczny** (tensor Christofella)

$$Q_{il} = c_{ijkl} m_j m_k \ , \tag{9.15}$$

który ma właściwość (symetrię)

$$Q_{il} = Q_{li} \ , \tag{9.16}$$

sprowadźmy układ równań (9.14) do postaci

$$(Q_{il} - \rho \upsilon_\varphi^2 \delta_{il}) \cdot p_l = 0. \tag{9.17}$$

Układ równań (9.17) jest to układ równań na wartości własne i wektory własne tensora akustycznego Q_{il}, a zatem wektory polaryzacji $\vec{p}$ fal sprężystych rozchodzących się w krysztale w kierunku określonym wektorem $\vec{m}$ są to wektory własne tensora Christofella. Układ równań (9.17) ma niezerowe rozwiązanie, gdy

$$\begin{vmatrix} Q_{11} - \rho \upsilon_\varphi^2 & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} - \rho \upsilon_\varphi^2 & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} - \rho \upsilon_\varphi^2 \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{9.18}$$

W ogólnym przypadku rozwiązując równanie (9.18) otrzymujemy trzy wartości prędkości fazowej $\upsilon_{1\varphi}$, $\upsilon_{2\varphi}$, $\upsilon_{3\varphi}$:

$$\upsilon_{j\varphi} = \sqrt{\frac{q_j}{\rho}} \ , \tag{9.19}$$

gdzie q_j są wartościami własnymi tensora akustycznego Q_{jl}.

Następnie po podstawieniu do układu równań (9.17) tych wartości prędkości fazowej znajdziemy odpowiednie trzy wektory polaryzacji $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$. A więc, w ogólnym przypadku w kierunku, określonym przez jednostkowy wektor $\vec{m}$ w krysztale mogą rozchodzić się trzy fale mające różne (ale określone) polaryzacje oraz prędkości. Najczęściej wektory $\vec{p}_i$ polaryzacji trzech fal sprężystych nie pokrywają się z wektorem $\vec{m}$ i nie są prostopadłe do niego. A więc fali sprężyste nie są ani falami podłużnymi, ani poprzecznymi. Prędkości fazowe fal sprężystych, jak wynika ze wzoru (9.19), nie zależą od częstości fali, a zatem fali sprężyste nie ulegają dyspersji.

W krysztale kierunek rozprzestrzeniania się energii fali sprężystej (kierunek **promienia** fali) określa **wektor prędkości grupowej** fali $\vec{\upsilon}_g$. W ogólnym przypadku kierunek wektora $\vec{\upsilon}_g$ nie pokrywa się z kierunkiem wektora falowego $\vec{m}$ prostopadłego do czoła fali, a kąt między wektorami $\vec{m}$ i $\vec{\upsilon}_g$ może wynosić dziesiątki stopni. Żeby znaleźć kierunek wektora $\vec{\upsilon}_g$ pomnóżmy lewą część równania (9.14) skalarne przez wektor $\vec{p}\cdot(2\pi/\lambda)^2$

$$c_{ijml}k_j k_m p_i p_l = \rho\omega^2 \ . \tag{9.20}$$

Tu uwzględniliśmy, iż $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\cdot\vec{m}$ i $\omega = k\cdot\upsilon_\varphi$.

Składowe wektora prędkości grupowej fali $\vec{\upsilon}_g$ określa wzór

$$\upsilon_{gn} = \frac{\partial\omega}{\partial k_n} \ . \tag{9.21}$$

Różniczkując wzór (9.20) względem składowych wektora $\vec{k}$ i uwzględniając (9.21) otrzymujemy

$$\upsilon_{gn} = \frac{1}{\rho\omega}\cdot c_{inml}p_i p_l k_m \ . \tag{9.22}$$

Wprowadzając tensor drugiego rzędu

$$P_{nm} = c_{inml}p_i p_l \ , \tag{9.23}$$

zapiszmy wzór (9.22) w postaci

$$\upsilon_{gn} = \frac{1}{\rho\upsilon_\varphi}\cdot P_{nk}m_k \ , \tag{9.24}$$

gdzie m_k są to składowe wektora $\vec{m} = \vec{k}/|\vec{k}|$.

Tensor P_{nk} nazywa się **drugim tensorem akustycznym** (albo drugim tensorem Christofella). Fale sprężyste dla których $\vec{\upsilon}_g \parallel \vec{m}$ nazywamy **zwyczajnym***i*. Fale sprężyste dla których kierunek wektora prędkości grupowej $\vec{\upsilon}_g$ nie pokrywa się z kierunkiem wektora $\vec{m} = \vec{k} / |\vec{k}|$ nazywamy **nadzwyczajnymi**.

Przykład 9.2. Wykażemy, ze rzut wektora prędkości grupowej fali sprężystej $\vec{\upsilon}_g$ na kierunek wektora $\vec{m}$ wynosi

$$(\vec{\upsilon}_g \cdot \vec{m}) = \upsilon_\varphi \ . \tag{9.25}$$

Pomnóżmy skalarne (9.24) przez wektor $\vec{m}$

$$\begin{aligned} \upsilon_{gn} \cdot m_n &= \frac{1}{\rho\upsilon_\varphi} \cdot m_n P_{nk} m_k \\ &= \frac{1}{\rho\upsilon_\varphi} \cdot c_{inkl} m_n m_k p_i p_l = \frac{1}{\rho\upsilon_\varphi} \cdot \rho\upsilon_\varphi^2 = \upsilon_\varphi \end{aligned} \ . \tag{9.26}$$

Tu uwzględniliśmy wzór (9.20).

Przykład 9.3. Udowodnimy, że podłużne fali sprężyste są zawsze falami zwyczajnymi i dla fal zwyczajnych $\upsilon_g = \upsilon_\varphi$.

W fale sprężystej podłużnej przemieszczenia punktów ciała odbywa się w kierunku rozprzestrzeniania się fali, czyli w fale podłużnej wektor polaryzacji $\vec{p}$ pokrywa się z wektorem $\vec{m}$. A zatem, zamieniając we wzorze (9.24) p_k przez m_k, składowe m_k przez p_k, korzystając z symetrii tensora c_{inkl} ($c_{inkl} = c_{nikl} = c_{nilk}$) i uwzględniając wzór (9.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \upsilon_{gn} &= \frac{1}{\rho\upsilon_\varphi} \cdot c_{inkl} p_i p_l m_k = \frac{1}{\rho\upsilon_\varphi} \cdot c_{nilk} m_i m_l p_k \\ &= \frac{1}{\rho\upsilon_\varphi} \cdot \rho\upsilon_\varphi^2 \delta_{nk} p_k = \upsilon_\varphi m_n \end{aligned} \ . \tag{9.27}$$

Przykład 9.4. Rozważmy fali sprężyste w kryształach układu trygonalnego (klasy $32, 3m, \bar{3}m$) rozchodzące się w kierunku osi symetrii kryształu. Macierz współczynników sztywności w tym przypadku ma postać

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 2c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_{14} & c_{66} \end{bmatrix}, \tag{9.28}$$

W tym przypadku $\vec{m} = \vec{e}_3$ i zgodnie ze wzorem (9.15) i wzorem (9.28) tensor akustyczny Christofella Q_{il} ma postać

$$\mathrm{Q}_{il} = \mathrm{c}_{i33l} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}\mathrm{c}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\mathrm{c}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{c}_{33} \end{vmatrix}. \tag{9.29}$$

Tensor (9.29) ma postać diagonalną, a zatem ma wartości główne: $q_1 = q_2 = c_{44}$, $q_3 = c_{33}$. Wartość główna $q_3 = c_{33}$ odpowiada podłużnej fali sprężystej rozchodzącej się w kierunku osi symetrii z prędkością fazową równą, zgodnie z (9.19):

$$\upsilon_{3\varphi} = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}} \,. \tag{9.30}$$

Wartościom głównym $q_1 = q_2 = \frac{1}{4}c_{44}$ odpowiada mnóstwo fał poprzecznych, których wektory polaryzacji znajdują się w płaszczyźnie prostopadłej do osi symetrii:

$$\vec{p} = \cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin\varphi \cdot \vec{e}_2 \,. \tag{9.31}$$

Tu kąt φ określa położenie wektora polaryzacji fali w płaszczyźnie prostopadłej do osi symetrii kryształu.

Zgodnie z (9.19), prędkość fazowa tych fal wynosi

$$\upsilon_{1\varphi} = \upsilon_{2\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \ . \tag{9.32}$$

Przykład 9.5. Korzystając z wyników rozwiązania zadania (9.4) wykażemy, iż wektory prędkości grupowej $\vec{\upsilon}_g$ fal poprzecznych tworzą stożek. To zjawisko w akustyce kryształów nosi nazwę **wewnętrznej refrakcji konicznej**.

Zgodnie z (9.31) i (9.23) drugi tensor akustyczny Christofella P_{il} ma dla fal poprzecznych postać

$$P_{nm} = c_{1nm1}\cos^2\varphi + c_{2nm2}\sin^2\varphi + (c_{1nm2} + c_{2nm1})\sin\varphi\cos\varphi\,. \tag{9.33}$$

Biorąc pod uwagę postać tensora c_{inml} dla kryształów układu trygonalnego otrzymujemy

$$P_{il} = \begin{vmatrix} c_{11}\cos^2\varphi + \frac{1}{4}c_{66}\sin^2\varphi & (c_{12} + \frac{1}{4}c_{66})\cos\varphi\sin\varphi & \frac{1}{2}c_{14}\sin 2\varphi \\ (c_{21} + \frac{1}{4}c_{66})\cos\varphi\sin\varphi & c_{22}\sin^2\varphi + c_{66}\cos^2\varphi & \frac{1}{2}c_{14}\cos 2\varphi \\ \frac{1}{2}c_{14}\sin 2\varphi & \frac{1}{2}c_{14}\cos 2\varphi & \frac{1}{4}c_{44} \end{vmatrix} . \tag{9.34}$$

Ze wzoru (9.24) wynika, że prędkość grupową fal poprzecznych określa wzór

$$\upsilon_{gi} = \frac{1}{\rho\upsilon_\varphi} \cdot P_{i3} \ . \tag{9.35}$$

Po podstawieniu do wzoru (9.35) P_{i3} ze wzory (9.34) i biorąc pod uwagę (9.32) otrzymujemy

$$\vec{\upsilon}_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}\left[\frac{2c_{14}}{c_{44}}(\sin 2\varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos 2\varphi \cdot \vec{e}_2) + \vec{e}_3\right]. \tag{9.36}$$

Ze wzoru (9.36) wynika, że promień każdej z poprzecznie spolaryzowanych fal tworzy kąt Ψ z kierunkiem wektora falowego $\vec{m}$

$$\psi = arc \cdot tg\frac{2c_{14}}{c_{44}} \ . \tag{9.37}$$

A więc, promienie wszystkich poprzecznie spolaryzowanych fal sprężystych (9.31) tworzą kołowy stożek.