

Wykład 8

Prawo Hooke'a

Pod działaniem naprężeń ciało stałe zmienia swój kształt. Z doświadczeń wynika, że jeżeli wielkość naprężenia jest mniejsza od pewnej wartości, zwanej **granica sprężystości**, to odkształcenie jest odwracalne i po usunięciu naprężenia ciało powraca do swego pierwotnego kształtu. Zaobserwowano dalej, że dla małych naprężeń wielkości odkształcenia są wprost proporcjonalne do wielkości przyłożonego naprężenia. Jeżeli mamy na przykład pręt rozciągany przez obciążenie tak, że naprężenie rozciągające wynosi t , to odkształcenie podłużne $r = \Delta l / l$, gdzie Δl oznacza przyrost długości pręta, a l - długość pierwotną, wynosi

$$r = s \cdot t, \quad (8.1)$$

gdzie s jest stałą i tą stałą nazywamy **współczynnikiem sprężystości** lub krótko **sprężystością**.

Doświadczalne udowodnione prawo (8.1) nosi nazwę **prawa Hooke'a**. Podkreślimy, że prawo Hooke'a jest słuszne tylko w przypadku małych naprężeń.

Wzór (8.1) możemy zapisać w inny sposób

$$t = \frac{1}{s} r \equiv c \cdot r, \quad (8.2)$$

gdzie $c = 1/s$ nazywamy **współczynnikiem sztywności** lub **sztywnością**. Z podstaw fizyki stałą c jest znana pod nazwą modułu Younga lub modułu sprężystości.

Uogólnione prawo Hooke'a stwierdza, że przyłożone do kryształu jednorodne naprężenie t_{ij} , wywołuje jednorodne odkształcenie r_{kl} takie, że każda składowa tensora odkształceń r_{kl} związana jest ze wszystkimi składowymi tensora naprężeń t_{ij} , czyli

$$r_{ij} = \sum_{k,l} s_{ijkl} \cdot t_{kl} \equiv s_{ijkl} \cdot t_{kl}. \quad (8.3)$$

Współczynniki s_{ijkl} nazywamy **współczynnikami sprężystości kryształu**.

Związki (8.3) możemy rozważać jako układ równań na składowe tensora t_{ij} . Rozwiązania tego układu równań możemy zapisać w postaci

$$t_{ij} = \sum_{k,l} c_{ijkl} \cdot r_{kl} \equiv c_{ijkl} \cdot r_{kl} . \quad (8.4)$$

Współczynniki c_{ijkl} są liniowymi funkcjami współczynników s_{ijkl} i noszą nazwę **współczynników sztywności**.

Tensor naprężeń jest tensorem drugiego rzędu dla którego

$$t_{ij} = t_{ji} , \quad (8.5)$$

a więc prawo Hooke'a (8.3) możemy zapisać w postaci

$$r_{ij} = \frac{1}{2} (s_{ijkl} + s_{ijlk}) \cdot t_{kl} . \quad (8.6)$$

Ze wzoru (8.6) wynika, że składowe s_{ijkl} oraz s_{ijlk} ($l \neq k$) zawsze występują razem, a zatem w zasadzie nie będziemy mogli przeprowadzić takiego eksperymentu, który dałby możliwość zmierzyć oddzielne składowe s_{ijkl} i s_{ijlk} ($l \neq k$). Tak więc, możemy przyjąć, że obie te składowe są sobie równe, czyli

$$s_{ijkl} = s_{ijlk} . \quad (8.7)$$

Dla składowych tensora odkształceń r_{ij} mamy również

$$r_{ij} = r_{ji} . \quad (8.8)$$

Korzystając ze wzoru (8.8) i prawa Hooke'a (8.3) możemy zapisać

$$r_{ij} - r_{ji} = (s_{ijkl} - s_{jikl}) \cdot t_{kl} = 0 ,$$

skąd również wynika, że

$$s_{ijkl} = s_{jikl} . \quad (8.9)$$

Tensor czwartego rzędu s_{ijkl} ma 81 składowych. Jednak ze względu na związki (8.7) i (8.9) pozostanie tylko 36 niezależnych składowych tensora s_{ijkl} zamiast 81. Łatwo udowodnić, że tensor c_{ijkl} ma również tylko 36 niezależnych składowych.

Symetria dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wskaźników przy s_{ijkl} i c_{ijkl} stwarza możliwość zastosowania zapisu macierzowego składowych tych tensorów. W tym celu, w

składowych s_{ijkl} i c_{ijkl} pierwsze dwa wskaźniki (ij) zastępujemy jednym przyjmującym wartości od 1 do 6 i tak samo postępujemy z dwoma ostatnimi wskaźnikami. Stosujemy przy tym następujący schemat:

Zapis wskaźników (ij) oraz (kl) tensorowy	11	22	33	23,32	31,13	12,21	(8.10)
Zapis macierzowy (m) oraz (n) dla wskaźników (ij) oraz (kl)	1	2	3	4	5	6	

jednocześnie wprowadzamy czynnik 2 albo 4 w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 s_{ijkl} &= s_{mn} , & \text{gdy } m \text{ i } n \text{ mają wartości } 1,2 \text{ lub } 3, \\
 2s_{ijkl} &= s_{mn} & \text{gdy albo } m, \text{ albo } n \text{ są równe } 4,5 \text{ lub } 6, \\
 4s_{ijkl} &= s_{mn} , & \text{gdy zarówno } m, \text{ jak i } n \text{ są równe } 4,5 \text{ lub } 6,
 \end{aligned}$$

Korzystając z reguły (8.10) dla zapisu składowych tensorów t_{kl} oraz r_{kl} , wzory (8.3) i (8.4) możemy zapisać następująco:

$$r_m = s_{mn} \cdot t_n , \quad (8.11)$$

$$t_m = c_{mn} \cdot r_n , \quad (8.12)$$

Przy pomocy zapisu macierzowego łatwo możemy wypisać współczynniki sprężystości s_{mn} i sztywności c_{mn} w postaci tabelki (6×6). Warto pamiętać, że współczynniki s_{mn} i c_{mn} , charakteryzujące się dwoma wskaźnikami nie transformują się tak jak składowe tensora drugiego rzędu.

Dla charakterystyki właściwości sprężystych kryształów często stosuje się wielkości: **moduł Younga** (E) oraz **współczynnik Poissona** (σ_{zx}). Moduł Younga charakteryzuje właściwości sprężyste ciała wzdłuż kierunku działania naprężenia. Rozważmy kryształ wycięty w kształcie cienkiego pręta (nici) i obciążony wzdłuż osi pręta. Moduł Younga definiujemy jako stosunek naprężenia działającego wzdłuż osi pręta do odkształcenia pręta wzdłuż tej

samej osi. Wybierzmy oś Oz' wzdłuż osi pręta. Wtedy zgodnie z (8.11) moduł Younga określa wzór

$$E = \frac{t_3}{r_3} = \frac{1}{s'_{3333}} \equiv \frac{1}{\alpha_{3i}\alpha_{3j}\alpha_{3k}\alpha_{3l} \cdot s_{ijkl}}, \quad (8.13)$$

gdzie $\alpha_{3i}, \alpha_{3j}, \alpha_{3k}, \alpha_{3l}$ - cosinusy kierunkowe osi Oz' w danym układzie krystalofizycznym; s_{ijkl} składowe tensora sprężystości w tym układzie.

Rozważmy teraz kryształ wycięty w kształcie prostopadłościanu i ściśnięty wzdłuż jednej ze ścian (wybierzemy kierunek działania naprężenia, czyli kierunek prostopadły do tej ściany za oś Ox). Współczynnik Poissona σ_{zx} definiujemy jako stosunek odkształcenia wzdłuż osi Oz prostopadłej do osi Ox do odkształcenia wzdłuż osi Ox . Zgodnie ze wzorem (8.11)

$$\sigma_{zx} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{s_{31}}{s_{11}}. \quad (8.14)$$

Ścisłością objętościową kryształu nazywamy względne zmniejszenie objętości kryształu podczas działania jednostkowego ciśnienia hydrostatycznego. Tensor naprężenia odpowiadający ciśnieniu hydrostatycznemu ma postać

$$t_{kl} = -p\delta_{kl}.$$

Więc odkształcenia spowodowane ciśnieniem hydrostatycznym wynoszą

$$r_{ij} = -ps_{ijkl} \cdot \delta_{kl} = -ps_{ijkk}. \quad (8.15)$$

Ponieważ rozszerzalność $\delta = \Delta V / V$ określa wzór

$$\frac{\Delta V}{V} = r_{ii} = -ps_{iikk}.$$

Stąd dla ścisłości objętościowej otrzymujemy

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} (p = -1) = s_{iikk}. \quad (8.16)$$

Ścisłością liniową nazywamy względne zmniejszenie długości kryształu w kształcie cienkiego pręta, gdy kryształ poddajemy jednostkowemu ciśnieniu hydrostatycznemu. Pod

działaniem ciśnienia hydrostatycznego p zmniejszenie długości pręta w kierunku jednostkowego wektora \vec{n} wynosi

$$r_{ij} \cdot n_i n_j = -p \cdot s_{ijkk} \cdot n_i n_j . \quad (8.17)$$

Tu uwzględniliśmy wzór (8.15).

Dla jednostkowego ciśnienia $p = -1$ ze wzoru (8.17) mamy następujący wzór na ściśliwość liniową β

$$\beta = s_{ijkk} \cdot n_i n_j . \quad (8.18)$$

Można wykazać, że praca potrzebna do wywołania odkształcenia r_{ij} jednostki objętości kryształu, którą nazywamy **energiją odkształcenia**, wynosi

$$W_{sp} = \frac{1}{2} c_{ij} r_i r_j, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) . \quad (8.19)$$

Przykład 8.1. Wykażemy, że macierz współczynników sprężystości kryształów układu regularnego ma postać

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} . \quad (8.20)$$

We wszystkich klasach układu regularnego występują cztery trzykrotne osi obrotowe, które mają kierunek typu $[111]$. Przy obrocie o kąt $2\pi/3$ wokół każdej z osi 3-krotnej następuje kolejna zamiana kierunków osi Ox_1, Ox_2, Ox_3 :

oś 3 wzdłuż kierunku $[111]$

$$x_1 \rightarrow x_2, \quad x_2 \rightarrow x_3, \quad x_3 \rightarrow x_1 , \quad (8.21a)$$

oś 3 wzdłuż kierunku $[\bar{1}\bar{1}1]$

$$x_1 \rightarrow x_2, \quad x_2 \rightarrow -x_3, \quad x_3 \rightarrow -x_1, \quad (8.21b)$$

oś 3 wzdłuż kierunku [111]

$$x_1 \rightarrow x_3, \quad x_3 \rightarrow -x_2, \quad x_2 \rightarrow -x_1, \quad (8.21c)$$

oś 3 wzdłuż kierunku [111]

$$x_1 \rightarrow -x_2, \quad x_2 \rightarrow -x_3, \quad x_3 \rightarrow -x_1, \quad (8.21d)$$

Korzystając ze wzoru (8.21a) otrzymujemy, że składowe s_{ij} przekształcają się przy obrocie układu o kąt $2\pi/3$ w następujący sposób

$$\begin{array}{llllll} s_{11} \rightarrow s_{22} & s_{12} \rightarrow s_{23} & s_{13} \rightarrow s_{21} & s_{14} \rightarrow s_{25} & s_{15} \rightarrow s_{26} & s_{16} \rightarrow s_{24} \\ & s_{22} \rightarrow s_{33} & s_{23} \rightarrow s_{31} & s_{24} \rightarrow s_{35} & s_{25} \rightarrow s_{36} & s_{26} \rightarrow s_{34} \\ & & s_{33} \rightarrow s_{11} & s_{34} \rightarrow s_{15} & s_{35} \rightarrow s_{16} & s_{36} \rightarrow s_{14} \\ & & & s_{44} \rightarrow s_{55} & s_{45} \rightarrow s_{56} & s_{46} \rightarrow s_{54} \\ & & & & s_{55} \rightarrow s_{66} & s_{56} \rightarrow s_{46} \\ & & & & & s_{66} \rightarrow s_{44} \end{array} \quad (8.22)$$

Z przekształceń (8.22) wynika, że macierz współczynników sprężystości s_{ij} musi mieć postać

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{11} & s_{12} & s_{16} & s_{14} & s_{15} \\ & & s_{11} & s_{15} & s_{16} & s_{14} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{45} \\ & & & & s_{44} & s_{45} \\ & & & & & s_{44} \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

Korzystając ze wzoru (8.21b) otrzymujemy, że składowe s_{ij} przekształcają się przy obrocie układu o kąt $2\pi/3$ dookoła drugiej 3-krotnej osi w następujący sposób

$$\begin{array}{cccccc}
s_{11} \rightarrow s_{33} & s_{12} \rightarrow s_{13} & s_{13} \rightarrow s_{23} & s_{14} \rightarrow -s_{36} & s_{15} \rightarrow s_{34} & s_{16} \rightarrow -s_{35} \\
& s_{22} \rightarrow s_{11} & s_{23} \rightarrow s_{12} & s_{24} \rightarrow -s_{16} & s_{25} \rightarrow s_{14} & s_{26} \rightarrow -s_{15} \\
& & s_{33} \rightarrow s_{22} & s_{34} \rightarrow -s_{26} & s_{35} \rightarrow s_{24} & s_{36} \rightarrow -s_{25} \\
& & & s_{44} \rightarrow s_{66} & s_{45} \rightarrow -s_{46} & s_{46} \rightarrow s_{56} \\
& & & & s_{55} \rightarrow s_{44} & s_{56} \rightarrow -s_{45} \\
& & & & & s_{66} \rightarrow s_{55}
\end{array} \quad (8.24)$$

Ze wzoru (8.24) wynika, że powinno być, na przykład, $s_{14} = -s_{36}$. Jednak, ze wzoru (8.23) mamy $s_{36} = s_{14}$, a więc $s_{14} = 0$. W podobny sposób otrzymujemy

$$s_{14} = s_{15} = s_{16} = s_{45} = 0 \quad (8.25)$$

Biorąc pod uwagę związki (8.25) ze wzoru (8.23) otrzymujemy wzór (8.20).

Przykład 8.2. Znajdziemy kierunki w kryształach układu regularnego w których moduł Younga ma wartości minimalne i maksymalne.

Zgodnie ze wzorem (8.13)

$$E^{-1} = \alpha_{3i} \alpha_{3j} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \cdot s_{ijkl} = n_i n_j n_k n_l \cdot s_{ijkl} \quad (8.26)$$

gdzie n_i - cosinusy kierunkowe wektora jednostkowego \vec{n} w danym układzie krystalofizycznym.

Dla kryształów układu regularnego tensor współczynników sprężystości określa wzór (8.20). Po podstawieniu do wzoru (8.26) niezerowych składowych tensora s_{ijkl} otrzymujemy

$$\begin{aligned}
E^{-1} &= s_{11}(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4) + (s_{44} + 2s_{12}) \cdot (n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2) \\
&= s_{11} - 2(s_{11} - s_{12} - 1/2 \cdot s_{44}) \cdot (n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2)
\end{aligned} \quad (8.27)$$

Ze wzoru (8.27) wynika, że zależność E^{-1} od \vec{n} (od kierunku w kryształach) określa funkcja

$$f = n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 \quad (8.28)$$

Znajdziemy teraz maksimum funkcji (8.28), korzystając z metody nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. Zapiszmy funkcję f w postaci

$$f = n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 \equiv n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 + \lambda(1 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) , \quad (8.29)$$

gdzie λ - mnożnik Lagrange'a.

Różniczkując (8.29) względem n_1^2 , n_2^2 oraz n_3^2 i korzystając z warunku określającego ekstremum funkcji otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial n_1^2} = n_2^2 + n_3^2 - \lambda = 0 , \quad (8.30a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_2^2} = n_1^2 + n_3^2 - \lambda = 0 , \quad (8.30b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_3^2} = n_1^2 + n_2^2 - \lambda = 0 . \quad (8.30c)$$

Z układu równań (8.30), biorąc pod uwagę, że $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, mamy

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3} ,$$

skąd

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} , \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} , \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} . \quad (8.31)$$

A zatem, w kryształach układu regularnego istnieją osiem kierunków typu [111] wzdłuż których wielkość $n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2$ ma maksymalną wartość. Uwzględniając, że dla kryształów układu regularnego $(s_{11} - s_{12} - s_{44}/2) > 0$, otrzymujemy ze wzoru (8.27), że moduł Younga E ma maksymalne wartości w kierunkach typu [111]. Minimalne wartości moduł Younga ma w kierunkach, gdy $n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 = 0$, czyli w kierunkach typu [100].

Przykład 8.3. Wykażemy, że przekrój powierzchni charakterystycznej modułu Younga płaszczyzną prostopadłą do osi 3-krotnej kryształu regularnego jest okręgiem.

Równanie powierzchni charakterystycznej modułu Younga, zgodnie z (8.27) ma postać

$$E = \frac{1}{s_{11} - 2(s_{11} - s_{12} - s_{44}/2) \cdot (n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2)} . \quad (8.32)$$

Równanie powierzchni prostopadłej do jednostkowego wektora \vec{l} możemy zapisać jako

$$(\vec{r} \cdot \vec{l}) = 0, \quad (8.33)$$

gdzie \vec{r} jest wektorem leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do wektora \vec{l} .

W kryształach układu regularnego osi 3-krotne jest skierowane wzdłuż kierunków typu [111]. Wybierzmy wektor \vec{l} wzdłuż kierunku [111]: $\vec{l} (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Podstawiając do wzoru (8.33) zamiast wektora \vec{r} wektor \vec{n} znajdujemy

$$(\vec{n} \cdot \vec{l}) = \frac{1}{\sqrt{3}} (n_1 + n_2 + n_3) = 0,$$

skąd

$$n_3 = -n_1 - n_2. \quad (8.34)$$

Ze wzoru (8.34), oraz tożsamości $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ otrzymujemy

$$n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2 = 1/2. \quad (8.35)$$

Biorąc pod uwagę te równości znajdujemy

$$n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2 - 1/4 = 1/4. \quad (8.36)$$

Po podstawieniu (8.36) do (8.32) mamy

$$E = \frac{4}{2(s_{11} + s_{12}) + s_{44}}. \quad (8.37)$$

A więc w płaszczyźnie prostopadłej do osi 3-krotnej przekrój powierzchni charakterystycznej modułu Younga jest okręgiem.