

Wykład 6

Właściwości Sprężyste Kryształów

Tensor naprężenia

Ciała stałe pod wpływem przyłożonych zewnętrznych sił ulegają określonym deformacjom, zmieniając swój kształt i objętość. Rozważmy jakiś mały element objętościowy wewnątrz ciała stałego w postaci nieskończenie małego sześcianu z krawędziami równoległymi do osi współrzędnych Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 (rys.6.1). Siły działające z zewnątrz na ten sześcian podzielimy na siły **powierzchniowe**, oraz siły **objętościowe** albo **masowe**. Siły masowe to są siły, które działają na wszystkie elementy sześcianu i są podobne, na przykład do sił grawitacyjnych. Natomiast, siły powierzchniowe to są siły, które działają na powierzchnie sześcianu z zewnątrz i są to zwykle siły które powstają przy ściskaniu (rozciąganiu), skręcaniu albo zginaniu ciała. Rozważmy najpierw siły powierzchniowe. Siły działające na trzy ściany wybranego sześcianu (rys.6.1), z zewnątrz sześcianu, możemy rozłożyć na składowe wzdłuż osi Ox_1 , Ox_2 , Ox_3

$$\vec{F}_1 = \Delta S \cdot (t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + t_{31}\vec{e}_3) , \quad (6.1a)$$

$$\vec{F}_2 = \Delta S \cdot (t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + t_{32}\vec{e}_3) , \quad (6.1b)$$

$$\vec{F}_3 = \Delta S \cdot (t_{13}\vec{e}_1 + t_{23}\vec{e}_2 + t_{33}\vec{e}_3) , \quad (6.1c)$$

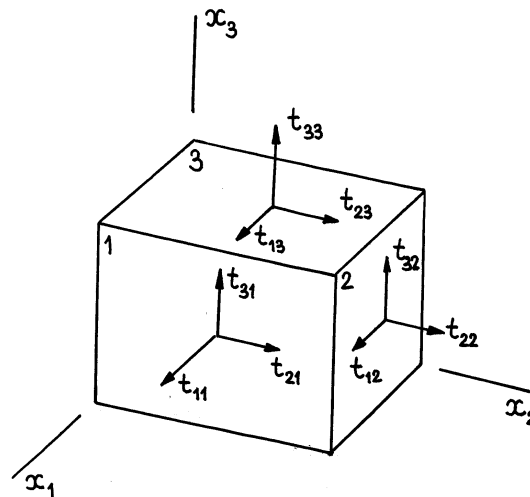
skąd dla trzech odpowiednich wektorów naprężenia \vec{P}_i (naprężeniem będziemy nazywali siłę przypadającą na jednostkę powierzchni) mamy

$$\vec{P}_i = \frac{\vec{F}_i}{\Delta S} = t_{ji}\vec{e}_j \quad (i, j = 1,2,3). \quad (6.2)$$

Tu \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 - jednostkowe wektory wzdłuż osi współrzędnych Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 ; ΔS - pole powierzchni jednej ściany sześcianu.

Ze wzorów (6.1) i (6.2) widzimy, że wielkość t_{ij} określa składową siły w kierunku osi Ox_i , działającą na tę ścianę sześcianu, która jest prostopadła do kierunku osi Ox_j . Wielkości t_{ii} określają siły **normalne**, czyli siły ściskania ($t_{ii} < 0$) lub rozciągania ($t_{ii} > 0$). Natomiast

wielkości t_{ij} ($i \neq j$) określają siły **ściania**. Zgodnie z trzecim prawem Newtona siły z którymi ściany 1, 2, 3 działają na otoczenie są równe odpowiednio siłom $|\vec{F}_1|$, $|\vec{F}_2|$, $|\vec{F}_3|$ ale mają przeciwne kierunki do tych sił.

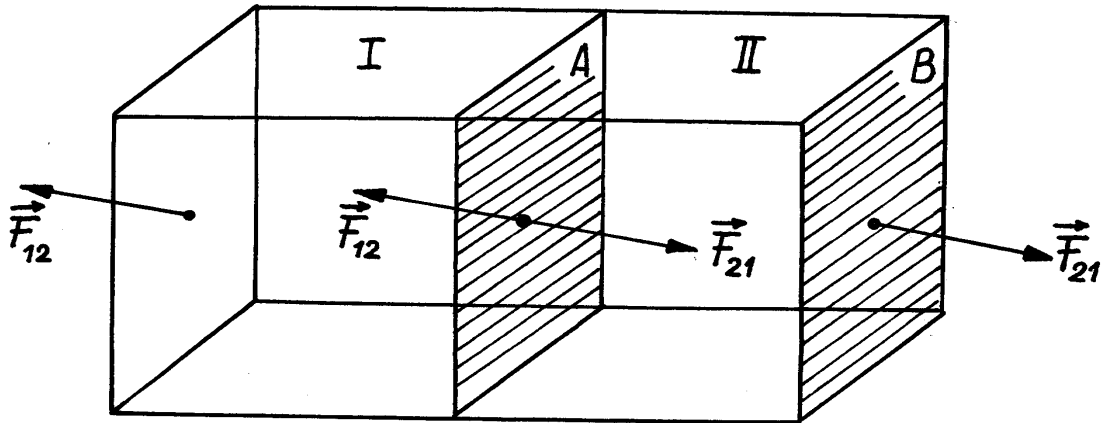


Rys.6.1. Siły działające na ścianki sześciangu

Naprężenie nazywamy **jednorodnym**, jeżeli siła działająca na powierzchnię jakiegoś elementu wewnątrz ciała o określonym kształcie i orientacji nie zależy od położenia tego elementu w ciele. Zatem, jeżeli naprężenie jest jednorodne, to siły działające na trzy ściany wybranego sześciangu, które znajdują się po stronie ujemnych kierunków osi współrzędnych i są nie uwidocznione na rys.6.1, muszą być równe co do wartości bezwzględnej siłom \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 i mieć przeciwne kierunki. Istotnie, rozważmy dwa sześciangy *I* i *II* dla których jedna ściana (*A*) jest wspólna (rys.6.2). Na ścianę *A* sześciangu *II* działa ze strony sześciangu *I* siła \vec{F}_{12} . Zgodnie z trzecim prawem Newtona ze strony sześciangu *II* działa na ścianę *A* sześciangu *I* siła $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Jednak ściana *A* sześciangu *I* jest równoważna ścianie *B* sześciangu *II* (te ściany mają ten sam kształt i orientację w ciele), a więc siła z której działa otoczenie na ścianę *B* wynosi $(-\vec{F}_{12})$.

Dla naprężenia jednorodnego więc siły działające na mały element objętościowy możemy określić za pomocą 9 wielkości t_{ij}

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$



Rys.6.2. Siły działające na styku dwu sześcianów

Składowe t_{ij} (6.3) tworzą tensor drugiego rzędu, który nosi nazwę **tensora naprężenia**. Można wykazać, że tensor naprężenia jest symetrycznym tensorem

$$t_{ij} = t_{ji}. \quad (6.4)$$

Do opisu tensora symetrycznego drugiego rzędu t_{ij} możemy użyć geometrycznego przedstawienia w postaci kwadryki, zwanej kwadryką naprężenia

$$t_{ij}x_i x_j = 1. \quad (6.5)$$

W układzie osi głównych tensora t_{ij} kwadryka naprężenia ma postać

$$t_1 x_1^2 + t_2 x_2^2 + t_3 x_3^2 = 1. \quad (6.6)$$

Składowe t_i nazywamy **naprężeniami głównymi**. Układ osi głównych tensora naprężenia posiada taką właściwość, iż na ściany ciała wycięte prostopadle do osi głównych działa tylko siła rozciągająca (albo ściskająca).

Tensor naprężenia t_{ij} ma najprostszą postać w dwóch przypadkach:

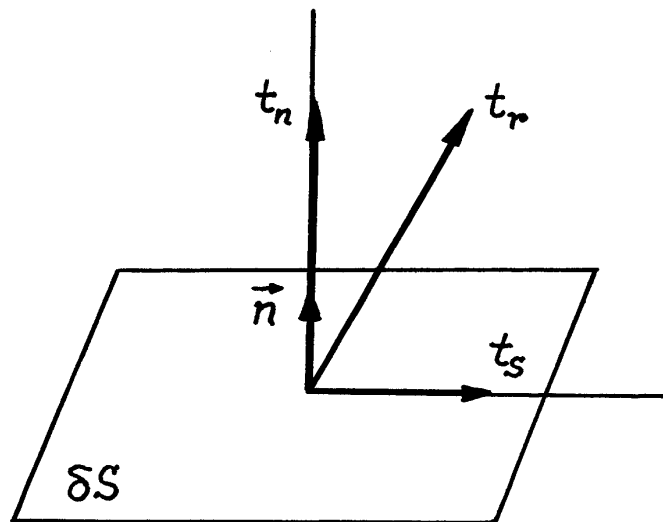
a) **naprężenie jednoosiowe rozciągające** przyłożone wzdłuż osi Ox_3

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}; \quad (6.7)$$

b) **ciśnienie hydrostatyczne** t

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Jeżeli rozważmy w ciele stałym mały element powierzchni δS , to można wykazać, że



Rys.6.3. Naprężenia działające na mały element powierzchni δS :

t_r - naprężenie wypadkowe; t_s - naprężenie styczne; t_n - naprężenie normalne

1) Naprężenie wypadkowe t_r (rys.6.3) działające na powierzchnię δS wynosi

$$t_r = \sqrt{t_{ri}^2}, \quad (6.9a)$$

gdzie

$$t_{ri} = t_{ij}n_j \quad (6.9b)$$

i n_j - składowe wektora jednostkowego normalnego do powierzchni δS .

2) Naprężenie normalne t_n (rys.6.3) działające na powierzchnię δS jest równe

$$t_n = t_{ij}n_i n_j. \quad (6.10)$$

3) Naprężenie styczne t_s (rys.III.1.3) określa wzór

$$t_s = \sqrt{t_r^2 - t_n^2}. \quad (6.11)$$

4) Maksymalne naprężenie styczne $(t_s)_{\max}$ działające w płaszczyźnie prostopadłej do \vec{n} (jednostkowy wektor \vec{n} jest równoległy do osi Ox_3) jest równe

$$(t_s)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{t_{11} - t_{22}}{2}\right)^2 + t_{12}^2}. \quad (6.12)$$

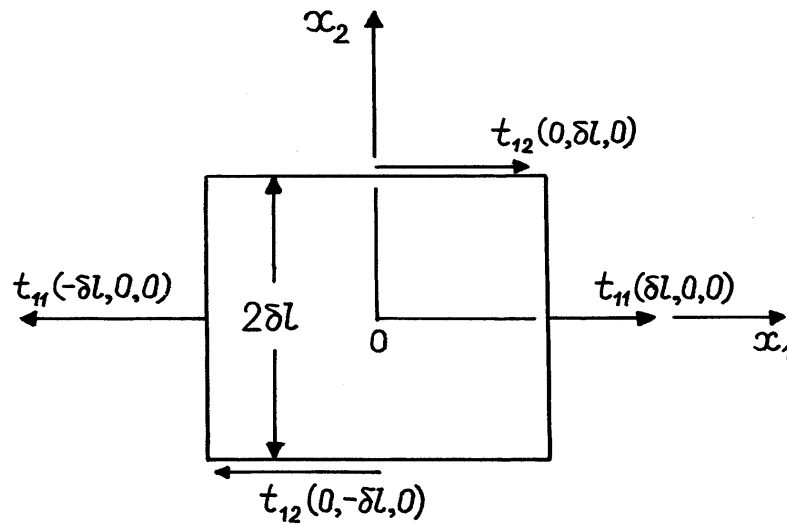
5) Naprężenie średnie określa wzór

$$t_{sr} = \frac{1}{3}(t_{11} + t_{22} + t_{33}). \quad (6.13)$$

Tensor naprężenia t_{ij} opisuje siły, które powstają wewnątrz kryształu, wskutek działania na ciało sił z zewnątrz. Wewnątrz kryształu tensor ten (kwadryka tensora) może mieć dowolną orientację, a w przypadku naprężeń niejednorodnych (patrz niżej) składowe tensora t_{ij} mogą nawet mieć różne wartości w różnych punktach ciała Tensor naprężenia więc nie opisuje wcale właściwości fizyczne kryształu, a zatem nie podlega ograniczeniom narzucanym zasadą Neumanna. Takie tensory nazywamy **tensorami pola**.

Jeżeli sześcián (rys.6.1) jest nieskończenie mały, to możemy rozważać tensor naprężenia jako funkcję $t_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ współrzędnych x_1, x_2, x_3 określających położenie środka sześciánu. W przypadku naprężeń jednorodnych, składowe tensora t_{ij} nie zależą od

położenia punktu w kryształ. Naprężenia nazywamy **niejednorodnymi** jeżeli składowe tensora naprężenia zmieniają się od punktu do punktu.



Rys.6.4. Siły działające w kierunku osi Ox_1 na ściankach prostopadłych do osi Ox_1 i Ox_2

Rozpatrzmy wewnątrz ciała, w którym występują naprężenia niejednorodne, nieskończenie mały sześcian. Niech $t_{ij}(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \equiv t_{ij}(0)$ jest tensorem naprężenia w środku sześcianu. Znajdziemy siły działające w kierunku osi Ox_1 na dwóch ściankach prostopadłych do osi Ox_1 (rys.6.4). Przypuszczając, iż długości ($2\delta l$) krawędzie sześcianu są dość małe, dla składowych $t_{11}(x_1, x_2, x_3)$ tensora naprężenia w punktach $(x_{10} + \delta l, x_{20}, x_{30})$ i $(x_{10} - \delta l, x_{20}, x_{30})$ możemy zapisać

$$t_{11}(x_{10} + \delta l, x_{20}, x_{30}) = t_{11}(0) + \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} \delta l, \quad (6.14a)$$

$$t_{11}(x_{10} - \delta l, x_{20}, x_{30}) = t_{11}(0) + \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} (-\delta l). \quad (6.14b)$$

Uwzględniając kierunki sił (rys.6.4), otrzymujemy dla wypadkowej siły działającej na ściankach prostopadłych do osi Ox_1 następujący wzór

$$(2\delta l)^2 \cdot [t_{11}(0) + \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} \delta l] - (2\delta l)^2 \cdot [t_{11}(0) - \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} \delta l] = \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} \cdot \delta V, \quad (6.15)$$

gdzie $\delta V = (2\delta l)^3$ - objętość sześcianu.

Postępując w podobny sposób znajdziemy siły wypadkowe działające w kierunku osi Ox_1 na ściankach prostopadłych do osi Ox_2 i Ox_3

$$\frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} \cdot \delta V \quad \text{i} \quad \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} \cdot \delta V. \quad (6.16)$$

Sumując (6.15) i (6.16) otrzymujemy siłę działającą na cały sześcian w kierunku osi Ox_1

$$\left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} \right) \cdot \delta V. \quad (6.17)$$

Zgodnie z drugim prawem Newtona ta siła jest związana z masą m i przyspieszeniem w kierunku osi Ox_1 sześcianu równaniem

$$\left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} \right) \cdot \delta V = m \frac{d^2 x_1}{dt^2}. \quad (6.18)$$

Oznaczając przez $\rho = m / \delta V$ - gęstość ciała, otrzymujemy równanie ruchu elementu objętościowego δV w kierunku osi Ox_1

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{d^2 x_1}{dt^2}. \quad (6.19a)$$

W podobny sposób otrzymujemy następujące równania ruchu elementu objętościowego δV w kierunku osi Ox_2 i Ox_3

$$\frac{\partial t_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x_3} = \rho \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \quad (6.19b)$$

$$\frac{\partial t_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{d^2 x_3}{dt^2}. \quad (6.19c)$$

Trzy równania (6.19) możemy zapisać w postaci jednego równania

$$\frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad (i = 1,2,3) . \quad (6.20a)$$

Jeżeli oprócz sił powierzchniowych na sześcian działają również siły masowe F_{im} , to uogólnieniem równania (6.20a) będzie równanie

$$\frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} + F_{im} = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad (i = 1,2,3) . \quad (6.20b)$$

Równania (6.20) są **fundamentalnymi równaniami teorii sprężystości**. W przypadku gdy $d^2 x_i / dt^2 = 0$, ze wzoru (6.20b) otrzymujemy równanie, które powinny spełniać składowe tensora naprężenia dla tego żeby wszystkie części ciała znajdowały się w stanie równowagi statycznej

$$\frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} + F_{im} = 0, \quad (i = 1,2,3) . \quad (6.21)$$

Równanie (6.21) nosi nazwę **równania równowagi ciała**.

Przykład 6.1. Udowodnimy, że przy odpowiednim wyborze osi współrzędnych naprężenie może być przedstawione jako suma naprężenia hydrostatycznego i naprężenia, którego wszystkie składowe przekątne równe zero (naprężenia ścinające).

Przedstawmy tensor naprężenia t_{ij} w postaci

$$t_{ij} = t \cdot \delta_{ij} + \tau_{ij} , \quad (6.22a)$$

gdzie

$$t = \frac{1}{3}(t_{11} + t_{22} + t_{33}) \quad (6.22b)$$

jest śladem tensora naprężenia t_{ij} .

Naprężenie ($t \cdot \delta_{ij}$) nosi nazwę naprężenia hydrostatycznego, ponieważ pozostaje przy transformacji osi współrzędnych niezmiennione. Tensor τ_{ij} posiada taką właściwość, że, jak wynika ze wzoru (6.22a), ślad (suma przekątnych elementów macierzy τ_{ij}) jest równa zero.

Łatwo wykazać, że ślad tensora drugiego rzędu jest niezmiennikiem (inwariantem) względem przekształceń osi współrzędnych. Skorzystamy właśnie z tej właściwości śladu tensora drugiego rzędu.

Tensor τ_{ij} podobnie do tensora t_{ij} jest tensorem symetrycznym ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$), a zatem zawsze możemy sprowadzić go do układu osi głównych

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Ponieważ ślad tensora τ_{ij} jest równy zeru, spośród głównych składowych τ_1, τ_2, τ_3 tensora τ_{ij} muszą być dodatnie i ujemnie składowe. Przypuśćmy, że $\tau_1 < 0$, a $\tau_2 > 0$. Obróćmy teraz układ osi głównych Ox_1, Ox_2, Ox_3 tensora τ_{ij} o kąt φ dookoła osi Ox_3 . Nowe składowe tensora τ'_{ij} , odniesione do osi $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 \equiv Ox_3$ znajdziemy stosując wzory

$$\tau'_{11} = \alpha_{1'1} \alpha_{1'1} \tau_1 + \alpha_{1'2} \alpha_{1'2} \tau_2 = \tau_1 \cos^2 \varphi + \tau_2 \sin^2 \varphi, \quad (6.24a)$$

$$\tau'_{22} = \alpha_{2'1} \alpha_{2'1} \tau_1 + \alpha_{2'2} \alpha_{2'2} \tau_2 = \tau_1 \sin^2 \varphi + \tau_2 \cos^2 \varphi, \quad (6.24b)$$

$$\tau'_{12} = \alpha_{1'1} \alpha_{2'1} \tau_1 + \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} \tau_2 = -\tau_1 \cos \varphi \sin \varphi + \tau_2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad (6.24c)$$

$$\tau'_{13} = \tau'_{23} = 0, \quad \tau'_{33} = \tau_3, \quad (6.24d)$$

Równania (6.24) możemy zapisać w następujący sposób

$$\tau'_{11} = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) - \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \cdot \cos 2\varphi, \quad (6.25a)$$

$$\tau'_{22} = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \cdot \cos 2\varphi, \quad (6.25b)$$

$$\tau'_{12} = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \cdot \sin 2\varphi, \quad (6.25c)$$

Ze wzoru (6.25a) widzimy, że jeżeli wybierzemy kąt φ tak, żeby było spełnione równanie

$$\cos 2\varphi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \quad (6.26)$$

to

$$\tau'_{11} = 0, \quad \tau'_{22} = \tau_1 + \tau_2, \quad \tau'_{12} = \sqrt{|\tau_1 \cdot \tau_2|} \equiv \tau. \quad (6.27)$$

Zatem po obrocie układu współrzędnych o kąt φ (6.26) tensor τ'_{ij} przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & -\tau_3 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Obróćmy teraz układ współrzędnych Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 o kąt γ dookoła osi Ox'_1 . Znow stosując wzory, określające przekształcenia składowych tensora drugiego rzędu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau''_{11} &= 0, & \tau''_{22} &= -\tau''_{33} = -\tau_3 \cos 2\gamma, \\ \tau''_{12} &= \tau \cos \gamma, & \tau''_{13} &= -\tau \sin \gamma, & \tau''_{23} &= \tau_3 \sin 2\gamma. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Ze wzorów (6.29) znajdujemy, że przy $\gamma = \pi/2$ w układzie współrzędnych $Ox''_1 = Ox'_1, Ox''_2, Ox''_3$ tensor τ''_{ij} ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau/\sqrt{2} & -\tau/\sqrt{2} \\ \tau/\sqrt{2} & 0 & \tau_3 \\ -\tau/\sqrt{2} & \tau_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Wykazaliśmy więc, że dla dowolnego naprężenia zawsze istnieje układ współrzędnych (Ox''_1, Ox''_2, Ox''_3) w którym naprężenie może być przedstawione jako suma naprężenia hydrostatycznego i naprężenia ścinającego.

Przykład 6.2. Na końcu długiego pionowo umocowanego pręta jest zawieszony ciężar. W określonym układzie współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 kierunek osi pręta ma składowe n_1, n_2, n_3 ($|\vec{n}| = 1$). Znajdziemy postać tensora naprężenia w układzie Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

Wyberzemy układ współrzędnych Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 oś Ox'_3 którego pokrywa się z kierunkiem działania pary sił, spowodowanych zawieszonym na pręcie ciężarze. W wybranym „primowanym” układzie współrzędnych tensor naprężenia t'_{ij} będzie miał postać

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Tu $(t \cdot \Delta S)$ jest siłą, która działa na pręt ze strony ciężaru (ΔS - pole powierzchni przekroju pręta).

Żeby znaleźć postać tensora naprężenia t_{ij} w układzie „nieprimowanym” Ox_1, Ox_2, Ox_3 , skorzystamy z prawa transformacji tensora drugiego rzędu

$$t_{ij} = \alpha_{3'i} \alpha_{3'j} t'_{33} \equiv \alpha_{3'i} \alpha_{3'j} \cdot t.$$

Uwzględniając, że

$$\alpha_{3'i} = (\vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_i) = (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) = n_i$$

otrzymujemy tensor naprężenia t_{ij} w układzie współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3

$$t \cdot \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$