

Wykład 5

Zasada Neumanna – Przedłużenie

Przykład 3. Wykażemy, że wielkość własności fizycznej określonej za pomocą tensora drugiego rzędu S_{ij} w dowolnym kierunku definiuje wzór

$$S_{\vec{n}} = n_i S_{ij} n_j, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5.1)$$

gdzie $S_{\vec{n}}$ - wielkość własności fizycznej w kierunku wyznaczonym przez składowe n_1, n_2, n_3 jednostkowego wektora \vec{n} ($|\vec{n}|=1$).

Rozważania oprzemy na przykładzie przewodnictwa elektrycznego, niemniej są one ważne dla wszystkich własności fizycznych określonych za pomocą tensora drugiego rzędu. Najpierw zastanowimy się bliżej co rozumiemy gdy mówimy “przewodnictwo elektryczne w określonym kierunku”. Jeżeli do kryształu zostało przyłożone pole elektryczne \vec{E} w kierunku wyznaczonym przez wektor jednostkowy \vec{n} , to w ogólnym przypadku, wektor gęstości prądu elektrycznego \vec{j} będzie miał składowe zarówno równoległe (j_{\parallel}), jak i prostopadłe (j_{\perp}) do wektora \vec{E} . Doświadczalnie mierzymy zwykle prąd w kierunku wektora \vec{E} , tj. mierzymy tylko składową j_{\parallel} . Właśnie wielkość

$$\sigma_{\vec{n}} = \frac{(\vec{j} \cdot \vec{n})}{E} \quad (5.2)$$

będziemy nazywali przewodnictwem elektrycznym w kierunku wektora \vec{n} . Znajdziemy teraz wyrażenie analityczne dla wielkości przewodnictwa w określonym kierunku.

Ponieważ składowe j_i wektora gęstości prądu są równe

$$j_i = \sigma_{ij} E_j = (\sigma_{ij} n_j) \cdot E. \quad (5.3)$$

Po podstawieniu (5.3) do (5.2) i uwzględnieniu, że $(\vec{j} \cdot \vec{n}) = j_i n_i$, otrzymujemy

$$\sigma_{\vec{n}} = n_i \sigma_{ij} n_j.$$

Przykład 4. Poglądowo obraz zmian własności fizycznej określonej za pomocą symetrycznego tensora drugiego rzędu dla wszystkich kierunków w kryształach można

przedstawić za pomocą powierzchni przedstawieniowej (charakterystycznej). Powierzchnia ta jest geometrycznym sposobem przedstawienia symetrycznego tensora drugiego rzędu, analogicznym do przedstawienia wektora za pomocą strzałki. Wykażemy, że do opisu własności fizycznej określonej tensorem symetrycznym drugiego rzędu S_{ij} możemy użyć geometrycznego przedstawienia w postaci powierzchni drugiego stopnia (elipsoidy, hiperboloidy)

$$x_i S_{ij} x_j = 1, \quad (5.4)$$

która nosi nazwę **kwadryki**. We wzorze (5.4) x_1, x_2, x_3 są to współrzędne dowolnego punktu $A(x_1, x_2, x_3)$ na powierzchni kwadryki.

W przykładzie 3 wykazaliśmy, że wielkość własności fizycznej, określonej za pomocą tensora drugiego rzędu S_{ij} w kierunku wektora jednostkowego \vec{n} , definiuje wzór (5.1). Rozważmy w kierunku wektora \vec{n} punkt $A(x_1, x_2, x_3)$ odległość którego od początku układu wynosi r . Wówczas dla współrzędnych punktu A mamy

$$x_i = r \cdot n_i. \quad (5.5)$$

Podstawiając (5.5) do (5.1) i zamieniając $S_{\vec{n}}$ przez $S_{\vec{r}}$ otrzymujemy

$$S_{\vec{r}} = \frac{1}{r^2} x_i S_{ij} x_j. \quad (5.6)$$

Ze wzoru (5.6) wynika, że jeżeli $S_{ij} = S_{ji}$ i składowe wektora \vec{r} spełniają równanie: $x_i S_{ij} x_j = 1$, to

$$S_{\vec{r}} = \frac{1}{r^2}.$$

A więc kwadryka (5.6) daje prosty geometryczny sposób przedstawienia symetrycznego tensora drugiego rzędu: promień wodzący r wyprowadzony ze środka kwadryki tensora S_{ij} do dowolnego punktu jej powierzchni jest równy odwrotności pierwiastka kwadratowego własności fizycznej mierzonej w kierunku wektora \vec{r}

$$r = \frac{1}{\sqrt{S_{\vec{r}}}} \quad (5.7)$$

Kwadryka tensora S_{ij} zawiera tyle zerowych współczynników, ile jest zerowych składowych w tensorze S_{ij} i przedstawia całkowicie wewnętrzną symetrię własności kryształu określoną symetrycznym tensorem drugiego rzędu.

Przykład 5. Dla pewnego kryształu tensor przewodnictwa elektrycznego σ_{ij} ma następujące składowe w układzie współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} m^{-1} .$$

Ten sam tensor przewodnictwa elektrycznego w układzie współrzędnych Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 ma składowe

$$[\sigma_{i'j'}] = \begin{bmatrix} 7 & -3\sqrt{3} & 0 \\ -3\sqrt{3} & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} m^{-1} .$$

Znajdziemy a) kierunki w których opór elektryczny osiąga maksymalną i minimalną wartość; b) kąty między osiami Ox_1, Ox_2, Ox_3 i osiami Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 .

a) W układzie współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 równanie kwadryki tensora σ_{ij} , zgodnie z (5.4), ma postać

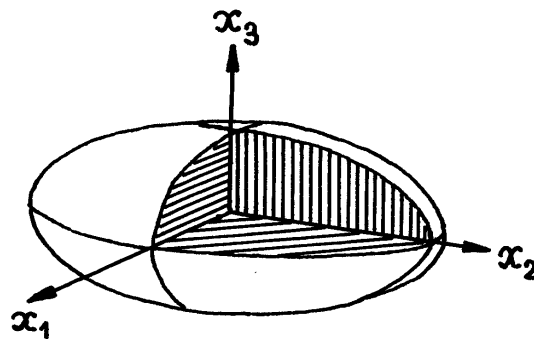
$$\sigma_{11}x_1^2 + \sigma_{22}x_2^2 + \sigma_{33}x_3^2 = 1. \quad (5.8)$$

Ponieważ $\sigma_{11} > 0$, $\sigma_{22} > 0$, $\sigma_{33} > 0$, powierzchnia (II.3.26) jest elipsoidą, a długość półosi wynosi $1/\sqrt{\sigma_{11}} = 2.5 \cdot 10^2 \Omega \cdot m$, $1/\sqrt{\sigma_{22}} = 5 \cdot 10^2 \Omega \cdot m$, $1/\sqrt{\sigma_{33}} = 1.7 \cdot 10^2 \Omega \cdot m$ (rys.5.1). Układ współrzędnych w którym równanie kwadryki przyjmuje postać kanoniczną (5.8) nosi nazwę **układu osi głównych tensora**. W tym układzie odpowiedni tensor symetryczny drugiego rzędu ma niezerowe tylko przekątne składowe. Więc układ współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 jest

układem osi głównych tensora przewodnictwa elektrycznego kryształu. W układzie osi głównych tensora σ_{ij} prawo Ohma (5.3) będzie miało następujący wygląd

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 \equiv \sigma_1 E_1, \quad j_2 = \sigma_{22}E_2 \equiv \sigma_2 E_2, \quad j_3 = \sigma_{33}E_3 \equiv \sigma_3 E_3. \quad (5.9)$$

Ze wzoru (5.9) i rys.5.1 widać, że przewodnictwo elektryczne będzie miało maksymalną wartość w kierunku najkrótszej z osi głównych, tj. w kierunku osi Ox_3 . Natomiast przewodnictwo elektryczne będzie maksymalne w kierunku osi Ox_2 , tj. w kierunku najdłuższej z osi głównych.



Rys.5.1. Kwadryka tensora σ_{ij}

Opór elektryczny ρ_{ij} , jak i przewodnictwo elektryczne, jest określony przez związek wektorów \vec{E} i \vec{j}

$$E_i = \rho_{ik} j_k. \quad (5.10)$$

Równanie (5.10) rozpisane szczegółowo ma postać

$$\begin{aligned} E_1 &= \rho_{11}j_1 + \rho_{12}j_2 + \rho_{13}j_3, \\ E_2 &= \rho_{21}j_1 + \rho_{22}j_2 + \rho_{23}j_3, \\ E_3 &= \rho_{31}j_1 + \rho_{32}j_2 + \rho_{33}j_3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Z porównania (5.9) i (5.11) znajdziemy, że

$$\rho_{11} = 1/\sigma_1; \quad \rho_{22} = 1/\sigma_2; \quad \rho_{33} = 1/\sigma_3; \quad \rho_{ij} = 0, \quad (i \neq j), \quad (5.12)$$

czyli

$$\rho_1 \equiv \rho_{11} = 6 \cdot 10^4 \Omega \cdot m, \quad \rho_2 \equiv \rho_{22} = 25 \cdot 10^4 \Omega \cdot m, \quad \rho_3 \equiv \rho_{33} = 3 \cdot 10^4 \Omega \cdot m.$$

Więc opór elektryczny będzie maksymalny w kierunku osi Ox_2 i będzie minimalny w kierunku osi Ox_3 .

b) Korzystając ze związków między składowymi tensora przewodnictwa elektrycznego w układach Ox_1, Ox_2, Ox_3 i Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{1'3'} &= \alpha_{1'1} \alpha_{3'1} \sigma_1 + \alpha_{1'2} \alpha_{3'2} \sigma_2 + \alpha_{1'3} \alpha_{3'3} \sigma_3 = 0, \\ \sigma_{2'3'} &= \alpha_{2'1} \alpha_{3'1} \sigma_1 + \alpha_{2'2} \alpha_{3'2} \sigma_2 + \alpha_{2'3} \alpha_{3'3} \sigma_3 = 0, \\ \sigma_{3'3'} &= \alpha_{3'1} \alpha_{3'1} \sigma_1 + \alpha_{3'2} \alpha_{3'2} \sigma_2 + \alpha_{3'3} \alpha_{3'3} \sigma_3 = \sigma_3. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Korzystając z określenia składowych macierzy $\alpha_{i'k}$

$$\alpha_{i'k} = (\vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}_k)$$

gdzie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - baza układu współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 , a $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ - baza układu współrzędnych Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 , zapiszmy równania (5.13) w postaci

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 \cdot (\alpha_{3'1} \sigma_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{3'2} \sigma_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_{3'3} \sigma_3 \cdot \vec{e}_3) &= 0, \\ \vec{e}'_2 \cdot (\alpha_{3'1} \sigma_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{3'2} \sigma_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_{3'3} \sigma_3 \cdot \vec{e}_3) &= 0, \\ \vec{e}'_3 \cdot (\alpha_{3'1} \sigma_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{3'2} \sigma_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_{3'3} \sigma_3 \cdot \vec{e}_3) &= \sigma_3. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ze wzorów (5.14) wynika, że wektor

$$\alpha_{3'1} \sigma_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{3'2} \sigma_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_{3'3} \sigma_3 \cdot \vec{e}_3 = \sigma_3 \cdot \vec{e}'_3 \quad (5.15)$$

jest równoległy do jednostkowego wektora \vec{e}'_3 . Mnożąc (5.15) skalarnie przez wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i uwzględniając, że $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \delta_{ij}$, znajdujemy

$$\alpha_{3'1} \sigma_1 = \alpha_{3'1} \sigma_3, \quad \alpha_{3'2} \sigma_2 = \alpha_{3'2} \sigma_3, \quad \alpha_{3'3} \sigma_3 = \alpha_{3'3} \sigma_3. \quad (5.16)$$

Stąd, uwzględniając, że $\sigma_1 \neq \sigma_3$, $\sigma_2 \neq \sigma_3$ mamy

$$\alpha_{3'1} = \alpha_{3'2} = 0, \quad \alpha_{3'3} = 1. \quad (5.17)$$

Ze wzoru (5.17) wynika, że oś Ox_3' jest równoległa do osi Ox_3 .

Biorąc pod uwagę (5.17) i znów korzystając z reguły przekształcenia składowych tensora drugiego rzędu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{1'1'} &= \alpha_{1'1}^2 \sigma_1 + \alpha_{1'2}^2 \sigma_2, \\ \sigma_{1'2'} &= \alpha_{1'1} \alpha_{2'1} \sigma_1 + \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} \sigma_2, \\ \sigma_{2'2'} &= \alpha_{2'1}^2 \sigma_1 + \alpha_{2'2}^2 \sigma_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dla macierzy transformacji $\alpha_{i'k}$ są słuszne związki

$$\alpha_{1'1}^2 + \alpha_{1'2}^2 = 1, \quad \alpha_{1'1} \alpha_{2'1} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} = 0, \quad \alpha_{2'1}^2 + \alpha_{2'2}^2 = 1. \quad (5.19)$$

Uwzględniając (5.19) ze wzorów (5.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} &= -\alpha_{1'1} \alpha_{2'1} = \frac{\sigma_{1'2'}}{\sigma_2 - \sigma_1}, \\ \alpha_{1'2}^2 &= (1 - \alpha_{1'1}^2) = \frac{\sigma_{1'1'} - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}, \\ \alpha_{2'2}^2 &= (1 - \alpha_{2'1}^2) = \frac{\sigma_{2'2'} - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}. \end{aligned}$$

Skąd mamy

$$\alpha_{1'2} = -\alpha_{2'1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_{2'2} = \alpha_{1'1} = \frac{1}{2}. \quad (5.20)$$

Więc osie Ox_1, Ox_2, Ox_3 tworzą z osiami Ox_1', Ox_2', Ox_3' kąty

$$\angle x_1' Ox_1 = \angle x_2' Ox_2 = 60^\circ, \quad \angle x_2' Ox_1 = 30^\circ, \quad \angle x_3' Ox_3 = 0^\circ.$$

Przykład 6. Udowodnimy, że jeżeli $p_i = S_{ij}q_j$, to kierunek wektora \vec{p} jest taki jak kierunek normalnej wystawionej do powierzchni kwadryki tensora S_{ij} w końcu promienia wodzącego równoległego do wektora \vec{q} (rys. 5.2).

Niech w układzie osi głównych tensora S_{ij} kierunek wektora \vec{q} określa jednostkowy wektor $\vec{n} = \vec{q}/|\vec{q}|$. Wtedy, w tym układzie wektor \vec{p} ma składowe

$$p_1 = qS_1n_1, \quad p_2 = qS_2n_2, \quad p_3 = qS_3n_3. \quad (5.21)$$

Rozważmy punkt $A(x_1, x_2, x_3)$ leżący na powierzchni kwadryki tensora S_{ij} w kierunku wektora \vec{q} (rys.5.2). Współrzędne punktu $A(x_1, x_2, x_3)$ możemy zapisać w postaci

$$x_1 = r \cdot n_1, \quad x_2 = r \cdot n_2, \quad x_3 = r \cdot n_3. \quad (5.22)$$

Oznaczmy przez \vec{R} wektor określający położenie dowolnego punktu na płaszczyźnie stycznej do elipsoidy w punkcie $A(x_1, x_2, x_3)$, a przez \vec{N} - wektor prostopadły do tej płaszczyzny (rys.5.2). Wtedy równanie płaszczyzny stycznej możemy zapisać w postaci

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \vec{N} = 0, \quad (5.23)$$

albo

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(X_1 - x_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(X_2 - x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(X_3 - x_3) = 0, \quad (5.24)$$

gdzie

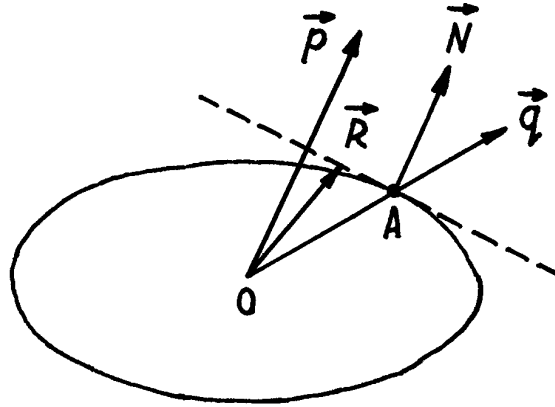
$$F(x_1, x_2, x_3) = S_1x_1^2 + S_2x_2^2 + S_3x_3^2 - 1 = 0 \quad (5.25)$$

jest równaniem elipsoidy (kwadryki tensora S_{ij}), a X_i ($i=1,2,3$) są składowymi wektora \vec{R} w układzie głównych osi tensora S_{ij} .

Różniczkując (5.25) względem x_1, x_2, x_3 znajdziemy

$$T_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2S_1 \cdot x_1, \quad T_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2S_2 \cdot x_2, \quad T_3 = \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2S_3 \cdot x_3. \quad (5.26)$$

Pochodne cząstkowe $\partial F/\partial x_1$, $\partial F/\partial x_2$, $\partial F/\partial x_3$ są składowymi wektora \vec{T} równoległego do wektora \vec{N} . (To twierdzenie jest oczywiste przy $S_1 = S_2 = S_3 = S$, ponieważ wtedy kwadryka tensora S_{ij} jest kulą, a wektor $\vec{T} = 2S \cdot \vec{r}$).



Rys. 5.2. Określenie kierunku wektora \vec{p} za pomocą kwadryki tensora S_{ij}

Uwzględniając (5.26) i (5.21) otrzymujemy

$$T_i = 2S_i r \cdot n_i = 2 \frac{r}{q} p_i . \quad (5.27)$$

Ze wzoru (5.27) wynika, że wektor \vec{T} ma ten sam kierunek co wektor \vec{p} , a zatem, ponieważ wektor \vec{T} jest równoległy do wektora \vec{N} , normalna w punkcie $A(x_1, x_2, x_3)$ jest równoległa do wektora \vec{p} .