

Wykład 2

Grupy Przestrzenne

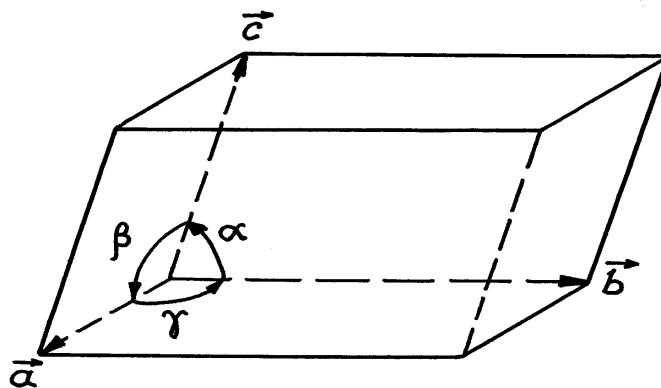
Komórka elementarna. Sieci Bravais'go

Doskonały kryształ składa się z atomów uporządkowanych w sieci krystalicznej opisanej przez trzy podstawowe wektory translacji \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , tak że układ atomów pozostaje nie zmieniony bez względu na to, czy „obserwujemy” go z punktu określonego wektorem \vec{r} , czy z punktu określonego wektorem \vec{r}'

$$\vec{r}' = \vec{r} + n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}, \quad (2.1)$$

gdzie n_1, n_2, n_3 są dowolnymi liczbami całkowitymi: $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Wektor $\vec{t} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$ nosi nazwę **wektora translacji** kryształu, a właściwość sieci krystalicznej pokrywać się z sobą przy przekształceniach translacji nazywamy **translacyjną symetrią** kryształów. Wektory translacji \vec{t} tworzą grupę, która nosi nazwę **grupy translacyjnej**.



Rys. 2.1. Komórka elementarna

Zbiór punktów położenie których jest określono zależnością (2.1) dla wszystkich wartości liczb n_1, n_2, n_3 definiuje **sieć krystaliczną**. Sieć krystaliczna jest regularnym i

okresowym układem punktów (węzłów sieci) w przestrzeni. Sieć krystaliczna jest abstrakcją matematyczną. Z rzeczywistą strukturą krystaliczną mamy do czynienia wtedy, gdy baza atomów jest przyporządkowana jednoznacznie do każdego węzła sieci. Baza ma zawsze dla każdego węzła sieci ten sam skład chemiczny, układ i orientację.

Równoległoscian opisany przez podstawowe wektory translacji \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} nazywamy **komórką elementarną** (rys.2.1). W 1850 roku August Bravais udowodnił, że symetria translacyjna kryształów, oraz symetria grup punktowych morfologii kryształów wymagają istnienie tylko 14 różnych sieci krystalicznych i odpowiednio 14 typów komórek elementarnych (tablica 2.1).

Tablica 2..1. Czternaście rodzajów sieci Bravais'go

Układ krystalograficzny	Liczba sieci w układzie	Symbole sieci	Parametry komórki elementarnej
<i>Trójskośny</i>	1	P	$a \neq b \neq c \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma$
<i>Jednoskośny</i>	2	P, C	$a \neq b \neq c \quad \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$
<i>Rombowy</i>	4	P, C, I, F	$a \neq b \neq c \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
<i>Tetragonalny</i>	2	P, I	$a = b \neq c \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
<i>Regularny</i>	3	P, I, F	$a = b = c \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
<i>Heksagonalny</i>	1	P	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ \quad \gamma = 120^\circ$
<i>Trygonalny</i>	1	P	

Wyróżnia się proste (symbol P) (prymitywne), centrowane w podstawie (symbol C), centrowane przestrzennie (symbol I) i płasko centrowane (symbol F) sieci Bravais'go. Jeżeli węzły sieci krystalicznej znajdują się tylko w wierzchołkach komórki elementarnej, to sieć jest prosta. Jeżeli oprócz tego węzły znajdują się w środkach podstaw komórki elementarnej, to sieć nazywa się centrowaną w podstawie. Jeżeli oprócz wierzchołków węzeł znajduje się w miejscu przecięcia się przestrzennych przekątnych komórki elementarnej - sieć nazywa się centrowaną przestrzennie, a jeżeli w środkach wszystkich ścian, to sieć nosi nazwę płasko centrowanej.

Przestrzenne elementy symetrii

W budowie wewnętrznej kryształów oprócz translacji i elementów symetrii (1.1) występujących w morfologii kryształów pojawiają się dodatkowe elementy symetrii - **osie śrubowe** i **płaszczyzny ślizgowe**.

1.**Osie śrubowe** powstają w wyniku sprzężenia translacji z osiami symetrii. Przekształcenie symetryczne względem osi śrubowej składa się z dwu kolejnych po sobie

operacji geometrycznych : obrotu dookoła osi i translacji równoległej do tej osi. Symbol osi śrubowej zawiera symbol krotności osi symetrii oraz indeks, który wskazuje o jaką wartość okresu translacyjnego dokonuje się translacja. Na przykład przekształcenie względem osi śrubowej 4_2 składa się z obrotu o kąt 90° wokół prostej określającej kierunek osi i translacji o $(2/4) \cdot t = t/2$ wzdłuż tej osi (tu t – wartość wektora translacji sieci wzdłuż osi symetrii). Rozróżnia się osie śrubowe prawe i lewe. Dla osi śrubowej prawej obrót wokół osi jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówki zegara, natomiast dla osi śrubowej lewej obrót dookoła osi wykonujemy w kierunku przeciwnym. Można wykazać, że dla każdej osi śrubowej prawej istnieje równoważna do niej oś śrubowa lewa, a więc przy określeniu symetrii wewnętrznej budowy kryształów możemy stosować tylko osie śrubowe prawe, albo osie śrubowe lewe.

2. **Płaszczyzny ślizgowe** powstają w wyniku sprzężenia płaszczyzny symetrii oraz translacji. Przekształcenie symetryczne względem płaszczyzny ślizgowej składa się z dwu kolejnych po sobie operacji: odbicie względem płaszczyzny i translacji w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny symetrii. Ze względu na kierunek i wartość translacji rozróżnia się trzy rodzaje płaszczyzn ślizgowych: **płaszczyzny ślizgowe osiowe** (symbole - a , b albo c) - wektor translacji wynosi $1/2$ jednego z wektorów translacji \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ; **płaszczyzny ślizgowe diagonalne** (symbol - n) - wektor translacji jest równy sumie dwóch wektorów z trójki: $\vec{a}/2$, $\vec{b}/2$, $\vec{c}/2$; **płaszczyzny ślizgowe diamentowe** (symbol - d) - wektor translacji jest sumą dwóch albo trzech wektorów z trójki: $\vec{a}/4$, $\vec{b}/4$, $\vec{c}/4$.

Przestrzenne przekształcenia symetryczne można przedstawić również w sposób analityczny, biorąc pod uwagę, że osie śrubowe i płaszczyzny ślizgowe powstają w wyniku sprzężenia translacji z elementami symetrii grup punktowych: osiami i płaszczyznami symetrii. W ogólnym przypadku przestrzenne przekształcenia symetryczne można zapisać w postaci

$$t_i + \sum_j \alpha_{ij} x_j = x'_i \quad (2.2)$$

Tu $\alpha_{ij} \equiv \alpha_{i/j}$ są elementami reprezentacji macierzowej punktowego elementu symetrii, a t_i , ($i=1,2,3$) są ułamkowymi ($1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$, $3/4$, $1/6$, $5/6$) składowymi wektora translacji \vec{t} . Ze wzoru (2.2) wynika, że każde przestrzenne przekształcenie symetryczne może być przedstawiono za pomocą odpowiedniej czterowymiarowej macierzy symetrii $[b_{\alpha\beta}]$, $\alpha, \beta = 1,2,3,4$.

$$[b_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & t_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & t_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Macierz $[b_{\alpha\beta}]$ nazywamy **reprezentacją macierzową przestrzennego elementu symetrii**.

Grupy przestrzenne

Podobnie do punktowych grup symetrii różne dopuszczalne kombinacje elementów symetrii punktowych grup i nowych elementów symetrii (translacji, osie śrubowe, płaszczyzny ślizgowe) tworzą **grupy przestrzenne**, które określają symetrię wewnętrznej budowy ciał krystalicznych. Analizę grup przestrzennych przeprowadzili niezależnie od siebie Artur Schoenflies i Jewgraf Fiodorow w latach 1890 - 1894, stwierdzając, że jest ich 230.

Tablica 2.2. Reguły zapisu symbolu grupy przestrzennej

Układ Krystalograficzny	Położenie w symbole			
	1	2	3	4
Trójskośny	Rodzaj sieci Bra- vais'go	Obecny element Symetrii	–	–
Jednoskośny		Oś 2 albo inwersyjna oś 2 - krotna, oraz m $\perp 2$	–	–
Rombowy		Płaszczyzna prostopadła albo oś równoległa do		
Regularny		osi	osi	Osi
Tetragonalny		Oś symetrii lub m	3	Przekątna m albo oś
<i>Heksagonalny</i> <i>i trygonalny</i>		Oś symetrii charakterystyczna dla układu	Oś symetrii lub płaszczyzna symetrii	Przekątna oś albo m

Przestrzenną grupę charakteryzuje nie tylko zbiór wszystkich możliwych elementów symetrii grupy, lecz również liczba punktów symetrycznie równoważnych w komórce elementarnej. Zespołem punktów (pozycji) równoważnych nazywamy zbiór punktów w komórce elementarnej położenia których są związane między sobą występującymi w komórce elementami symetrii. Rozróżniają **pozycję ogólną** i **szczególną**. Punkt nie leżący na żadnym z

elementów symetrii ma pozycję ogólną. Punkt taki, przekształcony symetrycznie względem występujących w komórce elementów symetrii daje ogólny zespół pozycji równoważnych. Jeżeli punkt leży na elemencie symetrii, to ma on pozycję szczególną, a zespół równoważnych punktów nosi nazwę zespołu pozycji szczególnych. Reguły zapisu symbolu grupy przestrzennej podano w tablicy 2.2.

Jeżeli w symbole grupy przestrzennej każdą oś śrubową zamienić na właściwą oś symetrii a każdą płaszczyznę ślizgową zamienić na płaszczyznę symetrii, to pomijając symbol komórki elementarnej Bravais’go otrzymuje się zawsze symbol odpowiedniej grupy punktowej kryształu.

Oznaczenie płaszczyzn i kierunków w kryształach

Do oznaczenia płaszczyzn i kierunków w kryształach został obecnie ogólnie przyjęty układ **wskaźników Millera**. W celu określenia wskaźników Millera płaszczyzny należy :

1. znaleźć punkty, w których płaszczyzna przecina osie a , b , c pokrywające się z trzema krawędziami elementarnej komórki krystalicznej;
2. wyrazić odcinki w odpowiednich jednostkach stałych sieci;
3. odwrotność powyższych liczb sprowadzić do najmniejszych trzech liczb całkowitych mających wspólny mianownik;
4. wynik należy podać w nawiasach (hkl) .

Wskaźniki kierunkowe w kryształach stanowią zbiór najmniejszych liczb u , v , w , które mają się do siebie tak, jak rzuty wektora równoległego do danego kierunku na osie współrzędnych OX , OY , OZ układu krystalograficznego. Wielkości rzutów wektora na osie współrzędnych powinny być wyrażone w odpowiednich jednostkach elementarnych translacji a , b , c . Wskaźniki te zapisuje się w nawiasach kwadratowych $[uvw]$; znaki stosunku między wskaźnikami nie stawia się. Ujemna wartość wskaźnika jest oznaczona za pomocą znaku minus, umieszczonego nad wskaźnikiem. Kierunek $[uvw]$ w kryształach jest określony więc przy pomocy wektora

$$\vec{F} = au\vec{e}_x + bv\vec{e}_y + cw\vec{e}_z, \quad (2.4)$$

gdzie a , b , c są wartości bezwzględne podstawowych wektorów translacji \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , a \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z są jednostkowe wektory (baza) układu krystalograficznego ($OX \parallel \vec{a}$, $OY \parallel \vec{b}$, $OZ \parallel \vec{c}$)

W układach heksagonalnym i trygonalnym symbole kierunkowe i płaszczyzny zawierają cztery wskaźniki.

Reguły wyboru osi współrzędnych układu krystalofizycznego

Osie OX , OY , OZ układu krystalograficznego są wzajemnie prostopadłe tylko dla układów rombowego, tetragonalnego i regularnego. Więc tylko dla tych układów krystalograficznych układ współrzędnych jest układem kartezjańskim. Ponieważ wybór kartezjańskiego układu współrzędnych znacznie ułatwia obliczenia matematyczne, w fizyce kryształów przy analizie anizotropii właściwości fizycznych stosują tylko układy kartezjańskie, nazywanych czasem układami krystalofizycznymi. Reguły wyboru osi układów współrzędnych krystalofizycznych podano w tablicy 2.3.

Tablica 2.3. Reguły wyboru osie układu krystalofizycznego

Układ Krystalograficzny	Kierunki osi współrzędnych		
	Ox_1	Ox_2	Ox_3
<i>Trójskośny</i>	[001]	W płaszczyźnie prostopadłej do [001]	
<i>Jednoskośny</i>	[001]	[010]	W płaszczyźnie (100)
<i>Rombowy</i>	[001]	[010]	[100]
<i>Tetragonalny</i>	[001]	[010]	[100]
<i>Regularny</i>	[001]	[010]	[100]
<i>Heksagonalny i tetragonalny</i>	[0001]	$[01\bar{1}0]$	$[\bar{2}\bar{1}10]$

W kryształach układu trygonalnego i heksagonalnego stosują cztery osi krystalograficzne. Dlatego symbole Millera tych kryształów są czterocyfrowe. Trzecia liczba w symbolu, odnosząca się do osi OU , jest zawsze równa sumie dwóch pierwszych ze znakiem przeciwnym.

Podstawowe pojęcia i zasady fizyki kryształów

Skalary i wektory.

Własności fizyczne kryształów zawsze określamy przez związki między mierzalnymi doświadczalne wielkościami. Na przykład gęstość kryształu ρ określana jest przez związek między masą m i objętością V kryształu w następujący sposób

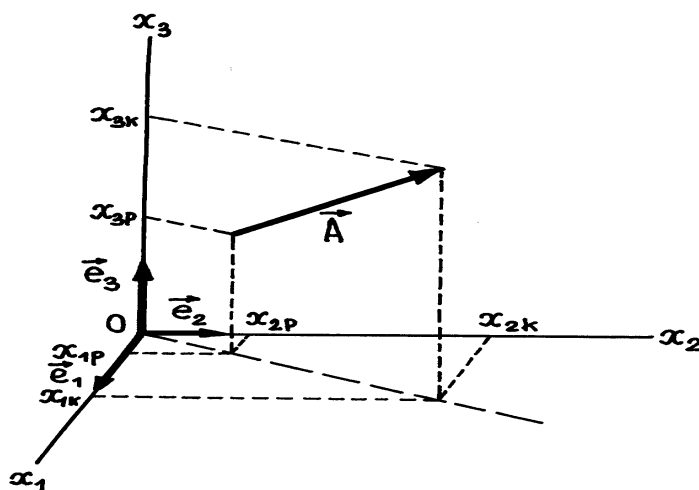
$$m = \rho \cdot V \quad (2.5)$$

Zarówno masę, jak i objętość kryształu możemy mierzyć nie biorąc pod uwagę orientacji kryształu w przestrzeni, ponieważ masa i objętość dowolnego ciała materialnego nie zależą od orientacji ciała w przestrzeni. Nie zależy od orientacji kryształu również temperatura T ciała w stanie równowagi termicznej. Definiując gęstość czy temperaturę kryształu nie ma sensu mówić o pomiarze tych wielkości w jakimś szczególnym kierunku. Takie “bezkierunkowe” wielkości fizyczne nazywamy **skalarami**. Wartość skalarną określa w zupełności pojedyncza liczba.

Oprócz skalarów, własności fizyczne kryształów określają również inne wielkości fizyczne zwane **wektorami**. Przykładem wektora, który definiuje własność fizyczną kryształów jest wektor współczynników piroelektrycznych \vec{p} . Piroelektrykami nazywamy dielektryki, które są spolaryzowane nawet w przypadku gdy na kryształ nie działa zewnętrzne pole elektryczne. Zmiana temperatury kryształu powoduje zmianę wielkości i kierunku wektora polaryzacji \vec{P} , przy tym zmianę składowych wektora polaryzacji \vec{P} opisuje wzór

$$\Delta\vec{P} = \vec{p} \cdot \Delta T . \quad (2.6)$$

Tu własność fizyczna - piroelektryczność, którą opisuje wektor \vec{p} , zdefiniowana jest, jako związek między dwiema mierzalnymi wielkościami: temperaturą T (skalar) i polaryzacją \vec{P} (wektor).



Rys.2.2. Określenie położenia wektora \vec{A} .

Pojęcie wektora jest dobrze znane, nawet ze szkoły średniej. Żeby całkowicie określić wektor, musimy podać zarówno jego wielkość, jak i kierunek. Wektor wygodnie jest przedstawić przy pomocy strzałki o określonej długości i określonym kierunku (rys.2.2). Dowolny wektor \vec{A} możemy również określić przez składowe wektora a_1, a_2, a_3 wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych osi współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 (rys.2.2)

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) .$$

Wprowadzając jednostkowe wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ wzdłuż osi Ox_1, Ox_2, Ox_3 i wybierając początek układu O (trzy jednostkowe wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ + początek układu O nazywamy bazą układu współrzędnych) i korzystając z reguły dodawania wektorów, wektor \vec{A} możemy również zapisać w postaci

$$\vec{A} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 . \quad (2.7)$$

Tu $a_1 = x_{1k} - x_{1p}, a_2 = x_{2k} - x_{2p}, a_3 = x_{3k} - x_{3p}; (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$ i (x_{1p}, x_{2p}, x_{3p}) są współrzędne wektorów wodzących odpowiednio punktu końcowego i punktu początkowego wektora A (rys.2.2). Wektorom wodzącym punktu nazywamy wektor początek którego pokrywa się z początkiem O układu współrzędnych. Z określenia pojęcia wektora wynika, że dla wszystkich wektorów, które mają taką samą wielkość, jak i kierunek, współrzędne a_i ($i=1,2,3$) we wzorze (2.7) będą takie same.

Rozpatrzmy teraz transformację składowych dowolnego wektora \vec{b} przy przejściu od jednego układu kartezjańskiego Ox_1, Ox_2, Ox_3 do drugiego układu kartezjańskiego Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 , zakładając, iż układy mają ten sam początek. Niech $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ będą jednostkowymi wektorami wzdłuż osi Ox_1, Ox_2, Ox_3 , a $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ są jednostkowymi wektorami wzdłuż osi Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 . Oznaczmy przez $\alpha_{i/k}$ iloczyn skalarny wektorów \vec{e}'_i i \vec{e}_k

$$\alpha_{i/k} \equiv \alpha_{ki'} = (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_k) = \cos \angle \vec{e}'_i \vec{e}_k , \quad (2.8)$$

gdzie przez $\angle \vec{e}'_i \vec{e}_k$ oznaczyliśmy kąt między jednostkowym wektorem \vec{e}'_i „nowego” układu współrzędnych i jednostkowym wektorem \vec{e}_k „starego” układu współrzędnych. Składowe

macierzy przekształcenia $\alpha_{i/k}$ są określone jednoznacznie przez wybrane bazy $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

Założmy teraz, że wektor \vec{b} ma składowe b_1, b_2, b_3 , względem osi Ox_1, Ox_2, Ox_3 i składowe b'_1, b'_2, b'_3 , względem osi Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 . Zgodnie z (2.7), wektor \vec{b} możemy zapisać w postaci

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3, \quad (2.9)$$

$$\vec{b} = b'_1 \vec{e}'_1 + b'_2 \vec{e}'_2 + b'_3 \vec{e}'_3. \quad (2.10)$$

Mnożąc (2.9) skalarnie przez $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ i uwzględniając (2.8), oraz że

$$b'_1 = (\vec{e}'_1 \cdot \vec{b}), \quad b'_2 = (\vec{e}'_2 \cdot \vec{b}), \quad b'_3 = (\vec{e}'_3 \cdot \vec{b}), \quad (2.11)$$

znajdujemy

$$b'_1 = \alpha_{1/1} b_1 + \alpha_{1/2} b_2 + \alpha_{1/3} b_3,$$

$$b'_2 = \alpha_{2/1} b_1 + \alpha_{2/2} b_2 + \alpha_{2/3} b_3,$$

$$b'_3 = \alpha_{3/1} b_1 + \alpha_{3/2} b_2 + \alpha_{3/3} b_3,$$

co można zapisać również jako

$$b'_i = \sum_{k=1,2,3} \alpha_{i/k} b_k. \quad (2.12a)$$

Powtarzając rozumowanie dla (2.10) otrzymujemy

$$b_i = \sum_{k=1,2,3} \alpha_{ik'} b'_k. \quad (2.12b)$$

Łatwo wykazać, że dla macierzy przekształcenia $\alpha_{ik'}$ są słuszne związki

$$\alpha_{ik'} \alpha_{k'j} = \delta_{ij}, \quad \alpha_{ki'} \alpha_{j'k} = \delta_{i'j'}. \quad (2.13)$$

Gdzie δ_{ij} i $\delta_{i'j'}$ są symbolami Kroneckera.

Oprócz wektorów, które transformują się zgodnie z równaniami (2.12), w fizyce występują wielkości podobne do nich, ale nie spełniające równań (2.12). Takie wielkości nazywamy **pseudowektorami** (albo wektorami **osiowymi**). Przykładami pseudowektorów w fizyce są: indukcja pola magnetycznego \vec{B} , namagnesowanie \vec{M} , moment pędu \vec{J} , spin \vec{S} . Zwykle wektory, które transformują się zgodnie z równaniami (2.12), nazywamy **polarnymi** albo **biegunowymi**.

Pojęcie pseudowektora łatwo zrozumieć rozpatrując transformację składowych iloczynu wektorowego $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ dwóch polarnych wektorów \vec{a} i \vec{b} . Z określenia iloczynu wektorowego wynika, że wektor $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ ma składowe

$$c_1 = [\vec{a} \times \vec{b}]_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad (2.14a)$$

$$c_2 = [\vec{a} \times \vec{b}]_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad (2.14b)$$

$$c_3 = [\vec{a} \times \vec{b}]_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (2.14c)$$

gdzie a_1, a_2, a_3 są składowe wektora \vec{a} , a b_1, b_2, b_3 są składowe wektora \vec{b} wzdłuż osi Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

Składowe wektorów \vec{a} i \vec{b} spełniają równanie (2.12b), a zatem

$$a_i = \alpha_{k'i} a'_k, \quad b_i = \alpha_{k'i} b'_k. \quad (2.15)$$

Po podstawieniu (2.15) do (2.14a) otrzymujemy

$$c_1 = c'_1 (\alpha_{2'2} \alpha_{3'3} - \alpha_{2'3} \alpha_{3'2}) + c'_2 (\alpha_{3'2} \alpha_{1'3} - \alpha_{3'3} \alpha_{1'2}) + c'_3 (\alpha_{1'2} \alpha_{2'3} - \alpha_{1'3} \alpha_{2'2}), \quad (2.16)$$

gdzie

$$c'_1 = [\vec{a} \times \vec{b}]_{1'} = a'_2 b'_3 - a'_3 b'_2, \quad (2.17a)$$

$$c'_2 = [\vec{a} \times \vec{b}]_{2'} = a'_3 b'_1 - a'_1 b'_3, \quad (2.17b)$$

$$c'_3 = [\vec{a} \times \vec{b}]_{3'} = a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1. \quad (2.17c)$$

Liczby w nawiasach są minorami macierzy $(\alpha_{k'i'})$ proporcjonalnymi do odpowiednich elementów macierzy odwrotnej $(\alpha_{k'i'})$

$$(\alpha_{2'2}\alpha_{3'3} - \alpha_{2'3}\alpha_{3'2}) = \det(\alpha_{k'i'}) \cdot \alpha_{1'1}, \quad (2.18a)$$

$$(\alpha_{3'2}\alpha_{1'3} - \alpha_{3'3}\alpha_{1'2}) = \det(\alpha_{k'i'}) \cdot \alpha_{1'2}, \quad (2.18b)$$

$$(\alpha_{1'2}\alpha_{2'3} - \alpha_{1'3}\alpha_{2'2}) = \det(\alpha_{k'i'}) \cdot \alpha_{1'3}, \quad (2.18c)$$

gdzie $\det(\alpha_{k'i'})$ jest wyznacznikiem macierzy $(\alpha_{k'i'})$.

Zatem

$$c_1 = \det(\alpha_{k'i'}) \cdot (\alpha_{1'1}c_1' + \alpha_{1'2}c_2' + \alpha_{1'3}c_3'). \quad (2.19)$$

Powtarzając to samo rozumowanie dla c_2 i c_3 znajdujemy, że

$$c_i = \det(\alpha_{k'i'}) \cdot \alpha_{ik'}c_k'. \quad (2.20)$$

Z porównania (2.20) i (2.12b) wynika, że różnice między nimi stanowi czynnik $\det(\alpha_{k'i'})$, który jest równy +1 dla przekształceń symetrii pierwszego rodzaju i równy -1 dla przekształceń symetrii drugiego rodzaju (o przekształceniach symetrii pierwszego i drugiego rodzaju patrz Wykład 1). Mówi się, że trzy liczby c_i' stanowią składowe pseudowektora.

Do pojęcia **pseudoskalara** dochodzimy rozpatrując transformację iloczynu skalarnego $A = (\vec{b} \cdot \vec{c})$ dwóch wektorów: zwykłego \vec{b} wektora i pseudowektora \vec{c} . Z określenia iloczynu skalarnego i uwzględnieniu wzorów (2.12b) i (2.20) możemy zapisać

$$\begin{aligned} A = b_i c_i &= \det(\alpha_{k'i'}) \cdot \alpha_{il'} \alpha_{k'i'} \cdot b_l' c_k' \equiv \\ &\det(\alpha_{k'i'}) \cdot b_k' c_k' = \det(\alpha_{k'i'}) \cdot A' \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tu uwzględniliśmy właściwości (2.13) macierzy przekształcenia $\alpha_{ik'}$.

Ze wzoru (2.21) wynika, że w przypadku pseudoskalara wielkość skalarna może zmienić swój znak w przypadku jeżeli dwa układy współrzędnych powiązane między sobą przekształceniami symetrii drugiego rodzaju. Przykładem pseudoskalara w fizyce jest prawdopodobnie ładunek elektryczny.