

Wykład 13

Zjawiska elektrooptyczne

Zmiana optycznych właściwości kryształu pod wpływem działania na kryształ pola elektrycznego nosi nazwę **zjawiska elektrooptycznego**. Tutaj podobnie do efektu elastooptycznego wpływ pola elektrycznego na optyczne właściwości kryształu możemy rozważać jako zmiany elipsoidy współczynników załamania światła czyli tensora nieprzenikalności dielektrycznej η_{ij} . W przypadku małych zmian kształtu, wymiarów oraz orientacji elipsoidy współczynników załamania światła te zmiany możemy opisać równaniem

$$\Delta\eta_{ij} = \eta_{ij}^0 - \eta_{ij} . \quad (13.1)$$

Tu η_{ij}^0 jest tensorem nieprzenikalności dielektrycznej nie deformowanego kryształu, a η_{ij} jest tensorem nieprzenikalności dielektrycznej deformowanego kryształu.

W przypadku niewielkich zmian tensora η_{ij} , zależności $\Delta\eta_{ij}$ od składowych wektora natężenia pola elektrycznego E_k z dobrym przybliżeniem (przybliżenie liniowe) możemy opisać wzorem

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk} \cdot E_k . \quad (13.2)$$

Współczynniki r_{ijk} , które tworzą składowe tensora trzeciego rzędu, nazywamy **współczynnikami elektrooptycznymi**. Liniowy efekt elektrooptyczny, określony wzorem (13.2) czasami jest nazywany **efektem Pockelsa**.

W postaci macierzowej efekt Pockelsa opisuje wzór

$$\Delta\eta_m = r_{mk} \cdot E_k , \quad (13.3)$$

Tensor r_{ijk} jest tensorem materii, a zatem podlega ograniczeniom narzucanym zasadą Neumanna. Ponieważ tensor współczynników elektrooptycznych jest tensorem trzeciego rzędu, liniowy efekt elektrooptyczny nie istnieje w kryształach zawierających środek symetrii.

Rozróżnia się efekt elektrooptyczny **pierwotny** i **wtórny**. Jeżeli kryształ nie może odkształcać się, to efekt elektrooptyczny, który obserwujemy w takim zwartym kryształe nazywamy pierwotnym efektem elektrooptycznym. W przypadku kryształu swobodnego pole elektryczne, wskutek odwrotnego efektu piezoelektrycznego, wywołuje odkształcenia

kryształu. Takie odkształcenia pociągają za sobą zmiany współczynników załamania za pośrednictwem efektu elastoptycznego. Efekt elektroptyczny który obserwujemy w tym przypadku nazywamy wtórnym. W swobodnym, nie zwartym kryształu efekt elektroptyczny jest zatem sumą efektów pierwotnego i wtórnego, a zmiany tensora η_{ij} opisuje wzór

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk} \cdot E_k + p_{ijkl} \cdot r_{kl} = (r_{ijk} + p_{ijm} \cdot d_{kml}) \cdot E_k . \quad (13.4)$$

Tu wielkości d_{kml} są współczynnikami piezoelektrycznymi.

Liniowy efekt elektroptyczny obserwuje się w przypadku gdy naprężenia pola elektrycznego oraz odkształcenia kryształów są małe. Dla dużych naprężeń i odkształceń musimy wprowadzić do wzoru (13.2) wyrazy kwadratowe

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk} \cdot E_k + R_{ijkl} \cdot E_k \cdot E_l . \quad (13.5)$$

Współczynniki R_{ijkl} , które tworzą składowe tensora czwartego rzędu, nazywamy **współczynnikami Kerra**. Kwadratowy efekt elektroptyczny, określony drugim wyrazem w wzorze (13.5) nazywamy **efektem Kerra**.

Efekt Kerra również może być **pierwotnym** i **wtórnym**. Jeżeli kryształ nie może odkształcać się, to efekt Kerra, który obserwujemy w takim zwartym kryształu nazywamy pierwotnym efektem Kerra. W przypadku kryształu swobodnego pole elektryczne wywołuje odkształcenia kryształu

$$r_{jk} = d_{ijk} \cdot E_i + \gamma_{imjk} \cdot E_i \cdot E_m . \quad (13.6)$$

Pierwszy wyraz w (13.6) odpowiada liniowemu efektowi piezoelektrycznemu. Natomiast drugi kwadratowy wyraz reprezentuje zjawisko, które nosi nazwę **elektrostrykcji**. Odkształcenia elektrostrykcyjne pociągają za sobą zmiany współczynników załamania za pośrednictwem efektu elastoptycznego. Efekt Kerra, który obserwujemy w tym przypadku nazywamy wtórnym. W swobodnym, nie zwartym kryształu efekt elektroptyczny jest zatem sumą efektów pierwotnego i wtórnego, a zmiany tensora η_{ij} opisuje wzór

$$\Delta\eta_{ij} = R_{ijkl} \cdot E_k \cdot E_l + p_{ijmn} \cdot r_{mn} = (R_{ijkl} + p_{ijmn} \cdot \gamma_{mnkl}) \cdot E_k \cdot E_l . \quad (13.7)$$

Tu wielkości γ_{mnkl} są **współczynnikami elektrostrykcyjnymi**.

W kryształach posiadających środek inwersji liniowego efektu elektroptycznego nie obserwuje się, a zatem głównym efektem jest efekt Kerra.

W praktyce najczęściej wykorzystuje się efekt elektrooptyczny podłużny i efekt elektrooptyczny poprzeczny. W przypadku efektu elektrooptycznego podłużnego kierunku działania pola elektrycznego na płytkę krystaliczną pokrywa się z kierunkiem promienia fali świetlnej. Dla efektu elektrooptycznego poprzecznego te kierunki są wzajemnie prostopadłe.

Przykład 13.1. Efekt elektrooptyczny często stosuje się w urządzeniach sterujących światłem. Schemat jednego z takich urządzeń jest przedstawiony na rys.13.1. Płytkę K z kryształu KDP (KH_2PO_4 , grupa punktowa - $\bar{4}2m$) zaopatrzoną w okładki metalowe jest umieszczona między skrzyżowanymi polaryzatorami P_1 i P_2 . Oś optyczna kryształu jest prostopadła do powierzchni płytki. Jeżeli różnica potencjałów między okładkami metalowymi jest równa zeru, światło od źródła S nie przechodzi przez urządzenie. Natomiast przyłożone pole elektryczne powoduje deformację dykmatrysy optycznej i płytka staje się przezroczystą. Maksymalne natężenie światła będzie miała płytka dla której różnica faz wynosi $\varphi = \pi$. Taką różnicę faz będzie miała płytka dla której różnica dróg optycznych wynosi $d \cdot (n_1 - n_2) = \lambda/2$. Współczynniki załamania n_1 i n_2 promieni nadzwyczajnego i zwyczajnego zależą od natężenia pola elektrycznego. Różnica potencjałów dla której płytka staje się przezroczystą oznaczymy jako $U_{\lambda/2}$. Znajdziemy teraz wzór na $U_{\lambda/2}$.

W kryształach klasy $\bar{4}2m$ tensor współczynników elektrooptycznych r_{mi} ma postać

$$[r_{mk}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} .$$

A zatem ze wzoru (13.3) mamy

$$\Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \Delta\eta_3 = \Delta\eta_4 = \Delta\eta_5 = 0, \quad \Delta\eta_6 = r_{63} \cdot E, \quad . \quad (13.8)$$

Biorąc pod uwagę (13.8), otrzymujemy równanie dla dykmatrysy optycznej

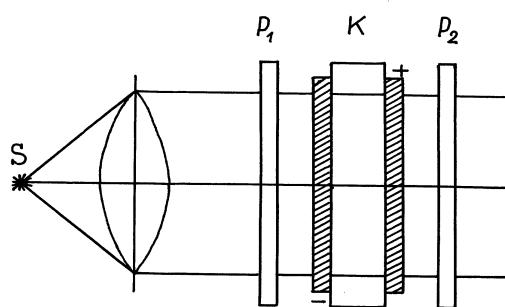
$$x_i \eta_{ij} x_j = \eta_1^{(0)} \cdot (x_1^2 + x_2^2) + \eta_3^{(0)} \cdot x_3^2 + 2r_{63} E \cdot x_1 x_2 = 1, \quad (13.9)$$

gdzie $\eta_1^{(0)} = 1/n_o^2$, $\eta_3^{(0)} = 1/n_e^2$; n_o , n_e - współczynniki załamania fali zwyczajnej i nadzwyczajnej.

Ze wzoru (13.9) wynika, że przekrój indyktrydy optycznej kryształu płaszczyzną prostopadłą do osi optycznej $\bar{4}$ jest elipsą

$$\eta_1^{(0)} \cdot (x_1^2 + x_2^2) + 2r_{63}E \cdot x_1x_2 = 1, \quad (13.10)$$

Przyjęty układ krystalofizyczny, jak widać ze wzoru (13.10), nie jest układem osi głównych indyktrydy optycznej. Znajdziemy teraz układ osi głównych indyktrydy optycznej.



Rys. 13.1. Schemat modulatora optycznego

Z równania

$$\begin{vmatrix} \eta_1^{(0)} - \lambda & a \\ a & \eta_1^{(0)} - \lambda \end{vmatrix} = (\eta_1^{(0)} - \lambda)^2 - a^2 = 0,$$

otrzymujemy

$$\lambda_1 = \eta_1^{(0)} - a, \quad \lambda_2 = \eta_1^{(0)} + a. \quad (13.11)$$

Tu $a = r_{63}E$.

Kierunki głównych osi Ox_1' i Ox_2' indyktrydy optycznej odpowiadających λ_1 i λ_2 znajdziemy z rozwiązania układu równań

$$(\eta_1^{(0)} - \lambda_i) \cdot c_{1i} + a \cdot c_{2i} = \pm a \cdot c_{1i} + a \cdot c_{2i} = 0,$$

$$(\eta_1^{(0)} - \lambda_i) \cdot c_{2i} + a \cdot c_{1i} = \pm a \cdot c_{2i} + a \cdot c_{1i} = 0,$$

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 = 1.$$

Rozwiązanie tych równań ma postać

$$\lambda_1 = \eta_1^{(0)} + r_{63}E, \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lambda_2 = \eta_1^{(0)} - r_{63}E, \quad c_1 = -c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

A zatem kierunki osi głównych osi Ox'_1 i Ox'_2 indyktrisy optycznej tworzą kąty 45° z osiami Ox_1 i Ox_2 .

Równanie indyktrisy optycznej deformowanego kryształu w układzie osi głównych tensora nieprzenikalności ma postać

$$(\eta_1^{(0)} + r_{63}E) \cdot x_1'^2 + (\eta_1^{(0)} - r_{63}E) \cdot x_2'^2 + \eta_3^{(0)} \cdot x_3^2 = 1. \quad (13.12)$$

Ze wzoru (13.12) wynika, że główne współczynniki załamania światła są równe

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_1^{(0)} + \Delta\eta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_1^{(0)}}} \left(1 + \frac{\Delta\eta_1}{\eta_1^{(0)}}\right)^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_1^{(0)}}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\eta_1}{\eta_1^{(0)}}\right) = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \cdot r_{63} \cdot E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_1^{(0)} + \Delta\eta_2}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_1^{(0)}}} \left(1 + \frac{\Delta\eta_2}{\eta_1^{(0)}}\right)^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_1^{(0)}}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\eta_2}{\eta_1^{(0)}}\right) = n_o + \frac{1}{2} n_o^3 \cdot r_{63} \cdot E, \end{aligned}$$

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{\eta_3^{(0)}}} = n_e.$$

Wielkość dwójłomności światła rozchodzącego się wzdłuż osi Ox_3 określa wzór

$$\Delta n = n_2 - n_1 = n_o^3 \cdot r_{63} \cdot E,$$

a różnica dróg optycznych wynosi

$$d \cdot (n_1 - n_2) = n_o^3 \cdot r_{63} \cdot (E \cdot d) = n_o^3 \cdot r_{63} \cdot U . \quad (13.13)$$

Tu $U = E \cdot d$ jest różnica potencjałów między okładkami metalowymi.

Jeżeli różnica dróg optycznych jest równa $\lambda/2$, to ze wzoru (13.13) otrzymujemy

$$U_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{2r_{63} \cdot n_o^3} . \quad (13.14)$$

Przykład 13.2. Modulacja światła może być również zrealizowana w oparciu o efekt Kerra. Rozważmy działania takiego urządzenia na przykładzie sześciangu wyciętego z kryształu klasy $m3m$. Krawędzi sześciangu są równoległe do osi 4 – krotnych kryształu.

W kryształach klasy $m3m$ tensor współczynników Kerra R_{mn} ma postać

$$[R_{mn}] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{12} & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{bmatrix} .$$

Jeżeli pole elektryczne zostało przyłożone wzdłuż osi Ox_1 , ze wzoru (13.5) mamy

$$\Delta\eta_1 = R_{11} \cdot E^2, \Delta\eta_2 = \Delta\eta_3 = R_{12} \cdot E_1^2, \Delta\eta_4 = \Delta\eta_5 = \Delta\eta_6 = 0 . \quad (13.15)$$

Biorąc pod uwagę (13.15), otrzymujemy równanie dla indykatrixy optycznej

$$\begin{aligned} x_i \eta_{ij} x_j = \\ = (\eta_o + R_{11} \cdot E^2) \cdot x_1^2 + (\eta_o + R_{12} \cdot E_1^2) \cdot (x_2^2 + x_3^2) = 1 , \end{aligned} \quad (13.16)$$

gdzie $\eta_o = 1/n_o^2$; n_o - współczynnik załamania kryształu.

Ze wzoru (13.16) wynika, że główne współczynniki załamania światła są równe

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_o + \Delta\eta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_o}} \left(1 + \frac{\Delta\eta_1}{\eta_o}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_o}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\eta_1}{\eta_o}\right) = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \cdot R_{11} \cdot E^2$$

$$n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{\eta_o + \Delta\eta_2}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_o}} \left(1 + \frac{\Delta\eta_2}{\eta_o}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_o}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\eta_2}{\eta_o}\right) = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \cdot R_{12} \cdot E^2$$

Ponieważ $n_2 = n_3$ dwójłomność światła będzie niezerowa tylko dla światła rozchodzącego się w kierunku prostopadłym do kierunku pola elektrycznego. A więc modulator światła będzie działał tylko na zasadzie poprzecznego efektu Kerra.

Aktywność optyczna

Zdolność niektórych kryształów do skręcania płaszczyzny polaryzacji światła nazywa się **aktywnością optyczną**. Zjawisko skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła zachodzi w kryształach optycznie izotropowych (układu regularnego), jak również w kryształach jedno i dwuosiowych i obserwuje się w kryształach w których występuje **dyspersja przestrzenna wektora polaryzacji elektrycznej** $\vec{P}(\vec{r}, t)$. Dyspersja przestrzenna wektora polaryzacji $\vec{P}(\vec{r}, t)$ polega na tym, że wektor polaryzacji elektrycznej w punkcie, określonym wektorem wodzącym \vec{r} , zależy nie tylko od wektora natężenia pola elektrycznego \vec{E} w tym punkcie, ale zależy również od przestrzennych pochodnych wektora \vec{E}

$$P_i = \epsilon_0 \zeta_{ij} E_j + \epsilon_0 \beta_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} . \quad (13.17)$$

W optyce kryształów dogodnej jest rozważać zamiast zależności (13.17), zależność natężenia pola elektrycznego \vec{E} od wektora indukcji elektrycznej \vec{D}

$$E_i = \eta_0 \eta_{ij} D_j + \eta_0 \xi_{ijk} \frac{\partial D_j}{\partial x_k} . \quad (13.18)$$

Uwzględniając, że dla fali płaskiej $\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$

$$\frac{\partial D_j}{\partial x_l} = ik_l \cdot D_j ,$$

wzór (13.18) możemy zapisać w postaci

$$E_i = \eta_0 \tilde{\eta}_{ij} \cdot D_j , \quad (13.19)$$

gdzie

$$\tilde{\eta}_{ij} = \eta_{ij} + i\xi_{ijm} k_m . \quad (13.20)$$

Z porównania (13.19) z równaniem materialnym ($E_i = \eta_0 \eta_{ij} D_j$) widzimy, że przestrzenna dyspersja wektora polaryzacji powoduje, że tensor nieprzenikalności dielektrycznej staje się zależny od wektora falowego \vec{k} i część tensora $\tilde{\eta}_{ij}$ zależna od \vec{k} jest urojona.

Tensor nieprzenikalności określa, jak wiemy, główne współczynniki załamania światła, które są wielkościami rzeczywistymi. A zatem, aby tensor $\tilde{\eta}_{ij}$ miał rzeczywiste wartości własne, macierz z składowych tensora $\tilde{\eta}_{ij}$ powinna być macierzą hermitowską

$$\tilde{\eta}_{ij} = \tilde{\eta}_{ji}^* . \quad (13.21)$$

Ze wzoru (13.20) wtedy wynika, że tensor ξ_{ijm} jest tensorem antysymetrycznym względem permutacji pierwszych dwóch wskaźników

$$\xi_{ijm} = -\xi_{jim} . \quad (13.22)$$

Uwzględniając wzór (13.22) dla składowych wektora $\tilde{E}_i = \eta_0 \xi_{ijm} k_m \cdot D_j$ mamy

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \eta_0 (\xi_{12m} \cdot D_2 - \xi_{31m} \cdot D_3) \cdot k_m , \\ \tilde{E}_2 &= \eta_0 (-\xi_{12m} \cdot D_1 + \xi_{23m} \cdot D_3) \cdot k_m , \\ \tilde{E}_3 &= \eta_0 (\xi_{31m} \cdot D_1 - \xi_{23m} \cdot D_2) \cdot k_m . \end{aligned} \quad (13.23)$$

Wprowadzając wektor \vec{g} o składowych

$$\mathbf{g}_1 = \xi_{23m} \cdot k_m , \quad \mathbf{g}_2 = \xi_{31m} \cdot k_m , \quad \mathbf{g}_3 = \xi_{12m} \cdot k_m , \quad (13.24)$$

zapiszmy wzór (13.23) w postaci

$$\vec{E} = \eta_0 \cdot [\vec{D} \times \vec{g}] . \quad (13.25)$$

Skorzystamy teraz z tożsamości

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_l = \varepsilon_{lij} \cdot a_i b_j . \quad (13.26)$$

Tu ε_{lij} jest symbolem permutacyjny Levi-Civity. Jeżeli ciąg wskaźników l, i, j jest parzystą permutacją ciągu liczb 1,2,3, to $\varepsilon_{lij} = +1$; jeżeli ciąg wskaźników l, i, j jest permutacją nieparzystą ciągu (1,2,3), to $\varepsilon_{lij} = -1$. Jeżeli co najmniej dwa wskaźniki są jednakowe, to $\varepsilon_{lij} = 0$.

Używając symbolu Levi-Civity wzór (13.25) możemy zapisać w postaci

$$\vec{E}_i = \eta_0 \varepsilon_{ijl} \cdot D_l g_j . \quad (13.27)$$

Biorąc pod uwagę, że $\vec{k} = (2\pi/\lambda) \cdot \vec{k}_0$ ($|\vec{k}_0| = 1$), zapiszmy składowe wektora \vec{g} w postaci

$$g_1 = G_{1n} \cdot k_{0n} , g_2 = G_{2n} \cdot k_{0n} , g_3 = G_{3n} \cdot k_{0n} , \quad (13.28)$$

gdzie

$$G_{1n} = (2\pi/\lambda) \xi_{23n} , G_{2n} = (2\pi/\lambda) \xi_{31n} , G_{3n} = (2\pi/\lambda) \xi_{12n} .$$

Uwzględniając wzory (13.27) i (13.28), wzór (13.19) możemy zapisać w postaci

$$E_i = \eta_0 (\eta_{il} + i \varepsilon_{ijl} \cdot G_{jn} k_{0n}) \cdot D_l . \quad (13.29)$$

Korzystając z równania (13.29), rozważmy teraz zjawisko aktywności optycznej na przykładzie fali rozchodzącej się w dowolnie wybranym kierunku w kryształ. Wybierzmy oś Ox_3 prawoskrętnego układu współrzędnych wzdłuż kierunku rozchodzącej się fali. Przekrój indyktrysy optycznej płaszczyzną $x_1 O x_2$ w ogólnym przypadku ma kształt elipsy. Wybierając osi Ox_1 i Ox_2 wzdłuż głównych osi tej elipsy i korzystając ze wzorów (13.29) i (11.17) (wykład 11)

$$E_i - k_{0i} k_{0j} E_j = \frac{c^2 \mu_0}{n^2} D_i , \quad (11.17)$$

zamiast wzorów (11.21) (wykład 11)

$$D_1\left(\eta_{11} - \frac{1}{n^2}\right) + D_2\eta_{12} = 0, \quad (11.21a)$$

$$D_1\eta_{12} + D_2\left(\eta_{22} - \frac{1}{n^2}\right) = 0, \quad (11.21b)$$

otrzymujemy następujący układ równań na D_1 i D_2

$$D_1\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2}\right) + iG_{33}D_2 = 0, \quad (13.30a)$$

$$-iG_{33}D_1 + D_2\left(\frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 0, \quad (13.30b)$$

gdzie $n_{01}^{-2} = \eta_{11}$, $n_{02}^{-2} = \eta_{22}$ i n_{01} , n_{02} są współczynniki załamania, które miałaby fala świetlna, w przypadku nie występowania w kryształach dyspersji przestrzennej wektora polaryzacji.

Układ równań (13.30) ma niezerowe rozwiązanie jeżeli

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2} & iG_{33} \\ -iG_{33} & \frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (13.31)$$

$$= (n^{-2})^2 - n^{-2}(n_{01}^{-2} + n_{02}^{-2}) + (n_{01}^{-2}n_{02}^{-2} - G_{33}^2) = 0$$

Z rozwiązania równania (13.31) otrzymujemy

$$n_1^{-2} = n_{01}^{-2} - \frac{1}{2}[(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2}) - \sqrt{(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2})^2 + 4G_{33}^2}], \quad (13.32a)$$

$$n_2^{-2} = n_{02}^{-2} + \frac{1}{2}[(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2}) - \sqrt{(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2})^2 + 4G_{33}^2}]. \quad (13.32b)$$

Wprowadzając wielkość

$$\rho = \frac{1}{2G_{33}} [\sqrt{(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2})^2 + 4G_{33}^2} - (n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2})] , \quad (13.33)$$

wzory (13.32) możemy zapisać w postaci

$$n_1^{-2} = n_{01}^{-2} + \rho \cdot G_{33} , \quad (13.34a)$$

$$n_2^{-2} = n_{02}^{-2} - \rho \cdot G_{33} . \quad (13.34b)$$

Ponieważ $|G_{33}| \ll 1$, ze wzorów (13.34) mamy

$$n_1 = n_{01} \cdot (1 + \rho \cdot G_{33} \cdot n_{01}^2)^{-1/2} \cong n_{01} - \frac{1}{2} n_{01}^3 \rho \cdot G_{33} , \quad (13.35a)$$

$$n_2 = n_{02} \cdot (1 - \rho \cdot G_{33} \cdot n_{02}^2)^{-1/2} \cong n_{02} + \frac{1}{2} n_{02}^3 \rho \cdot G_{33} , \quad (13.35b)$$

Każdy współczynnik załamania będzie miał swój wektor własny \vec{D} . Własne wektory $\vec{D}^{(1),(2)}$, odpowiadające współczynnikom n_1 i n_2 znajdziemy podstawiając n_1 i n_2 ze wzorów (13.34) do układu równań (13.30).

$$D_1^{(1),(2)} (\mp \rho \cdot G_{33}) + i G_{33} D_2^{(1),(2)} = 0 , \quad (13.36a)$$

$$-i G_{33} D_1^{(1),(2)} + D_2^{(1),(2)} (\mp \rho \cdot G_{33}) = 0 . \quad (13.36b)$$

Ze wzorów (13.36) wynika, że

$$\frac{D_2^{(1)}}{D_1^{(1)}} = \frac{D_1^{(2)}}{D_2^{(2)}} = -i\rho . \quad (13.37)$$

Uwzględniając wzór (13.37), mamy

$$\vec{D}^{(1)} = D^{(1)} \cdot (\vec{e}_1 - i\rho \cdot \vec{e}_2) \cdot \exp[i(k^{(1)}x_3 - \omega t + \varphi^{(1)})] , \quad (13.38a)$$

$$\vec{D}^{(2)} = D^{(2)} \cdot (-i\rho \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \exp[i(k^{(2)}x_3 - \omega t + \varphi^{(2)})] , \quad (13.38b)$$

gdzie $k^{(\alpha)} = \omega \cdot n_\alpha / c$ ($\alpha = 1, 2$).

Wektory indukcji elektrycznej to są rzeczywistymi składowymi tych wektorów, a zatem

$$\operatorname{Re} \vec{D}^{(1)} = D^{(1)} [\vec{e}_1 \cdot \cos(k^{(1)} x_3 - \omega t + \varphi^{(1)}) + \rho \cdot \vec{e}_2 \cdot \sin(k^{(1)} x_3 - \omega t + \varphi^{(1)})] , \quad (13.39a)$$

$$\operatorname{Re} \vec{D}^{(2)} = D^{(2)} [\rho \cdot \vec{e}_1 \cdot \sin(k^{(2)} x_3 - \omega t + \varphi^{(2)}) + \vec{e}_2 \cdot \cos(k^{(2)} x_3 - \omega t + \varphi^{(2)})] . \quad (13.39b)$$

Ze wzorów (13.39) wynika, że te dwie fale są spolaryzowane eliptycznie. Przypuśćmy, że $\rho > 0$. Jeżeli patrzeć na fale (13.39) od strony osi Ox_3 , czyli od strony obserwatora, do którego oka wpada światło, to koniec wektora indukcji elektrycznej fali (13.39b) porusza się po elipsie zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Mówimy, że fala (13.39b) jest spolaryzowana **prawoskrętnie**. Wektor indukcji fali (13.39a) porusza się po elipsie przeciwnie z ruchem wskazówek zegara. Taką falę nazywamy spolaryzowaną **lewoskrętnie**.

Rozważmy teraz rozchodzenie się fali świetlnej wzdłuż osi optycznej. W tym przypadku $n_{01} = n_{02} \equiv n_o$ i ze wzorów (13.33) i (13.35) otrzymujemy

$$\rho = \frac{|G_{33}|}{G_{33}} , \quad (13.40)$$

$$n_{1,2} \equiv n_o \mp \frac{1}{2} n_o^3 |G_{33}| . \quad (13.41)$$

Fala świetlna wchodząca do kryształu zwykle jest płasko spolaryzowana. Niech fala ta jest spolaryzowana wzdłuż osi Ox_1 . W kryształach falę płasko spolaryzowaną można rozłożyć na dwie fale spolaryzowane kołowo. Jedną z tych fal będzie falą prawoskrętną

$$\vec{e}_1 \cdot \cos(k^{(r)} x_3 - \omega t) + \vec{e}_2 \cdot \sin(k^{(r)} x_3 - \omega t) , \quad (13.42a)$$

zaś druga fala będzie falą lewoskrętną

$$\vec{e}_1 \cdot \cos(k^{(l)} x_3 - \omega t) - \vec{e}_2 \cdot \sin(k^{(l)} x_3 - \omega t) . \quad (13.42b)$$

Prędkości tych fal są różne i równe odpowiednio $\omega/k^{(r)}$ i $\omega/k^{(l)}$. Dwie spolaryzowane kołowo fale po wyjściu z płytki krystalicznej o grubości d tworzą znów jedną falę, której polaryzację określa wektor

$$\begin{aligned}
& \vec{e}_1 \cdot [\cos(k^{(l)}d - \omega t) + \cos(k^{(r)}d - \omega t)] \\
& - \vec{e}_2 \cdot [\sin(k^{(l)}d - \omega t) - \sin(k^{(r)}d - \omega t)] \\
& = 2 \cos\left[\left(\frac{k^{(r)} + k^{(l)}}{2}\right) \cdot d - \omega t\right] \\
& \times [\vec{e}_1 \cdot \cos\left(\frac{k^{(l)} - k^{(r)}}{2}d\right) - \vec{e}_2 \cdot \sin\left(\frac{k^{(l)} - k^{(r)}}{2}d\right)]
\end{aligned} \tag{13.43}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{k^{(l)} - k^{(r)}}{2} = \frac{\omega}{2c}(n_2 - n_1) = \frac{\omega}{2c} \cdot |G_{33}| \cdot n_o^3 = \frac{\pi n_o^3 |G_{33}|}{\lambda},$$

$$\frac{k^{(l)} + k^{(r)}}{2} = \frac{\omega}{2c}(n_2 + n_1) = \frac{\omega \cdot n_o}{c},$$

ze wzoru (13.43) dla wektora polaryzacji fali na wyjściu z kryształu otrzymujemy

$$(\vec{e}_1 \cdot \cos\psi - \vec{e}_2 \cdot \sin\psi) \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{n_o d}{c}\right)\right], \tag{13.44}$$

gdzie

$$\psi = \frac{\pi n_o^3 |G_{33}|}{\lambda} \cdot d. \tag{13.45}$$

Ze wzoru (13.44) wynika, że spolaryzowana wzdłuż osi Ox_1 fala po wyjściu z kryształu znów będzie płasko spolaryzowana. Jednak kierunek polaryzacji fali jest skręcony o kąt ψ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Jeżeli skręcenie płaszczyzny polaryzacji, widziane od strony obserwatora jest zgodne z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, to skręcanie nazywamy **prawoskrętnym**, a odpowiednie kryształy nazywamy **kryształami prawoskrętnymi**. W przeciwnym przypadku skręcanie płaszczyzny polaryzacji światła nazywamy **lewoskrętnym**, a odpowiednie kryształy nazywamy **lewoskrętnymi**.

Aktywność optyczną różnych kryształów możemy porównać wprowadzając pojęcie **zdolności skręcającej kryształu**. Zdolność skręcająca kryształu δ jest równa skręceniu płaszczyzny polaryzacji światła przypadającemu na jednostkę drogi w danym kryształe

$$\delta = \frac{\psi}{d} = \frac{\pi n_o^3 G_{33}}{\lambda} . \quad (13.46)$$

Tensor G_{jn} , określający zdolności skręcania płaszczyzny polaryzacji światła w kryształach nazywa się **tensorem skręcania**.