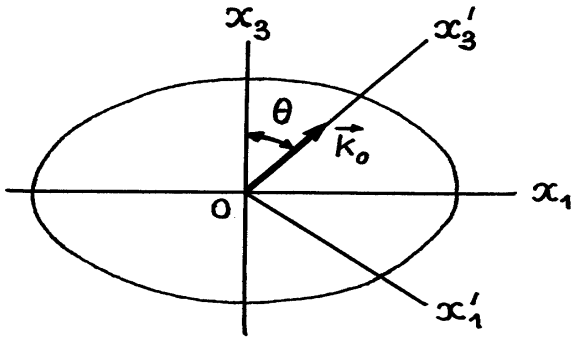
Wykład 12

Właściwości optyczne kryształów - przedłużenie

Przykład 12.1. Znajdziemy kąt między wektorem falowym $\vec{k}_0$ i promieniem $\vec{s}$ fali świetlnej rozchodzącej się w krysztale $LiNbO_3$ (grupa punktowa – 3m; główne wartości tensora nieprzenikalności dielektrycznej są równe: $\eta_1 = \eta_2 = 0{,}023;\ \eta_3 = 0{,}03$) w kierunku, który tworzy kąt 45^0 z osią 3-krotną.

Kryształ $LiNbO_3$ należy do układu trygonalnego, a więc jest to kryształ optycznie jednoosiowy. W układzie głównych osi tensora η_{ij} wektor falowy $\vec{k}_0$ ma składowe ($\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta$) (rys.12.1). Rozważmy układ współrzędnych Ox_1', $Ox_2' = Ox_2$, Ox_3' w którym oś Ox_3' pokrywa się z kierunkiem wektora $\vec{k}_0$ (rys.12.1).



Rys.12.1. Przekrój indykatrysy optycznej płaszczyzną x_1Ox_3

Macierz $\alpha_{ij'}$, określająca przejście od jednego układu współrzędnych do drugiego ma postać:

$$\left[\alpha_{ij'}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}. \qquad (12.1)$$

Korzystając z reguł przekształcenia składowych tensora drugiego rzędu, znajdujemy, że w układzie współrzędnych Ox_1', Ox_2', Ox_3' tensor η_{ij}' ma postać

$$\left[\eta'_{ij}\right]=\begin{bmatrix} \eta_1\cos^2\theta+\eta_3\sin^2\theta & 0 & \eta_1\sin\theta\cos\theta-\eta_3\sin\theta\cos\theta \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ \eta_1\sin\theta\cos\theta-\eta_3\sin\theta\cos\theta & 0 & \eta_1\sin^2\theta+\eta_3\cos^2\theta \end{bmatrix}. \qquad (12.2)$$

Kierunki wektorów $\vec{D}^{(1)}$ i $\vec{D}^{(2)}$ znajdziemy z rozwiązania układu równań

$$D_1^{(1),(2)}(\eta'_{11}-\frac{1}{n_{1,2}^2})+D_2^{(1),(2)}\eta'_{12}=0\ , \qquad (12.3a)$$

$$D_1^{(1),(2)}\eta'_{12}+D_2^{(1),(2)}(\eta'_{22}-\frac{1}{n_{1,2}^2})=0\ , \qquad (12.3b)$$

gdzie

$$n_1^{-2}=\frac{1}{2}[(\eta'_{11}+\eta'_{22})+\sqrt{(\eta'_{11}-\eta'_{22})^2+(2\eta'_{12})^2}]=\eta'_{11}\ , \qquad (12.4a)$$

$$n_2^{-2}=\frac{1}{2}[(\eta'_{11}+\eta'_{22})-\sqrt{(\eta'_{11}-\eta'_{22})^2+(2\eta'_{12})^2}]=\eta'_{22}=\eta_1\ . \qquad (12.4b)$$

Po podstawieniu (12.4) do układu równań (12.3) otrzymujemy, że wektory $\vec{D}^{(1)}$ jest skierowany wzdłuż osi Ox'_1 ($\vec{D}^{(1)}=(D_1^{(1)},0,0)$). Natomiast wektor $\vec{D}^{(2)}$ jest skierowany wzdłuż osi $Ox'_2=Ox_2$ ($\vec{D}^{(2)}=(0,D_2^{(2)},0)$). Wektory $\vec{E}^{(1)}$ i $\vec{E}^{(2)}$ znajdziemy korzystając ze wzoru

$$E_i=\eta_0\eta_{ij}D_j\ .$$

Skąd dla składowych wektora $\vec{E}^{(1)}$ mamy

$$\begin{aligned} E_1^{(1)}&=\eta_0(\eta_1\cos^2\theta+\eta_3\sin^2\theta)\cdot D_1^{(1)}, \\ E_2^{(1)}&=0, \\ E_3^{(1)}&=\eta_0(\eta_1-\eta_3)\sin\theta\cos\theta\cdot D_1^{(1)}. \end{aligned} \qquad (12.5)$$

Kąt między wektorami $\vec{k}_0$ i $\vec{s}$ znajdujemy stosując wzór:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{D}^{(1)}}{\left|\vec{E}^{(1)}\right| \cdot \left|\vec{D}^{(1)}\right|} = \frac{\eta_1 \cos^2\theta + \eta_3 \sin^2\theta}{\sqrt{(\eta_1 \cos^2\theta + \eta_3 \sin^2\theta)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}} ,$$

skąd przy $\theta = 45^0$ otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\eta_1 + \eta_3}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} = 0.9914 ,$$

$$\alpha = 7^0 30' .$$

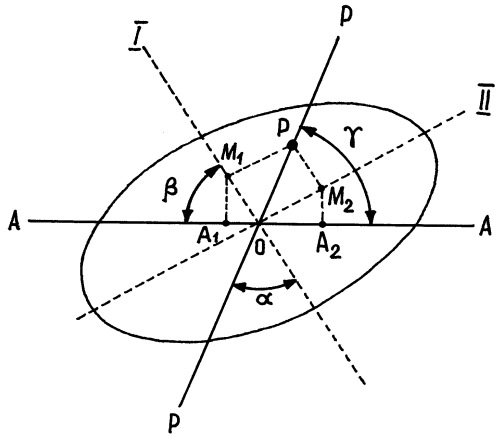
Wektor $\vec{E}^{(2)}$ określa polaryzację fali zwyczajnej i jest równoległy do wektora $\vec{D}^{(2)}$. Składowe wektora $\vec{E}^{(2)}$ są równe $\vec{E}^{(2)} = (0, \eta_0\eta_1 D_2^{(2)}, 0)$, a więc dla fali zwyczajnej $\vec{k}_0 \parallel \vec{s}$ i $\beta = 0$.

Przykład 12.2. Przy przejściu światła przez kryształ optycznie anizotropowy zachodzi nie tylko podwójne załamanie światła, a również polaryzacja powstałych wiązek świetlnych. Zjawisko to stosuje się w urządzeniach służących do wytwarzania (**polaryzatory**) oraz do badania (**analizatory**) światła spolaryzowanego. Najstarszym z tych urządzeń jest pryzmat Nicola, nazywany **nikolem**. Pryzmat Nicola zawiera dwie sklejone części z kryształu kalcytu tak, aby promień zwyczajny został odbity całkowicie od powierzchni sklejenia, a promień nadzwyczajny przechodził przez nią bez zmiany kierunku. Promień nadzwyczajny wychodzący z nikola jest spolaryzowany w kierunku wyznaczonym przez położenie przekroju głównego kryształu, czyli w płaszczyźnie przekroju zawierającego oś optyczną.

Wyprowadźmy wzór na natężenie światła, przechodzącego przez układ: polaryzator – kryształ – analizator (rys.12.2), zakładając, ze płaszczyzny drgań w analizatorze i polaryzatorze tworzą kąt γ (płaszczyzny $A-A$ i $P-P$ na rys.12.2), a płaszczyzny drgań (płaszczyzny I i II na rys.12.2) w krysztale tworzą kąty α i β z odpowiednimi płaszczyznami polaryzatora i analizatora.

Jeżeli oznaczmy przez n_1 i n_2 współczynniki załamania światła spolaryzowanego odpowiednio w kierunkach I i II, a przez d oznaczmy grubość płytki krystalicznej, to różnica faz dwóch fał (fali spolaryzowanej wzdłuż kierunku I i fali spolaryzowanej wzdłuż kierunku II) wynosi

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_1 - n_2) . \qquad (12.6)$$



Rys.12.2. Przekrój indykatrysy optycznej płaszczyzną powierzchni płytki

Niech I_0 jest natężenie wiązki światła wychodzącej z polaryzatora. Amplitudę tej wiązki określa punkt P na rys.11.2 ($OP = \sqrt{I_0}$). Z rys.12.2 wynika, że amplitudy fal spolaryzowanych w krysztale wzdłuż kierunków I i II są równe: $OM_1 = \sqrt{I_0} \cdot \cos\alpha$, $OM_2 = \sqrt{I_0} \cdot \sin\alpha$. Natężenie wiązki światła wychodzącej z analizatora określa wzór

$$I = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2(OA_1)(OA_2)\cos\varphi \ .$$

Ponieważ $OA_1 = \sqrt{I_0} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$ i $OA_2 = \sqrt{I_0} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$, to na natężenie światła przechodzącego przez układ: polaryzator – kryształ – analizator otrzymujemy następujący wzór

$$I = I_0 \cdot \cos^2\gamma + I_0 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2(\varphi/2). \qquad (12.7)$$

Tu uwzględniliśmy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

Ze wzoru (12.7) wynika, że jeżeli nikole są skrzyżowane ($\gamma = 90^0$, $\alpha + \beta = 90^0$), to

$$\begin{aligned} I &= I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\varphi/2) \\ &= \frac{1}{4} I_0 (1 - \cos 4\alpha) \cdot (1 - \cos\varphi) \end{aligned} \ . \qquad (12.8)$$

A zatem maksymalne natężenie światła będzie miała płytka dla której różnica faz wynosi $\varphi = \pi$. Przy obrocie kryształu dookoła osi normalnej do płytki krystalicznej będziemy cztery razy obserwowali całkowite wygaszanie światła (przy $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$) i całkowite przepuszczanie światła (przy $\alpha = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$).

Jeżeli nikole są zorientowane w taki sposób, że ($\gamma = 0^0$, $\alpha + \beta = 180^0$), to

$$I = I_0 \cdot [1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\varphi/2)]. \tag{12.9}$$

Ze wzoru (12.9) wynika, że przy obrocie kryształu dookoła osi normalnej do płytki krystalicznej również będziemy cztery razy obserwowali całkowite wygaszanie i przepuszczanie światła, ale w porządku odwrotnym: przepuszczanie światła będziemy obserwowali przy $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, a całkowite wygaszanie światła będziemy obserwowali przy $\alpha = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.

Zjawisko elastooptyczne

Zmiana optycznych właściwości kryształu pod wpływem działania na kryształ naprężeń nosi nazwę **zjawiska elastooptycznego albo piezooptycznego**. Optyczne właściwości kryształu określa elipsoida współczynników załamania światła czyli tensor nieprzenikalności dielektrycznej η_{ij}. Pod wpływem zewnętrznych naprężeń zachodzi zmiana składowych tensora η_{ij}. W przypadku małych zmian kształtu, wymiarów oraz orientacji elipsoidy współczynników załamania światła te zmiany możemy opisać równaniem

$$\Delta\eta_{ij} = \eta_{ij}^0 - \eta_{ij} \ . \tag{12.10}$$

Tu η_{ij}^0 jest tensor nieprzenikalności dielektrycznej nie deformowanego kryształu, a η_{ij} - tensor nieprzenikalności dielektrycznej kryształu deformowanego.

Wielkości $\Delta\eta_{ij}$ są w ogóle niewiadomymi funkcjami składowych tensora naprężeń t_{kl}. Jednak w przypadku niewielkich zmian tensora η_{ij}, zależności $\Delta\eta_{ij}$ od t_{kl} z dobrym przybliżeniem (przybliżenie liniowe) możemy opisać wzorem

$$\Delta\eta_{ij} = \pi_{ijkl} \cdot t_{kl} \ . \tag{12.11}$$

Współczynniki π_{ijkl}, które tworzą składowe tensora czwartego rzędu, nazywamy **współczynnikami piezooptycznymi**.

Ponieważ składowe tensora naprężenia t_{kl} są związane ze składowymi tensora deformacji r_{ij} prawem Hooke'a ($t_{ij} = c_{ijkl} \cdot r_{kl}$), zmiany tensora dielektrycznej nieprzenikalności możemy wyrazić również przez składowe tensora deformacji r_{ij}

$$\Delta\eta_{ij} = p_{ijkl} \cdot r_{kl} \ . \tag{12.12}$$

Tu wielkości $p_{ijkl} = \pi_{ijmn} \cdot c_{mnkl}$ są składowymi tensora czwartego rzędu i noszą nazwę **współczynników elastooptycznych.**

Korzystając z reguł macierzowego zapisu składowych tensora wzory (12.11) i (12.12) możemy zapisać w postaci

$$\Delta\eta_m = \pi_{mn} \cdot t_n \ , \tag{12.13}$$

$$\Delta\eta_m = p_{mn} \cdot r_n \ . \tag{12.14}$$

Tensory π_{ijkl} i p_{ijkl} są tensorami materii, a zatem podlegają ograniczeniom narzucanym zasadą Neumanna.

W praktyce najczęstszej wykorzystuje się efekt elastooptyczny podłużny i efekt elastooptyczny poprzeczny. W przypadku efektu elastooptycznego podłużnego kierunek działania naprężenia ściskającego płytkę krystaliczną pokrywa się z kierunkiem promienia fali świetlnej. Dla efektu elastooptycznego poprzecznego te kierunki są wzajemnie prostopadłe.

Przykład 12.3. Dla kryształów należących do układu regularnego elipsoida współczynników załamania jest kulą, a zatem zjawisko dwójłomności światła w kryształach układu regularnego nie obserwuje się. Rozważmy poprzeczny efekt elastooptyczny w kryształach klasy $m3m$ w przypadku, gdy kryształ został ściśnięty wzdłuż osi symetrii 4-krotnej.

Wybierzmy osi współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych 4-krotnych osi symetrii i niech kryształ został ściśnięty wzdłuż osi Ox_3. Wtedy tensor naprężenia ma jedną niezerową składową $t_3 \equiv t$. Zgodnie ze wzorem (12.13) to naprężenie wywołuje następujące zmiany składowych tensora nieprzenikalności dielektrycznej

$$\Delta\eta_m = \pi_{m3} \cdot t_3 \ . \tag{12.15}$$

W kryształach klasy $m3m$ tensor współczynników elastooptycznych π_{mn} ma postać

$$[\pi_{mn}] = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix}. \qquad (12.16)$$

A zatem ze wzoru (12.15) mamy

$$\Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \pi_{12} \cdot t\,, \quad \Delta\eta_3 = \pi_{11} \cdot t\,, \quad \Delta\eta_4 = \Delta\eta_5 = \Delta\eta_6 = 0\,. \qquad (12.17)$$

Biorąc pod uwagę (12.17), otrzymujemy równanie dla indykatrysy optycznej

$$\begin{aligned} &(\eta_0 + \Delta\eta_1)x_1^2 + (\eta_0 + \Delta\eta_2)x_2^2 + (\eta_0 + \Delta\eta_3)x_3^2 \\ &= (\eta_0 + \pi_{12} \cdot t) \cdot (x_1^2 + x_2^2) + (\eta_0 + \pi_{11} \cdot t)x_3^2 = 1 \end{aligned}\,, \qquad (12.18)$$

gdzie $\eta_0 = 1/n_o^2$ i n_o - współczynnik załamania światła do deformacji kryształu.

Ze wzoru (12.18) wynika, że indykatrysa kryształu regularnego po ściśnięciu kryształu wzdłuż osi symetrii 4-krotnej przyjmuje kształt elipsoidy obrotowej. Główne współczynniki załamania światła są równe

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_0 + \Delta\eta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 + \frac{\Delta\eta_1}{\eta_0})^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_1}{\eta_0}) = n_o - \frac{1}{2}n_o^3\pi_{12}t \end{aligned}\,,$$

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_0 + \Delta\eta_3}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 + \frac{\Delta\eta_3}{\eta_0})^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_3}{\eta_0}) = n_o - \frac{1}{2}n_o^3\pi_{11}t \end{aligned}\,.$$

Wielkość dwójłomności światła rozchodzącego się wzdłuż kierunku prostopadłego do osi Ox_3 określa wzór

$$\Delta n = n_3 - n_1 = -\frac{1}{2} n_o^3 (\pi_{11} - \pi_{12}) \cdot t \, .$$

Przykład 12.4. Rozważmy efekt elastooptyczny w kryształach klasy $m3m$ w przypadku, gdy kryształ został ściśnięty wzdłuż osi symetrii 3 - krotnej.

W danym układzie krystalicznym tensor naprężenia jednoosiowego działającego wzdłuż osi 3 – krotnej, która pokrywa się z kierunkiem $[111]$, ma postać

$$[t_n] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} t & t & t \\ t & t & t \\ t & t & t \end{bmatrix} \, . \tag{12.19}$$

Zgodnie z (12.13) i (12.16) zmiany składowych tensora nieprzenikalności dielektrycznej wynoszą

$$\Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \Delta\eta_3 = \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12}) \cdot t \, , \, , \quad \Delta\eta_4 = \Delta\eta_5 = \Delta\eta_6 = \frac{1}{3}\pi_{44} \cdot t \, . \tag{12.20}$$

Biorąc pod uwagę (12.20), otrzymujemy równanie dla indykatrysy optycznej

$$a \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2b \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 1 \, , \tag{12.21}$$

gdzie

$$a = \eta_0 + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12}) \cdot t \, , \; 2b = \frac{1}{3}\pi_{44} \cdot t \, .$$

Ze wzoru (12.21) wynika, że dla odkształconego kryształu układ krystałofizyczny nie jest układem osi głównych indykatrysy optycznej. Znajdziemy główny układ osi indykatrysy optycznej.

Z równania

$$\begin{vmatrix} a-\eta & b & b \\ b & a-\eta & b \\ b & b & a-\eta \end{vmatrix} = (a-b-\eta) \cdot [(a-\eta)^2 + b \cdot (a-\eta) - 2b^2] = 0 \, ,$$

otrzymujemy

$$\eta_1 = \eta_2 = a - b \ , \quad \eta_3 = a + 2b \ . \tag{12.22}$$

Ze wzoru (12.22) wynika, że optyczna indykatrysa kryształu odkształconego jest elipsoidą obrotową ($\eta_1 = \eta_2 \neq \eta_3$). A więc deformacja kryształu regularnego wzdłuż osi 3 – krotnej powoduje, że kryształ będzie optycznie jednoosiowy. Kierunek głównej osi indykatrysy optycznej odpowiadającej η_3 znajdziemy z rozwiązania układu równań

$$(a - \eta_3) \cdot c_1 + b \cdot (c_2 + c_3) = -3b \cdot c_1 + b \cdot (c_1 + c_2 + c_3) = 0 \ ,$$

$$(a - \eta_3) \cdot c_2 + b \cdot (c_1 + c_3) = -3b \cdot c_2 + b \cdot (c_1 + c_2 + c_3) = 0 \ ,$$

$$(a - \eta_3) \cdot c_3 + b \cdot (c_2 + c_3) = -3b \cdot c_3 + b \cdot (c_1 + c_2 + c_3) = 0 \ ,$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \ .$$

Rozwiązanie tych równań ma postać

$$c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

A zatem kierunek osi optycznej deformowanego kryształu, pokrywa się z kierunkiem [111], czyli z kierunkiem działania naprężenia jednoosiowego.

Równanie indykatrysy optycznej deformowanego kryształu w układzie głównych osi tensora nieprzenikalności ma postać

$$\begin{aligned} &[\eta_0 + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} - \frac{1}{2}\pi_{44}) \cdot t] \cdot (x_{1'}^2 + x_{2'}^2) \\ &+ [\eta_0 + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} + \pi_{44}) \cdot t] x_{3'}^2 = 1 \end{aligned} \ . \tag{12.23}$$

Ze wzoru (12.23) wynika, że główne współczynniki załamania światła są równe

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_0 + \Delta\eta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 + \frac{\Delta\eta_1}{\eta_0})^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_1}{\eta_0}) = n_o - \frac{1}{6} n_o^3 (\pi_{11} + 2\pi_{12} - \frac{1}{2}\pi_{44}) \cdot t \end{aligned} \ ,$$

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{\eta_0 + \Delta\eta_3}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 + \frac{\Delta\eta_3}{\eta_0})^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_3}{\eta_0}) = n_o - \frac{1}{6}n_o^3(\pi_{11} + 2\pi_{12} + \pi_{44}) \cdot t \quad .$$

Wielkość dwójłomności światła rozchodzącego się wzdłuż kierunku prostopadłego do osi Ox_3 określa wzór

$$\Delta n = n_3 - n_1 = -\frac{1}{4}n_o^3\pi_{44} \cdot t \ .$$