

Wykład 11

Właściwości optyczne kryształów

Zjawisko podwójnego załamania światła

W odróżnieniu od ośrodków izotropowych, w kryształach prędkość światła v , a więc i współczynnik załamania $n = c/v$ (c – prędkość światła w próżni) zależą od kierunku rozchodzenia się światła w kryształach. Anizotropia optycznych właściwości kryształów powoduje, iż pojedyncza wiązka światła przechodząca przez granicę kryształu załamuje się i rozszczepia się na dwie wiązki. Zjawisko „podwójnego ugięcia” wiązki światła przechodzącej przez kryształ nazywamy **podwójnym załamaniem**. Zjawisko podwójnego załamania światła jest związane z własnością posiadania przez kryształ dwóch współczynników załamania i wynika wprost z równań Maxwella:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (11.1a)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \quad (11.1b)$$

W równaniach (11.1) \vec{E} - wektor natężenia pola elektrycznego; \vec{D} - wektor indukcji pola elektrycznego (wektor przesunięcia); \vec{B} - wektor indukcji pola magnetycznego; \vec{H} - wektor natężenia pola magnetycznego; ρ - gęstość ładunku elektrycznego; \vec{j} - wektor gęstości prądu elektrycznego.

Zgodnie z prawem Ohma składowe wektora \vec{j} są powiązane ze składowymi wektora \vec{E} równaniem

$$j_i = \sigma_{ij} E_j, \quad (11.2)$$

gdzie σ_{ij} są składowe tensora przewodnictwa.

Wektory \vec{D} i \vec{E} , oraz wektory \vec{B} i \vec{H} są powiązane między sobą za pomocą równań

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j, \quad (11.3)$$

$$B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j. \quad (11.4)$$

Tu ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną próżni ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F / m); μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni ($\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$ H / m); ϵ_{ij} i μ_{ij} są odpowiednio bezwymiarowymi składowymi tensorów względnych przenikalności elektrycznej i magnetycznej.

Kryształy przezroczyste w zakresie widzialnym są złymi przewodnikami prądu, a ich przenikalności magnetyczne niewiele się różnią od przenikalności próżni. Zakładając więc, że

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (11.5)$$

możemy zapisać równania Maxwella w postaci

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (11.6a)$$

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0. \quad (11.6b)$$

Będziemy szukali rozwiązań równań (11.6) w postaci fal płaskich

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)], \quad (11.7a)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)], \quad (11.7b)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]. \quad (11.7c)$$

Tu $\omega = 2\pi\nu$, ν jest częstotliwością fali świetlnej; \vec{r} - promień wodzący punktu (x_1, x_2, x_3) w kryształach; \vec{k} - wektor falowy, który określa kierunek ruchu czoła fali świetlnej; \vec{E}_0 , \vec{D}_0 , \vec{H}_0 są amplitudy fal, które zakładamy nie zależą od ω , \vec{k} i \vec{r} .

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej fali płaskiej

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)], \quad (11.8)$$

są słuszne związki

$$\text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) = i[\vec{k} \times \vec{A}], \quad (11.9a)$$

$$\text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = i(\vec{k} \cdot \vec{A}), \quad (11.9b)$$

$$\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -i\omega \cdot \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (11.9c)$$

Po uwzględnieniu wzorów (11.9) otrzymujemy z równań (11.6)

$$[\vec{k} \times \vec{H}] = -\omega \vec{D} \quad , \quad [\vec{k} \times \vec{E}] = \omega \mu_0 \vec{H} \quad , \quad (11.10a)$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{D}) = 0 \quad , \quad (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0 \quad . \quad (11.10b)$$

Z równań (11.10) wynika, że wektory \vec{k} , \vec{H} i \vec{D} tworzą trójkę wzajemnie prostopadłych wektorów, a wektor \vec{E} jest prostopadły do wektora \vec{H} i leży w płaszczyźnie wspólnie z wektorami \vec{D} i \vec{k} (rys.11.1).

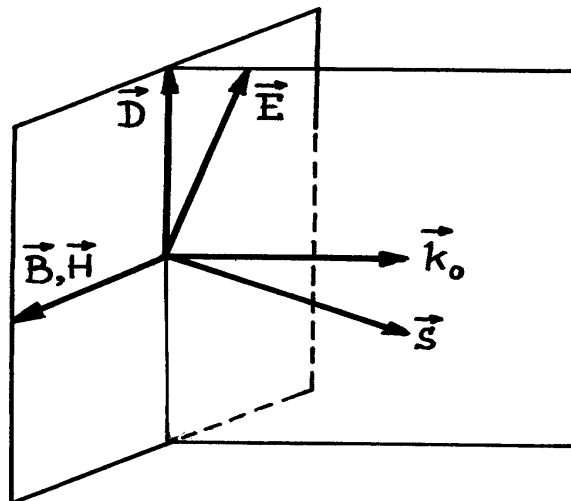
Wprowadzając jednostkowy wektor $\vec{k}_0 = \vec{k} / |\vec{k}|$ i uwzględniając, iż

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n \quad , \quad (11.11)$$

zapiszmy wektor \vec{k} falowy w postaci

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} n \vec{k}_0 \quad . \quad (11.12)$$

Tu $n = c/v$ jest współczynnikiem załamania światła.



Rys.11.1. Wzajemna orientacja wektorów \vec{D} , \vec{E} , \vec{H} , \vec{k}_0 i \vec{s} w płaszczyźnie spolaryzowanej fali świetlnej przechodzącej przez kryształ

Korzystając ze wzoru (11.12), z równań (11.10a) otrzymujemy

$$n[\vec{k}_0 \times \vec{E}] = c\mu_0 \vec{H} , \quad (11.13)$$

$$n[\vec{k}_0 \times \vec{H}] = -c\vec{D} . \quad (11.14)$$

Po podstawieniu \vec{H} ze wzoru (11.13) do wzoru (11.14) mamy

$$[\vec{k}_0 \times [\vec{k}_0 \times \vec{E}]] = -\frac{c^2 \mu_0}{n^2} \vec{D} . \quad (11.15)$$

Korzystając ze wzoru rozwijającego podwójny iloczyn wektorowy znajdziemy

$$[\vec{k}_0 \times [\vec{k}_0 \times \vec{E}]] = \vec{k}_0 (\vec{k}_0 \cdot \vec{E}) - \vec{E} (\vec{k}_0 \cdot \vec{k}_0) = -\frac{c^2 \mu_0}{n^2} \vec{D} . \quad (11.16)$$

Wzór (11.16) zapisany przez składowe wektorów przyjmuje postać

$$E_i - k_{0i} k_{0j} E_j = \frac{c^2 \mu_0}{n^2} D_i . \quad (11.17)$$

Skorzystamy teraz z równania materialnego (11.3) i wprowadźmy dziewięć wielkości η_{ik} spełniających równanie

$$\eta_{ik} \varepsilon_{kl} = \delta_{il} , \quad (11.18)$$

gdzie δ_{il} - symbol Kronekera.

Z (11.18) i równania materialnego (11.3) otrzymujemy

$$\eta_{il} D_l = \varepsilon_0 \eta_{il} \varepsilon_{lk} E_k = \varepsilon_0 \delta_{ik} E_k = \varepsilon_0 E_i , \quad (11.19a)$$

czyli

$$E_i = \eta_0 \eta_{ij} D_j . \quad (11.19b)$$

Tu $\eta_0 = 1/\varepsilon_0$. Tensor η_{ij} nosi nazwę **tensora nieprzenikalności elektrycznej**.

Po postawieniu (11.19b) do wzoru (11.17) mamy

$$\eta_{il} D_l - k_{0i} k_{0j} \eta_{jl} D_l = \frac{1}{n^2} D_i . \quad (11.20)$$

Tu uwzględniliśmy, że $c^2 = 1/(\mu_0 \varepsilon_0)$.

Dotychczas nic nie mówiliśmy o wyborze osi współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Wybierzemy teraz oś Ox_3 wzdłuż kierunku wektora falowego \vec{k} . Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku $k_{01} = k_{02} = 0; k_{03} = 1$, $D_3 = 0$, ze wzoru (11.20) otrzymujemy następujący układ równań na D_1 i D_2

$$D_1\left(\eta_{11} - \frac{1}{n^2}\right) + D_2\eta_{12} = 0, \quad (11.21a)$$

$$D_1\eta_{12} + D_2\left(\eta_{22} - \frac{1}{n^2}\right) = 0, \quad (11.21b)$$

Układ równań (11.21) ma niezerowe rozwiązanie jeżeli

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} - \frac{1}{n^2} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} - \frac{1}{n^2} \end{vmatrix} = n^{-4} - n^{-2}(\eta_{11} + \eta_{22}) + (\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2) = 0. \quad (11.22)$$

Z rozwiązania równania (11.22) otrzymujemy

$$n_{1,2}^{-2} = \frac{1}{2}[(\eta_{11} + \eta_{22}) \pm \sqrt{(\eta_{11} - \eta_{22})^2 + (2\eta_{12})^2}]. \quad (11.23)$$

Ponieważ prędkość fali jest jednoznacznie związana ze współczynnikiem załamania n , obecność dwóch współczynników załamania $n_{1,2}$ wskazuje na to, że w kierunku osi Ox_3 mogą rozprzestrzeniać się dwie fale o różnych prędkościach $v_{1,2} = c/n_{1,2}$.

Przy zmianie kierunku wektora \vec{k}_0 , a również zmianie kierunku osi współrzędnych, zachodzą zmiany współczynników załamania n_1 i n_2 , ponieważ dla nowego układu współrzędnych wartości liczbowe η_{11}, η_{22} oraz η_{12} będą inne.

Każdy współczynnik załamania będzie miał swój wektor własny \vec{D} . Wektory własne $\vec{D}^{(1),(2)}$, odpowiadające współczynnikom n_1 i n_2 znajdziemy podstawiając n_1 i n_2 do układu równań (11.21).

$$D_1^{(1),(2)}\left(\eta_{11} - \frac{1}{n_{1,2}^2}\right) + D_2^{(1),(2)}\eta_{12} = 0, \quad (11.24a)$$

$$D_1^{(1),(2)}\eta_{12} + D_2^{(1),(2)}\left(\eta_{22} - \frac{1}{n_{1,2}^2}\right) = 0 . \quad (11.24b)$$

Jeżeli wybierzemy osi Ox_1 i Ox_2 w taki sposób żeby $\eta_{12} = 0$ wtedy ze wzoru (11.23) mamy

$$n_1^{-2} = \eta_{11} , \quad (11.25a)$$

$$n_2^{-2} = \eta_{22} , \quad (11.25b)$$

Po uwzględnieniu wzorów (11.25) z równań (11.24) znajdujemy, że wektor $\vec{D}^{(1)}$, odpowiadający współczynnikowi załamania $n_1 = 1/\sqrt{\eta_{11}}$, jest równoległy do osi Ox_1 .

Natomiast wektor $\vec{D}^{(2)}$, odpowiadający współczynnikowi załamania $n_2 = 1/\sqrt{\eta_{22}}$, jest równoległy do osi Ox_2 .

Wykazaliśmy więc, że w kryształach w kierunku określonym wektorem \vec{k}_0 rozchodzą się z różnymi prędkościami dwie spolaryzowane liniowo fale, przy czym ich płaszczyzny polaryzacji (płaszczyzny stworzone z drgających wektorów $\vec{E}^{(1),(2)}$ oraz wektora falowego \vec{k}) są względem siebie prostopadłe.

Charakterystyczną powierzchnią obrazującą zmianę wartości współczynnika załamania w zależności od kierunku rozprzestrzeniania się fali w kryształach nazywamy **indykatryszą optyczną** lub **elipsoidą współczynników załamania**. Równanie indyktryśny optycznej ma postać

$$\eta_{ij}x_ix_j = 1 . \quad (11.26)$$

W układzie głównych osi tensora η_{ij} równanie (11.26) przyjmuje postać

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 , \quad (11.27)$$

gdzie współczynniki

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_1}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta_2}}, \quad n_3 = \frac{1}{\sqrt{\eta_3}} \quad (11.28)$$

nazywamy **głównymi współczynnikami załamania kryształu**. We wzorze (11.28) η_1, η_2, η_3 są główne składowe tensora „nieprzenikalności” dielektrycznej η_{ij} .

Korzystanie z indyktrisy optycznej pozwala stosunkowo łatwo obliczyć współczynniki załamania i polaryzacji fal rozchodzących się w określonym kierunku. Po przecięciu elipsoidy współczynników płaszczyzną prostopadłą do wektora falowego \vec{k} otrzymujemy elipsę. W układzie współrzędnych dla którego oś Ox_3 jest równoległa do wektora \vec{k} , a osi Ox_1 i Ox_2 pokrywają się z głównymi osiami elipsy równanie elipsy ma postać

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} = 1 . \quad (11.29)$$

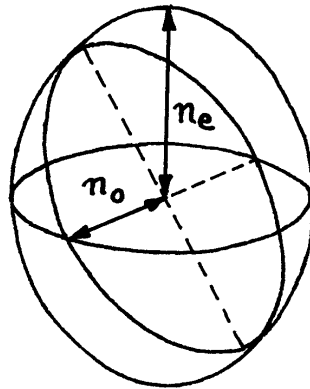
Tu

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_{11}}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta_{22}}} \quad (11.30)$$

są współczynnikami załamania światła rozchodzącego się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny elipsy. Wektor indukcji $\vec{D}^{(1)}$ fali ze współczynnikiem załamania n_1 jest skierowany wzdłuż osi Ox_1 , a wektor indukcji $\vec{D}^{(2)}$ fali ze współczynnikiem załamania n_2 będzie skierowany wzdłuż osi Ox_2 .

Jeżeli kryształ posiada elementy symetrii, to kształt i orientacja indyktrisy optycznej podlega takim samym ograniczeniom co i charakterystyczna powierzchnia każdej innej właściwości fizycznej określonej przez tensor drugiego rzędu. Dla kryształów należących do układów heksagonalnego, tetragonalnego i trygonalnego indyktrisa optyczna jest elipsoidą obrotową dookoła odpowiedniej osi symetrii (rys.11.2). Jeżeli wybierzemy oś symetrii jako oś Ox_3 to równanie indyktrisy przyjmie postać

$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1 . \quad (11.31)$$

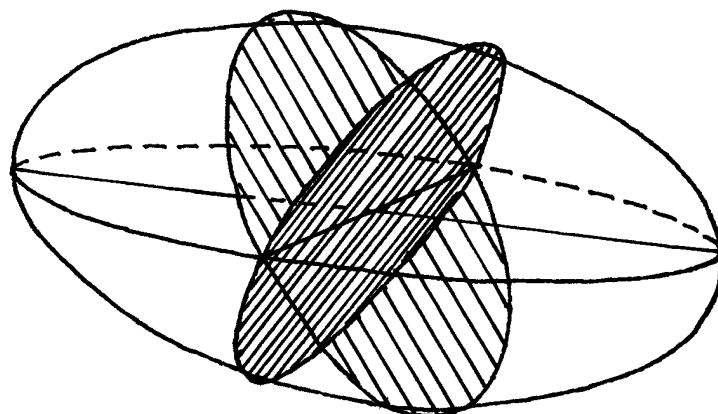


Rys.11.2. Indykatrysa optyczna jednoosiowego kryształu

Dla elipsoidy obrotowej istnieje tylko jeden przekrój w postaci koła. Jest to przekrój środkowy, prostopadły do osi symetrii kryształu. Promień tego przekroju kołowego wynosi n_o . Dlatego fala świetlna rozchodząca się w kierunku osi symetrii kryształu nie będzie ulegała podwójnemu załamaniu. Oś tę nazywamy **osią optyczną kryształu**, a takie kryształy nazywamy kryształami **jednoosiowymi**. Inne przekroje środkowe indyktrysy optycznej kryształu jednoosiowego są elipsami. Jedną z osi elipsy ma zawsze długość n_o . Długość drugiej osi elipsy zmienia się od n_o do n_e . Zatem w jednoosiowym kryształach jedna z fal świetlnych ma taki sam współczynnik załamania n_o w dowolnym kierunku rozchodzenia się fali. Fale tę nazywamy **zwyczajną falą**, a współczynnik załamania n_o tej fali nazywamy **zwyczajnym współczynnikiem załamania**. Współczynnik załamania drugiej fali, który zmienia się od n_o do n_e nosi nazwę **współczynnika nadzwyczajnego**, a fale tę nazywamy **falą nadzwyczajną**. Jeżeli $n_e - n_o > 0$, kryształ nazywamy **optycznie dodatnim**. Gdy $n_e - n_o < 0$, mówimy, że kryształ jest **optycznie ujemny**.

Dla kryształów układów trójosiowego, jednoskośnego i rombowego elipsoida współczynników załamania jest elipsoidą trójosiową (rys.11.3). Elipsoida trójosiowa ma dwa przekroje kołowe o promieniach równych średniemu co do wartości współczynnikowi załamania n_m . Stąd fale świetlne rozchodzące się w kierunkach prostopadłych do tych dwóch przekrojów kołowych nie będą ulegały podwójnemu załamaniu. Te dwa kierunki nazywamy **osiami optycznymi kryształu**, a kryształy takie nazywamy **kryształami dwuosiowymi**. W

przypadku kryształu dwuosowego współczynniki załamania dla dwóch fal zależą od kierunku rozchodzenia się fal, a więc obie fale są falami nadzwyczajnymi.



Rys.11.3. Indykatrysa optyczna dwuosowego kryształu

Dla kryształów należących do układu regularnego elipsoida współczynników załamania jest kulą, a więc dowolne przekroje środkowe indyktrysy optycznej są kołami. Zatem w kryształach układu regularnego w dowolnym kierunku rozchodzi się tylko jedna fala, której współczynnik załamania jest stały. Zjawisko dwójłomności światła w kryształach układu regularnego nie obserwuje się, a więc te kryształy są optycznie izotropowe.

Anizotropia dielektrycznych własności kryształów powoduje, że w ogólnym przypadku kierunek rozchodzenia się czoła fali (kierunek wektora falowego \vec{k}_0) nie pokrywa się z kierunkiem promienia świetlnego, czyli z kierunkiem rozchodzenia się strumienia energii fali świetlnej. Kierunek promienia świetlnego określa wektor Poyntinga-Umowa

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \times \vec{B}] = [\vec{E} \times \vec{H}] . \quad (11.32)$$

Tu uwzględniliśmy wzór (11.5). Wektor \vec{H} leży w płaszczyźnie czoła fali. Natomiast wektor \vec{E} nie leży w tej płaszczyźnie (rys.11.1), a więc iloczyn wektorowy \vec{E} i \vec{H} nie pokrywa się z kierunkiem wektora falowego \vec{k}_0 , a leży w płaszczyźnie wspólnej z wektorami \vec{D} , \vec{E} i \vec{k}_0 (rys.11.1). Ponieważ w kierunku wektora \vec{k}_0 rozchodzą się dwie fale z wektorami indukcji

elektrycznej $\vec{D}^{(1)}$ i $\vec{D}^{(2)}$, odpowiadającymi im promieniami świetlnymi będą $\vec{S}^{(1)}$ i $\vec{S}^{(2)}$. Z wektorem falowym \vec{k}_0 promieni świetlne $\vec{S}^{(1)}$ i $\vec{S}^{(2)}$ tworzą kąty α i β :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{D}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)}}{\left| \vec{D}^{(1)} \right| \left| \vec{E}^{(1)} \right|}, \quad (11.33)$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{D}^{(2)} \cdot \vec{E}^{(2)}}{\left| \vec{D}^{(2)} \right| \left| \vec{E}^{(2)} \right|}, \quad (11.34)$$

Ze wzoru (11.32) wynika, że jednostkowy wektor $\vec{s} = \vec{S} / |\vec{S}|$ wzdłuż promienia świetlnego jest prostopadły do wektorów \vec{E} i \vec{H} , czyli

$$(\vec{s} \cdot \vec{E}) = 0, \quad (\vec{s} \cdot \vec{H}) = 0. \quad (11.35)$$

Korzystając ze wzorów (11.13) i (11.14), obliczymy iloczyny wektorowe wektora \vec{s} oraz wektorów \vec{D} i \vec{H} :

$$\begin{aligned} [\vec{s} \times \vec{D}] &= -\frac{n}{c} [\vec{s} \times [\vec{k}_0 \times H]] \\ &= -\frac{n}{c} \{ \vec{k}_0 \cdot (\vec{s} \cdot \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{k}_0) \} = \frac{1}{c \cdot q} \cdot \vec{H}, \end{aligned} \quad (11.36a)$$

$$\begin{aligned} [\vec{s} \times \vec{H}] &= \frac{n}{c\mu_0} [\vec{s} \times [\vec{k}_0 \times \vec{E}]] \\ &= \frac{n}{c\mu_0} \{ \vec{k}_0 \cdot (\vec{s} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{k}_0) \} = -\frac{1}{(c\mu_0) \cdot q} \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (11.36b)$$

Tu

$$q = \frac{1}{n \cdot (\vec{s} \cdot \vec{k}_0)} = \frac{1}{n \cdot \cos \alpha}. \quad (11.37)$$

Ponieważ prędkość rozchodzenia się energii fali świetlnej w kierunku promienia świetlnego wynosi $u = v / \cos \alpha$, wielkość $q = 1 / (n \cdot \cos \alpha) = u / c$ jest odwrotnie proporcjonalna do współczynnika załamania.

Porównajmy teraz równania Maxwella dla wektora falowego \vec{k}_0 (równania (11.13) i (11.14), oraz (11.3)) z równaniami (11.36) i (11.19) dla wektora promienia świetlnego \vec{s} :

wektor \vec{k}_0	Wektor \vec{s}
$n[\vec{k}_0 \times \vec{H}] = -c\vec{D}$	$q[\vec{s} \times \vec{H}] = -c\epsilon_0\vec{E}$
$n[\vec{k}_0 \times \vec{E}] = c\mu_0\vec{H}$	$q[\vec{s} \times \eta_0\vec{D}] = c\mu_0\vec{H}$
$E_i = \eta_0\eta_{ij}D_j$	$D_i = \epsilon_0\epsilon_{ij}E_j$

(11.38)

Ze wzorów (11.38) wynika, że układ równań dla wektora falowego \vec{k}_0 przechodzi do układu równań dla wektora promienia świetlnego \vec{s} , jeżeli w tych równaniach wykonamy zamianę:

$$\vec{E} \Rightarrow \eta_0\vec{D}, \quad \vec{D} \Rightarrow \epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{H} \Rightarrow \vec{H}, \quad \vec{k}_0 \Rightarrow \vec{s}, \quad \eta_{ij} \Rightarrow \epsilon_{ij}, \quad n \Rightarrow q. \quad (11.39)$$

Korzystając z podobieństwa układów równań dla wektorów \vec{k}_0 i \vec{s} możemy z otrzymanych wyżej wyników dla wektora falowego \vec{k}_0 od razu otrzymać wyniki dla wektora promienia świetlnego \vec{s} . Dla promienia świetlnego rolę powierzchni charakterystycznej odgrywa **elipsoida Fresnela**

$$\epsilon_{ij}x_ix_j = 1. \quad (11.40)$$

Dla optycznie dwuosiowego kryształu elipsoida Fresnela jest elipsoidą trójosiową i w układzie głównych osi tensora przenikalności dielektrycznej ϵ_{ij} równanie elipsoidy Fresnela ma postać

$$n_1^2x_1^2 + n_2^2x_2^2 + n_3^2x_3^2 = 1. \quad (11.41)$$

Tu $n_1 = \sqrt{\epsilon_1} = 1/\sqrt{\eta_1}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2} = 1/\sqrt{\eta_2}$, $n_3 = \sqrt{\epsilon_3} = 1/\sqrt{\eta_3}$.

Dla optycznie jednoosiowego kryształu równanie elipsoidy Fresnela ma postać

$$n_0^2x_1^2 + n_0^2x_2^2 + n_e^2x_3^2 = 1. \quad (11.42)$$

Dla kryształów układu regularnego elipsoida Fresnela jest kulą o promieniu $q = 1/n$.