Wykład 10

Zjawisko piezoelektryczności

Rozróżniamy efekt piezoelektryczny prosty i odwrotny. Efekt piezoelektryczny prosty obejmuje zjawiska polegające na tym, że w pewnych kryształach naprężenia mechaniczne albo deformacje powodują wystąpienie w nich polaryzacji elektrycznej albo pola elektrycznego, które są wprost proporcjonalne do wielkości przyłożonego naprężenia albo deformacji. Prosty efekt piezoelektryczny opisują cztery równania:

$$P_i = d_{ijk} t_{jk} \;, \quad P_i = e_{ijk} r_{jk} \;, \tag{10.1a}$$

$$E_i = -g_{ijk} t_{jk} \;, \quad E_i = -h_{ijk} t_{jk} \;. \tag{10.1b}$$

We wzorach (10.1) P_i i E_i są składowymi wektora polaryzacji elektrycznej i wektora natężenia pola elektrycznego; t_{jk} i r_{jk} – składowe tensora naprężenia i tensora deformacji.

Efekt piezoelektryczny odwrotny, jak widać z nazwy efektu, obejmuje grupę zjawisk polegających na tym, że kryształ pod wpływem z zewnątrz pola elektrycznego albo zmiany polaryzacji elektrycznej kryształu deformuje się i zmienia swój kształt. Odwrotny efekt piezoelektryczny opisują też cztery równania:

$$r_{jk} = d_{ijk} E_i \;, \quad r_{jk} = g_{ijk} P_i \;, \tag{10.2a}$$

$$t_{jk} = -e_{ijk} E_i \;, \quad t_{jk} = -h_{ijk} P_i \;. \tag{10.2b}$$

We wzorach (10.1) i (10.2) wielkości d_{ijk}, e_{ijk}, g_{ijk}, h_{ijk}, określające efekt piezoelektryczny prosty i odwrotny, tworzą odpowiednie tensory trzeciego rzędu – **tensory współczynników piezoelektryczności**. Współczynniki d_{ijk} zwykle nazywane są **modułami piezoelektryczności**.

W ogólnym przypadku tensor trzeciego rzędu ma $3^3 = 27$ składowych. Jednak wskutek tego, że tensory drugiego rzędu t_{jk} i r_{jk} są tensorami symetrycznymi (t_{jk} = t_{kj}; r_{jk} = r_{kj}) ze wzorów (10.1) i (10.2) wynika, że tylko 18 składowych tych tensorów jest niezależnych. Istotnie, biorąc pod uwagę symetrię tensora t_{jk}, na przykład wzór (10.1a) możemy zapisać w postaci

$$P_i = \frac{(d_{ijk} + d_{ikj})}{2} \cdot t_{jk} \quad . \tag{10.3}$$

Stąd widzimy, że współczynniki d_{ijk} i d_{ikj} występują parami w równaniu prostego efektu piezoelektrycznego. Oznacza to, że nie można przeprowadzić takiego eksperymentu, który pozwoliłby zmierzyć oddzielnie d_{ijk} i d_{ikj}. Zawsze będziemy mierzyli sumę tych dwóch składowych tensora d_{ijk}. Ten element niejednoznaczności w wyborze pojedynczych współczynników d_{ijk} i d_{ikj} możemy usunąć zakładając, że

$$d_{ijk} = d_{ikj} \quad . \tag{10.4}$$

Symetria (10.4) tensora d_{ijk} względem wskaźników j i k zmniejsza liczbę niezależnych składowych tensora d_{ijk} do osiemnastu.

Podobne rozumowania, przeprowadzone dla tensorów e_{ijk}, g_{ijk}, h_{ijk} doprowadzą do wniosku, że te tensory również mają tylko 18 niezależnych składowych.

Współczynniki d_{ijk}, e_{ijk}, g_{ijk}, h_{ijk} nie są niezależne od siebie. Na przykład, korzystając z uogólnionego prawa Hooke'a łatwo otrzymać ze wzorów (10.1a) i (10.1b)

$$d_{mjk}E_m = r_{jk} = s_{jknl}t_{nl} = -s_{jknl}e_{mnl}E_m \quad ,$$

skąd

$$d_{mjk} = -s_{jknl}e_{mnl} \quad . \tag{10.6}$$

W podobny sposób możemy znaleźć, że

$$e_{mjk}E_m = -t_{jk} = -c_{jknl}r_{nl} = -c_{jknl}d_{mnl}E_m \quad ,$$

skąd

$$e_{mjk} = -c_{jknl}d_{mnl} \quad . \tag{10.7}$$

Fakt, iż składowe tensorów t_{jk}, r_{jk}, oraz tensorów d_{ijk}, e_{ijk}, g_{ijk}, h_{ijk} są symetryczne ze względu na wskaźniki j i k, daje możliwość wprowadzenia bardziej zwięzłego zapisu równań efektu piezoelektrycznego, znanego pod nazwą zapisu macierzowego. W tym celu zastępujemy dwa wskaźniki j i k w równaniach (10.1) i (10.2) jednym wskaźnikiem, zmieniającym się od 1 do 6 zgodnie z regułą:

Zapis wskaźników (jk) Tensorowy	11	22	33	23,32	31,13	12,21
Zapis macierzowy (m) wskaźników (jk)	1	2	3	4	5	6

(10.8)

$$d_{ijk} = d_{im}\ , \qquad \text{gdy } m = 1,2 \text{ lub } 3;\ \ i = 1,2,3,$$
$$2d_{ijk} = d_{im}\ , \qquad \text{gdy } m = 4,5 \text{ lub } 6;\ \ i = 1,2,3. \tag{10.9}$$

Wprowadzenie czynnika 2 w definicji składowych d_{im} (m = 4,5,6) jest związane z chęcią uniknięcia tego czynnika w zapisie macierzowym równań efektu piezoelektrycznego, które przyjmują teraz postać:

$$P_i = d_{im}t_m\ , \quad P_i = e_{im}r_m\ , \tag{10.10a}$$

$$E_i = -g_{im}t_m\ , \quad E_i = -h_{im}r_m\ , \tag{10.10b}$$

$$r_m = d_{im}E_i\ , \quad r_m = g_{im}P_i\ , \tag{10.11a}$$

$$t_m = -e_{im}E_i\ , \quad t_m = -h_{im}P_i\ . \tag{10.11b}$$

Oznaczenie składowych tensorów d_{ijk}, e_{ijk}, g_{ijk}, h_{ijk} za pomocą dwóch wskaźników daje możliwość zapisu wszystkich współczynników piezoelektryczności w postaci tabelki. Na przykład moduły piezoelektryczności d_{ijk} możemy zapisać jako

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}. \tag{10.12}$$

Należy jednak zawsze pamiętać, że współczynniki d_{im}, charakteryzujące się dwoma wskaźnikami, nie transformują się jak składowe tensora drugiego rzędu.

Tensory d_{im}, e_{im}, g_{im}, h_{im} są tensorami materii, a więc występująca w kryształach symetria, zgodnie z zasadą Neumanna, redukuje w znacznym stopniu liczbę niezależnych współczynników piezoelektryczności. Wcześniej wykazaliśmy, że kryształy w których występuje środek symetrii nie mogą mieć własności piezoelektrycznych. Efekt piezoelektryczny może występować tylko w kryształach należących do 10-ciu klas polarnych, co stanowi cenną wskazówkę przy analizie struktury kryształów metodą rentgenograficzną.

W praktyce efekt piezoelektryczny najczęściej bada się ściskając cienką płytkę wyciętą z kryształu. W ogólnym przypadku przy ściskaniu płytki piezoelektryka powstająca polaryzacja elektryczna jest skierowana nie zawsze prostopadłe do powierzchni płytki. Jeżeli okładki metalowe, za pomocą których mierzymy indukowane na powierzchni płytki ładunki elektryczne, są rozmieszczone prostopadle do pary sił, ściskających płytkę, to doświadczalne będziemy mierzyli tylko podłużną składową polaryzacji elektrycznej, tj. składową $P_{\|}$ wektora polaryzacji $\vec{P}$, równoległa do kierunku działania naprężenia ściskającego płytkę. Mierzony w taki sposób efekt piezoelektryczny nazywamy **podłużnym**. Podłużny efekt piezoelektryczny możemy przedstawić graficznie za pomocą powierzchni podłużnego efektu piezoelektrycznego. Promień wodzący tej powierzchni pokrywa się z kierunkiem działania siły ściskającej, długość zaś jest proporcjonalna do ładunku elektrycznego indukowanego działaniem jednostki siły na jednostkę powierzchni płytki, wyciętej prostopadle do kierunku działającej siły.

Efekty piezoelektryczne prosty i odwrotny zawsze są powiązane między sobą. Naprężenie zewnętrzne przyłożone do kryształu piezoelektrycznego wskutek prostego efektu piezoelektrycznego wywołuje w nim polaryzację. Z kolei ładunki elektryczne indukowane na powierzchni piezoelektryka wytwarzają pole elektryczne, które prowadzi, wskutek odwrotnego efektu, do jego deformacji. Ważną charakterystyką piezoelektryka z punktu widzenia jego zastosowań w przetwornikach jest czynnik sprzężenia elektromechanicznego k, który określamy dla prostego efektu jako

$$k = \sqrt{\frac{zmagazynowana \quad energia \quad elektryczna}{zmagazynowana \quad energia \quad mechaniczna}} \ . \tag{10.13}$$

Przykład 10.1. Obliczymy czynnik sprzężenia elektromechanicznego k na przykładzie cienkiej płytki wyciętej z piezoelektryka na którą działa para sił prostopadle do powierzchni płytki. Jeżeli oznaczmy przez $\vec{n}$ wektor jednostkowy normalny do powierzchni płytki, to tensor naprężenia w przypadku efektu podłużnego ma składowe

$$t_{ij} = t \cdot n_i n_j \quad . \tag{10.14}$$

Umówmy się, że dla naprężenia ściskającego płytkę $(t > 0)$.

Gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego które powstaje na powierzchni płytki wskutek prostego efektu piezoelektrycznego wynosi

$$\sigma = \left|\vec{n} \cdot \vec{P}\right| = \left|P_n\right|, \tag{10.15}$$

gdzie P_n - składowa wektora polaryzacji wzdłuż kierunku prostopadłego do powierzchni płytki.

Zgodnie z równaniem prostego efektu piezoelektrycznego (10.10a) mamy

$$P_n = d_{33} \cdot t \quad . \tag{10.16}$$

Tu Oz wybraliśmy wzdłuż jednostkowego wektora $\vec{n}$.
Występujące na przeciwległych powierzchniach płytki ładunki elektryczne wytwarzają pole elektryczne, które ma kierunek przeciwny do wektora polaryzacji. Składowa natężenia tego pola wzdłuż osi Oz wynosi

$$E_z = -\frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} = -\frac{d_{33}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} \cdot t \quad . \tag{10.17}$$

Zgodnie z równaniem odwrotnego efektu piezoelektrycznego (10.11a) i uogólnionym prawem Hooke'a dla składowych tensora deformacji r_m możemy zapisać

$$r_m = s_{m3} \cdot t + d_{33} E_z = (s_{m3} - \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}}) \cdot t \quad . \tag{10.18}$$

Energia sprężysta pytki o grubości a, zgodnie z (10.19) wynosi

$$W_{sp} = \frac{1}{2} a \cdot t_m r_m = \frac{1}{2} a t^2 s_{33} - \frac{1}{2} a t^2 \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} \quad . \tag{10.19}$$

Energia elektryczna zmagazynowana w spolaryzowanej płytce na jednostce pola powierzchni płytki jest równa

$$W_{el} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}}{a} \cdot (a \cdot \frac{d_{33}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} \cdot t)^2 = \frac{1}{2} at^2 \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} \ . \tag{10.20}$$

Z porównania wzorów (10.19) i (10.20) widzimy, że energia sprężysta płytki zmniejsza się o tyle o ile rośnie energia związana z polaryzacją płytki. Stosunek $W_{el} /(W_{el} + W_{sp})$ właśnie określa tą cześć energii mechanicznej $R_{mech} = W_{el} + W_{sp}$ która została zużyta na polaryzację płytki. Więc, dla czynnika sprzężenia elektromechanicznego k otrzymujemy

$$k = \sqrt{\frac{W_{el}}{R_{mech}}} = \frac{d_{33}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{33} s_{33}}} \ . \tag{10.21}$$

W przypadku efektu odwrotnego zewnętrzne pole elektryczne powoduje deformację płytki wzdłuż osi Oz: $r_3 = d_{33} E_3$. Deformacja płytki, wskutek prostego efektu, wywołuje polaryzacje płytki $(P_3 = e_{33} r_3 = e_{33} d_{33} E_3 = -c_{33} d_{33} d_{33} E_3)$. Wypadkowe pole elektryczne będzie równe sumie pola zewnętrznego i pola indukowanych ładunków. Składowa wypadkowego pola elektrycznego wzdłuż osi Oz wynosi więc

$$E_z = E_3 (1 - \frac{d_{33} c_{33} d_{33}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}}) \ . \tag{10.22}$$

Energia sprężysta płytki grubości a wynosi

$$W_{sp} = \frac{1}{2} a \cdot t_m r_m = \frac{1}{2} a \cdot c_{mk} r_k r_m = \frac{1}{2} a E_3^2 (d_{33} c_{33} d_{33}) \ . \tag{10.23}$$

Energia pola elektrycznego, zgodnie z (10.22), zmagazynowana w płytce jest równa

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}}{a} \cdot E_3^2 a^2 \cdot (1 - \frac{d_{33} c_{33} d_{33}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}})^2 \\ &\cong \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{33} a E_3^2 - a E_3^2 (d_{33} c_{33} d_{33}) \end{aligned} \ . \tag{10.24}$$

Z porównania wzorów (10.23) i (10.24) widzimy, że energia elektryczna płytki zmniejsza się i idzie na polaryzację i deformację płytki. Stosunek $W_{sp}/(W_{el}+2W_{sp})$ właśnie określa tą cześć energii elektrycznej $R_{el}=W_{el}+2W_{sp}$ która została zużyta na deformację płytki. Więc, dla czynnika sprzężenia elektromechanicznego k w tym przypadku otrzymujemy

$$k=\sqrt{\frac{W_{sp}}{R_{el}}}=d_{33}\sqrt{\frac{c_{33}}{\varepsilon_0\varepsilon_{33}}} \quad . \tag{10.25}$$

Przykład 10.2. Wykażemy, że macierz d_{im} modułów piezoelektryczności ferroelektryka winianu sodowo - potasowego (sól Siegnette'a , $NaKC_4H_4O_6 4H_2O$, grupa punktowa 222) ma postać

$$[d_{im}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}. \tag{10.26}$$

Skorzystamy z metody bezpośredniego sprawdzania. Rozważmy najpierw przekształcenie składowych tensora d_{ijk} wskutek działania osi dwukrotnej równoległej do osi Ox_3. Obrót układu współrzędnych dookoła tej osi o kąt 180^0 doprowadzi do następujących przekształceń współrzędnych: $x_1\to -x_1$, $x_2\to -x_2$, $x_3\to x_3$. Stąd otrzymujemy, że niezerowe jest 8 modułów: d_{14}, d_{15}, d_{24}, d_{25}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{36}. Rozważmy teraz przekształcenie składowych tensora d_{ijk} wskutek działania osi dwukrotnej równoległej do osi Ox_2. Obrót układu współrzędnych dookoła tej osi o kąt 180^0 doprowadzi do następujących przekształceń współrzędnych: $x_1\to -x_1$, $x_2\to x_2$, $x_3\to -x_3$. Stąd otrzymujemy, że spośród 8 modułów pięć jest równych zeru: $d_{15}=0$, $d_{24}=0$, $d_{31}=d_{32}=d_{33}=0$. A więc macierz modułów piezoelektryczności soli Siegnette'a ma trzy niezerowe moduły i ma postać (10.26).

Przykład 10.3. Wykażemy, że równanie powierzchni podłużnego efektu piezoelektrycznego ma postać

$$r=n_in_jn_kd_{ijk} \quad . \tag{10.27}$$

Tu r - długość promienia wodzącego w kierunku określonym jednostkowym wektorem $\vec{n}$; n_i - cosinusy kierunkowe wektora $\vec{n}$ w wybranym układzie współrzędnych.

Niech układ współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 jest krystałofizycznym układem współrzędnych. Wprowadźmy nowy układ współrzędnych $Ox_1^/, Ox_2^/, Ox_3^/$, związany z płytką tak aby oś $Ox_1^/$ była prostopadła do powierzchni płytki. Jeżeli poddajemy płytkę działaniu naprężenia rozciągającego o kierunku prostopadłym do powierzchni płytki, w płytce z piezoelektryka wystąpi polaryzacja o składowych we wszystkich trzech kierunkach $Ox_1^/, Ox_2^/, Ox_3^/$. Zgodnie ze wzorem (10.1a), składowa wektora polaryzacji w kierunku osi $Ox_1^/$, którą mierzymy w efekcie podłużnym, wynosi

$$P_1^/ = d_{111}^/ \cdot t_{11}^/ \ . \tag{10.28}$$

Tu $d_{111}^/$ jest składową tensora modułów piezoelektryczności w „primowanym" układzie współrzędnych.

Zgodnie z określeniem powierzchni charakterystycznej podłużnego efektu piezoelektrycznego promień wodzący tej powierzchni w kierunku osi $Ox_1^/$ jest równy modułowi $d_{111}^/$ ($|P_1^/| = |\sigma|$, gdzie σ jest gęstością powierzchniową ładunku polaryzacyjnego), a więc

$$r = d_{111}^/ \ . \tag{10.29}$$

Korzystając z reguł transformacji składowych tensora trzeciego rzędu, wzór (10.29) możemy zapisać w postaci

$$r = \alpha_{1^/ i}\alpha_{1^/ j}\alpha_{1^/ k} d_{ijk}^/ \ . \tag{10.30}$$

Zamieniając we wzorze (10.30) wskaźnik $1^/$ na n i biorąc pod uwagę, że $\alpha_{ni} \equiv n_i$, otrzymujemy wzór (10.27).

Przykład 10.4. Wykażemy, że w krysztale soli Siegnette'a istnieją takie kierunki w których podłużny efekt piezoelektryczny nie jest obserwowany.

Sól Siegnette'a, zgodnie z (10.26), ma trzy niezerowe moduły piezoelektryczności

$$d_{14} = 2d_{123} \ , \quad d_{25} = 2d_{231} \ , \quad d_{36} = 2d_{321} \ . \tag{10.31}$$

Podstawiając (10.31) do równania powierzchni podłużnego efektu piezoelektrycznego (10.27) mamy

$$r = n_1 n_2 n_3 (2d_{123} + 2d_{231} + 2d_{321}) \ . \qquad (10.32)$$

Ze wzoru (10.32) wynika, że jeżeli płytka z kryształu soli Siegnette'a jest ściśnięta wzdłuż jednej z osi dwukrotnej (na przykład $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$), to efekt podłużny nie jest obserwowany. Maksymalny efekt podłużny ma płytka dla której wektor prostopadły do powierzchni płytki pokrywa się z kierunkiem [111] ($n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$).

Przykład 10.5. Obliczymy czynnik sprzężenia elektromechanicznego k cienkiej płytki wyciętej z soli Siegnette'a w kształcie prostopadłościanu. Powierzchnia płytki jest zorientowana prostopadłe do osi Ox_1 (oś 2). Wektor natężenia pola elektrycznego, wzbudzający poprzeczne drgania płytki, jest równoległy do osi Ox_1. Krawędź płytki (oś $Ox_2^/$) tworzy kąt 45^0 z osiami Ox_3 (oś 2) i Ox_2 (oś 2).

Zgodnie ze wzorem (10.11a) równanie poprzecznego piezoelektrycznego wzbudzenia takiej płytki ma postać

$$r_{2'} = d_{1'2'} E_1 \ . \qquad (10.33)$$

Czynnik sprzężenia elektromechanicznego określa w tym przypadku wzór

$$k = \frac{d_{1'2'}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{11} s_{2'2'}}} \ . \qquad (10.34)$$

Korzystając z reguł przekształcenia składowych tensora trzeciego rzędu oraz uwzględniając, że macierz $\alpha_{i'j}$ przekształcenia osi współrzędnych ma postać

$$\left[\alpha_{i'j}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^0 & \sin 45^0 \\ 0 & -\sin 45^0 & \cos 45^0 \end{bmatrix} , \qquad (10.35)$$

otrzymujemy

$$d_{1'2'} \equiv d_{1'2'2'} = \alpha_{1'i}\alpha_{2'j}\alpha_{2'k}d_{ijk} =$$

$$= \alpha_{1'1}(\alpha_{2'2}\alpha_{2'2}d_{122} + \alpha_{2'2}\alpha_{2'3}d_{123} + \alpha_{2'3}\alpha_{2'2}d_{132} + \alpha_{2'3}\alpha_{2'3}d_{133}) =$$

$$= \frac{1}{2}(d_{12} + d_{14} + d_{13})\,. \tag{10.36}$$

Korzystając z postaci macierzy piezoelektrycznych modułów (10.26) dla soli Siegnette'a, ze wzoru (10.36) otrzymujemy

$$d_{1'2'} = \frac{1}{2}d_{14}\,. \tag{10.37}$$

W sposób podobny, korzystając z reguł przekształcenia składowych tensora czwartego rzędu oraz uwzględniając postać macierzy $\alpha_{i'j}$ przekształcenia osi współrzędnych (10.35) znajdujemy

$$s_{2'2'} \equiv s_{2'2'2'2'} = \alpha_{2'i}\alpha_{2'j}\alpha_{2'k}\alpha_{2'l}s_{ijkl} = \alpha_{2'2}\alpha_{2'2}\alpha_{2'2}\alpha_{2'2}s_{2222} + \alpha_{2'3}\alpha_{2'3}\alpha_{2'3}\alpha_{2'3}s_{3333} +$$

$$+\alpha_{2'2}\alpha_{2'2}\alpha_{2'2}\alpha_{2'3}(s_{2223} + s_{2232} + s_{2322} + s_{3222}) +$$

$$+\alpha_{2'2}\alpha_{2'2}\alpha_{2'3}\alpha_{2'3}(s_{2233} + s_{2323} + s_{3223} + s_{3232} + s_{3322} + s_{2332}) +$$

$$+\alpha_{2'3}\alpha_{2'3}\alpha_{2'3}\alpha_{2'2}(s_{3332} + s_{3323} + s_{3233} + s_{2333}) =$$

$$= \frac{1}{4}[s_{22} + s_{33} + (s_{24} + s_{42}) + (s_{23} + s_{32} + s_{44}) + (s_{34} + s_{43})] \tag{10.38}$$

Biorąc pod uwagę postać macierzy współczynników sprężystości dla soli Siegnette'a

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix},$$

ze wzoru (10.38) otrzymujemy

$$s_{2'2'} = \frac{1}{4}(s_{22} + s_{33} + 2s_{23} + s_{44}) \ . \qquad (10.39)$$

Po podstawieniu (10.37) i (10.39) do wzoru (10.34) znajdujemy

$$k = \frac{d_{14}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{11}(s_{22} + s_{33} + s_{44} + 2s_{23})}} \ . \qquad (10.40)$$