Wykład 1

Mechanika Newtona

Punkt materialny. Prawa Newtona i inercjalne układy odniesienia

Każde makroskopowe ciało fizyczne składa się z olbrzymiej liczby mikroskopowych cząstek (molekuł, atomów, elektronów), które znajdują się w ciągłym ruchu. W celu uproszczenia opisu ruchu ciała makroskopowego jako całości w mechanice klasycznej wprowadzamy idealizacji (modeli). Główne modeli w mechanice klasycznej to są: 1) *model punktu materialnego*, oraz 2) *model ciała sztywnego*. Punktem materialnym nazywamy ciało o nieskończenie małych wymiarach. Natomiast ciałem sztywnym nazywamy ciało kształt którego oraz rozmiary nie ulegają zmianie podczas ruchu ciała. Należy zawsze pamiętać, że stosowanie konkretnej idealizacji zależy od rozważanego zagadnienia i tylko zgodność wyników teorii z doświadczeniem jest sprawdzianem słuszności wybranego modelu.
Podstawą mechaniki klasycznej są trzy doświadczalne zasady Newtona :

Zasada 1 (zasada bezwładności). *Istnieją taki układy odniesienia w których punkt materialny znajduje się w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego, dopóki siły działające na ten punkt nie zmienią tego stanu.*

Układem odniesienia, jak wiemy z podstaw fizyki, nazywamy wybrany układ współrzędnych + zegar. Siła tutaj jest miarą oddziaływania punktu materialnego z drugimi punktami materialnymi albo z polami fizycznymi. Siły taki nazywamy *siłami rzeczywistymi*. Dla sił rzeczywistych zawrze możemy wskazać źródło fizyczne (ciało albo pole fizyczne) tej siły. Z pierwszej zasady Newtona wynika, że jeżeli na punkt materialny nie działa żadna rzeczywista siła, to wektor określający położenie tego odosobnionego ciała w przestrzeni (czyli wektor wodzący) jest funkcją liniową czasu

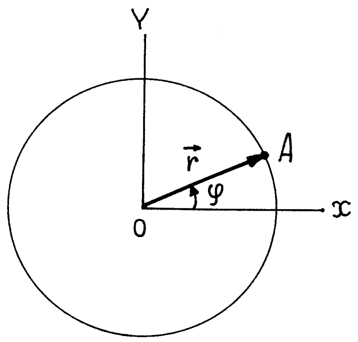
$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{\upsilon} \cdot t \ . \tag{1.1}$$

Tu $\vec{r_0}$ - wektor położenia punktu materialnego w chwili $t = 0$, a $\vec{\upsilon}$ - nie zależny od czasu wektor jego prędkości w wybranym układzie odniesienia.

Łatwo sprawdzić, że wzór (1.1) jest słusznym nie dla wszystkich układów odniesienia. Jako przykład, rozważmy układ odniesienia K i niech w tym układzie na punkt materialny A $(x = x_0, y = z = 0)$ nie działa żadna siła i punkt znajduje się w spoczynku, tj $\vec{\upsilon} = 0$.

Rozpatrzmy teraz ten sam punkt materialny A w układzie odniesienia $K^{/}$, który obraca się względem układu K dookoła osi Oz ze stałą prędkością kątową ω („karuzela"). Względem układu odniesienia $K^{/}$ zależność współrzędnych punktu A od czasu opisuje wzór

$$x^{/} = -x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \;\; y^{/} = -x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t), \;\; z^{/} = z \; . \tag{1.2}$$



Rys.1.1. Określenie położenia punktu materialnego w dwóch układach odniesienia K i $K^{/}$.

Z porównania (1.1) i (1.2) widzimy, że w układzie odniesienia $K^{/}$ punkt materialny porusza się z przyspieszeniem, chociaż żadna siła rzeczywista nie działa na ten punkt. Więc w układzie odniesienia $K^{/}$ pierwsza zasada Newtona nie jest słuszna. Układy odniesienia, w których dla odosobnionego (izolowanego) punktu materialnego równanie (1.1) jest spełnione nazywamy *układami inercjalnymi*. Odpowiednio, układy odniesienia w których wzór (1.1) nie jest słusznym nazywamy *układami nie inercjalnymi.*

Zasada 2 (zasada ruchu). *Zmiana pędu punktu materialnego w układzie inercjalnym jest proporcjonalna względem siły działającej na punkt i ma kierunek prostej, wzdłuż której ta siła działa* :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \; . \tag{1.3}$$

Tu

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \tag{1.4}$$

jest pędem punktu materialnego.

We wzorze (1.4) wielkość m nosi nazwę *masy bezwładnej punktu materialnego (ciała).* Pod wpływem pewnej siły określona zmiana prędkości ciała mającego większą masę zachodzi w dłuższym czasie niż w przypadku ciała o mniejszej masie (ze wzoru (1.3) wynika, że $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{F} \cdot (\Delta t/m)$).

Z szczególnej teorii względności Einsteina i doświadczeń wynika, że jeżeli prędkości ciała są małe w porównaniu z prędkością światła $(\upsilon << c)$, to bezwładna masa jest uniwersalną stałą nie zależną od prędkości ciała.

Oprócz masy bezwładnej ciała istnieje *masa ważka* ciała, którą mierzymy dynamometrem. Z doświadczeń oraz ogólnej teorii względności Einsteina wynika, że *masa bezwładna równa się masie ważkiej* .

Ponieważ w mechanice nierelatywistycznej $(\upsilon << c)$ masa ciała jest stała w czasie ruchu, wzór (1.3) możemy zapisać w postaci

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}) \equiv m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad . \tag{1.5}$$

Drugą zasadę Newtona możemy również zastosować do układów nie inercjalnych. Jednak, jak zobaczymy później, musimy wtedy wprowadzić siły pozorne *(albo siły bezwładności)*. Przykładem takiej siły, jak wiemy z podstaw fizyki, jest siła Coriolisa. Dla sił pozornych, które powstają w nie inercjalnych układach odniesienia nie istnieje źródło fizyczne tych sił. Chociaż skutki działania tych sił na ciała fizyczne takie same, jak skutki działania sił rzeczywistych (ciała poruszają się, deformują się i tp.).

Zasada 3 (zasada akcji i reakcji). *Siły, jakimi dwa punkty materialne działają jeden na drugi, są sobie równe co do wartości bezwzględnej; siły te skierowany są wzdłuż prostej łączącej dwa punkty i mają przeciwny zwrot :*

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad . \tag{1.6}$$

Tu $\vec{F}_{21}$ jest siła, która działa ze strony drugiego punktu na pierwszy punkt. $\vec{F}_{12}$ - siła działająca na drugi punkt, wywołana przez punkt pierwszy. Trzecia zasada Newtona dotyczy siły oddziaływania między dwoma punktami materialnymi, czyli dotyczy tylko sił rzeczywistych. Dla sil bezwładności ta zasada nie jest słuszna.

Zasada względności Galileusza

Układ odniesienia będzie również układem inercjalnym jeżeli on porusza się względem drugiego inercjalnego układu odniesienia się bez przyspieszenia. Przypomnimy, iż w newtonowskiej (nie relatywistycznej) mechanice czas nosi absolutny charakter i nie zależy od wybranego układu odniesienia. Transformacja wektorów wodzących punktu materialnego z jednego inercjalnego układu odniesienia do innego inercjalnego układu ma postać

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{\upsilon}_0 \cdot t \ , \tag{1.7}$$

gdzie $\vec{\upsilon}_0$ jest prędkość względna początków obu układów.

Transformacja (1.7) nosi nazwę *transformacji Galileusza*. Po podstawieniu (1.7) do wzoru (1.5) otrzymujemy, że we wszystkich inercjalnych układach odniesienia siły rzeczywiste są takie same. Oznacza to, że postać równania ruchu będzie taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Ta identyczność równań ruchu względem przekształcenia (1.7) jest treścią *zasady względności Galileusza*.

W mechanice relatywistycznej $(\upsilon \approx c)$ czas zależy od wybranego układu odniesienia i w tym przypadku zasadę Galileusza musimy zamienić na *zasadę względności Einsteina*, a transformację Galileusza musimy zamienić na *transformację Lorentza*. Mowa o tym będzie dalej. Oczywiście, że gdy $\upsilon/c << 1$ transformacja Lorentza przechodzi w transformację Galileusza i zasada względności Einsteina – w zasadę względności Galileusza.

Rozwiązania równań ruchu. Warunki początkowe i zasada przyczynowości

Jeżeli mamy układ N punktów materialnych, to stosując drugie prawo Newtona (1.5) możemy zapisać następujący układ równań ruchu względem wybranego inercjalnego układu odniesienia

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,N) \ . \tag{1.8}$$

Tu $\vec{F}_i$ oznacza siłę działającą na i-ty punkt materialny o masie . m_i

W ogólnym przypadku, wszystkie siły $\vec{F}_i$ mogą być funkcjami położenia punktów $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$, ich prędkości $(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \ldots, \vec{\upsilon}_N)$ oraz czasu. Z matematycznego punktu widzenia układ równań (I18) stanowi układ 3N *zwykłych równań różniczkowych drugiego rzędu***.**

Jeżeli znane są masy m_i wszystkich punktów materialnych i ich położenia w każdej chwili (na przykład z obserwacji ruchu pojedynczych punktów), to bardzo łatwo wyznaczyć siły, które ten ruch spowodowały : wektor siły $\vec{F}_i$ otrzymuje się prosto przez dwukrotne różniczkowanie wektora $\vec{r}_i(t)$ względem czasu i mnożenie wyniku przez masę m_i. Znacznie trudniejszym zadaniem jest jednak znalezienie wektorów położenia punktów $\vec{r}_i(t)$ jako funkcji czasu, jeżeli zadane są siły jako funkcje położeń punktów, ich prędkości i czasu. W ogólnym przypadku, nie zawsze możemy znaleźć analityczne rozwiązanie układu równań (1.8). Gdy rozwiązanie analityczne równań ruchu (1.8) jest niemożliwe, jedynie efektywne rozwiązanie można uzyskać tylko za pomocą metod numerycznych używając komputera. Właśnie z rozwojem technik komputerowych mechanika teoretyczna nabrała nowe rzycie związane z badaniami chaosu deterministycznego i innych zagadnień.

Formalne rozwiązanie układu równań (1.8) otrzymujemy przez dwukrotne całkowanie (1.8)

$$\vec{\upsilon}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i}\int_{t_0}^{t} \vec{F}_i dt + \vec{C}_i^{(1)} , \tag{1.9}$$

$$\vec{r}_i(t) = \frac{1}{m_i}\int_{t_0}^{t} dt^{//} \int_{t_0}^{t^{//}} \vec{F}_i dt^{/} + \vec{C}_i^{(1)}(t - t_0) + \vec{C}_i^{(2)} . \tag{1.10}$$

Tu $\vec{C}_i^{(1)}$ i $\vec{C}_i^{(2)}$ są stałymi całkowania; podkreślimy, że $\vec{C}_i^{(1)}$ oraz $\vec{C}_i^{(2)}$ są wektorami. Dla układu z N punktów materialnych liczba stałych całkowania więc wynosi $6N$ ($3N$ stałych $\vec{C}_i^{(1)}$ plus $3N$ stałych $\vec{C}_i^{(2)}$). Stałe całkowania $\mathbf{C}_i^{(1)}$ i $\mathbf{C}_i^{(2)}$ łatwo obliczyć ze wzorów (1.9) i (1.10)

$$\vec{C}_i^{(1)} = \vec{\upsilon}_i(t_0), \qquad \vec{C}_i^{(2)} = \vec{r}_i(t_0) . \tag{1.11}$$

Warunki (1.11) określają stałe całkowania i nazywają się *warunkami początkowymi*. W matematyce udowodniono (twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej), że układ równań (1.8) ma jednoznaczne rozwiązanie, jeżeli siły $\vec{F}_i$ są funkcjami analitycznymi (czyli funkcji $\vec{F}_i$ mają pochodne ciągłe dowolnego rzędu). Tak więc jeżeli dane są masy punktów, siły działające na punkty układu i warunki początkowe (tj położenia i prędkości punktów w chwili początkowej $t = t_0$), to zachowanie się układu może być określone jednoznacznie. Jest to wyrazem faktu, iż ruch mechaniczny spełnia *zasadę przyczynowości*.

Warto podkreślić, że w początkowej chwili musimy znać tylko położenia punktów i ich prędkości. Wartości przyspieszeń punktów mogą być dowolne.

Prawa zachowania. Całki ruchu

Rozwiązanie układu równań całkowych (1.10) w ogólnym przypadku nie jest łatwo niż rozwiązanie układu równań różniczkowych (1.8). W mechanice ważną role pomocniczą w rozwiązaniu równań ruchu odgrywają tak zwane całki ruchu. Całką ruchu nazywa się taka funkcja czasu, współrzędnych i prędkości punktów materialnych, wartość której w czasie ruchu układów punktów materialnych nie ulega zmianie.

Układ punktów może mieć kilka całek ruchu

$$f_\alpha(t;\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N;\vec{\upsilon}_1,\vec{\upsilon}_2,\ldots,\vec{\upsilon}_N) = C_\alpha \ , \qquad (1.12)$$

gdzie C_α są stałe (całki ruchu).

Jeżeli układ N punktów materialnych ma $6N$ całek ruchu, to możemy uważać, iż równania ruchu (1.8) układu mechanicznego zostały scałkowane. W tym przypadku wzory (1.12) jednoznacznie wyznaczają wektory wodzące $\vec{r}_i(t)$ i prędkości $\vec{\upsilon}_i(t)$ punktów układu jako funkcje czasu i $6N$ stałych C_α. Wartości stałych C_α znajdujemy podstawiając do wzorów (1.12) czas $t = t_0$ oraz warunki początkowe (1.11).

Znajomość k ($k < 6N$) niezależnych całek ruchu umożliwia obniżenie rzędu układu równań ruchu o k. Z całkami ruchu są związane tak zwane *prawa zachowania*, które rozważmy na przykładzie ruchu punktu materialnego.

Prawo zachowania pędu. Z drugiej zasady Newtona (1.3) wynika, że jeżeli suma sił działających na punkt materialny jest równa zeru ($\vec{F} = 0$), to

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \ , \qquad (1.13)$$

skąd

$$\vec{p} = const \ . \qquad (1.14)$$

Prawo zachowania momentu pędu. Moment pędu punktu materialnego względem początku układu współrzędnych określa wzór

$$\vec{J}=[\vec{r}\times\vec{p}] \ . \tag{1.15}$$

Różniczkując wzór (1.15) względem czasu i korzystając z drugiej zasady Newtona otrzymujemy następujące równanie ruchu dla wektora momentu pędu

$$\frac{d\vec{J}}{dt}=[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}]+[\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}]=[\vec{r}\times\vec{F}] \ . \tag{1.16}$$

Wielkość

$$\vec{L}=[\vec{r}\times\vec{F}] \tag{1.17}$$

nazywamy momentem siły.

Ze wzoru (1.16) wynika, że jeżeli

$$\vec{F}=k\cdot\vec{r} \ , \tag{1.18}$$

gdzie $k=f(x,y,z)$ jest skalarną funkcją współrzędnych punktu, to

$$\frac{d\vec{J}}{dt}=k[\vec{r}\times\vec{r}]=0 \ ,$$

skąd

$$\vec{J}=const \ . \tag{1.19}$$

Z siłą postaci (1.18) często spotykamy się w fizyce. Przykładami takiej siły są siła grawitacji oraz siła Coulomba. Siła postaci (1.18) nazywamy *siłą centralną*. Jest to siła działająca wzdłuż prostej łączącej punkt materialny i pewien nieruchomy punkt, zwany *centrum siły*.

Ze wzoru (1.19) wynika więc, że jeżeli na punkt materialny działa siła centralna (albo suma sił działających na punkt jest równa zero $\vec{F}=0$), to moment pędu jest zachowany.

Prawo zachowania energii również wynika z drugiej zasady Newtona. Obliczymy pracę siły $\vec{F}$ podczas przesunięcia punktu materialnego z jednego punktu do drugiego

$$A=\int_1^2\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^2\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt=m\int_1^2(\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})dt \ .$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}})^2 = 2(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) \ ,$$

otrzymujemy

$$A = \frac{m}{2}\int_1^2 \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}})^2 dt = \frac{m}{2}\int_1^2 d(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \Big|_1^2 \ . \tag{1.20}$$

Jeżeli wprowadzić wielkość

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m\vec{\upsilon}^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \ , \tag{1.21}$$

to wzór (1.20) możemy zapisać w postaci

$$A = T(t_2) - T(t_1) \ . \tag{1.22}$$

Wielkość $T = m\upsilon^2/2$ nazywa się *energią kinetyczną punktu materialnego*. A więc widzimy, że praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ jest równa różnice energii kinetycznych w końcowym $(t = t_2)$ i początkowym $(t = t_2)$ punkcie.

Jeżeli na punkt materialny nie działa siła, to $A = 0$ czyli

$$T(t_2) = T(t_1) = 0 \ . \tag{1.23}$$

Ze wzoru (1.21) widzimy, że dla tego żeby obliczyć energię kinetyczną musimy wiedzieć zależność wektora $\vec{r}$ od czasu, tj musimy znać rozwiązanie równania ruchu. Jednak dla szerokiej klasy sił można obliczyć zmianę energii kinetycznej nie rozwiązując równań ruchu. Takimi siłami są *siły potencialne*.

Siłę nazywamy *siłą potencjalną*, jeżeli możemy przedstawić siłę w postaci

$$\vec{F} = -[\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{e}_z] \equiv -\vec{\nabla}U(x,y,z) \ , \tag{1.24}$$

gdzie

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \ .$$

Więc dla siły potencjalnej, siła może być zawsze wyrażona za pomocą gradientu pewnej skalarnej funkcji współrzędnych punktu $U(x,y,z)$. Łatwo sprawdzić, że siła grawitacyjna oraz siła Coulomba są siłami potencjalnymi.

Jeżeli siła $\vec{F}$ jest siłą potencjalną, to dla pracy A tej siły otrzymujemy

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -\int_1^2 dU = U(t_1) - U(t_2) \ . \qquad (1.25)$$

Zatem praca wykonywana przez siłę potencjalną równa się różnice między wartością funkcji potencjalnej $U(x,y,z)$ w położeniach początkowym i końcowym punktu materialnego. Praca ta , jak widać z (1.25), nie zależy od kształtu toru, po którym porusza się punkt. Funkcję skalarną $U(x,y,z)$ nazywa się *energią potencjalną punktu materialnego*.

Z porównania (1.22) i (1.25) otrzymujemy

$$T(t_2) - T(t_1) = U(t_1) - U(t_2) \ , \qquad (1.26)$$

skąd

$$E = T(t_1) + U(t_1) = T(t_2) + U(t_2) = const \ . \qquad (1.27)$$

Wzór (1.27) wyraża *prawo zachowania całkowitej energii* punktu materialnego. Prawo to umożliwia w niektórych przypadkach sił potencjalnych nie rozwiązując równań ruchu obliczyć tor punktu materialnego. Na przykład dla jednowymiarowego ruchu punktu mamy

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \equiv E_0 \ . \qquad (1.28)$$

Ze wzoru (1.28) otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - U(x)]} \ ,$$

skąd

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - U(x)]}} \ . \qquad (1.29)$$

Całkując (1.29) otrzymujemy

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - U(x)]}} \quad . \tag{1.30}$$

Tu x_0 - położenie punktu w początkowej chwili t_0, x - położenie punktu w chwili t.

Jeżeli

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \ , \tag{1.31}$$

tj $U(x)$ jest energią potencjalną oscylatora harmonicznego, to po podstawieniu (1.31) do wzoru (1.30) otrzymujemy

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - \frac{1}{2}kx^2)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot arc\sin(\sqrt{\frac{k}{2E_0}} \cdot x)\,\Big|_{x_0}^{x} \quad . \tag{1.32}$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\sin(\frac{x}{a}) \quad .$$

Jeżeli przypuśćmy, że przy $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ (punkt materialny znajduje się w miejscu gdy $U(0) = 0$), to oznaczając przez

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.33}$$

ze wzoru (1.32) otrzymujemy

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 t) \ , \tag{1.34}$$

gdzie

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \tag{1.35}$$

- amplituda drgań.