Wykład 9

Drgania – przedłużenie

Wahadło fizyczne

Dowolne ciało sztywne zawieszone tak, że może się wahać wokół pewnej osi przechodzącej przez to ciało nazywamy *wahadłem fizycznym*. Udowodnimy, że przy małych odchyleniach ciała sztywnego od osi pionowej wahadło fizyczne wykonuje ruch okresowy.

Niech punkt P (rys.IX.1) będzie punktem zawieszenia ciała, a punkt S, znajdujący się w odległości d od punktu P, będzie środkiem masy ciała. Moment siły M działający na ciało wynosi

$$M = -mgd\sin\theta \quad . \tag{IX.1}$$

Znak minus oznacza tu, że moment sił ma kierunek przeciwny do kierunku momentu pędu ciała.

Korzystając z równania momentów

$$\frac{dL}{dt} = I\cdot\frac{d\omega}{dt} = I\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = M \quad , \tag{IX.2}$$

i biorąc pod uwagę wzór (IX.1), otrzymujemy

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgd\sin\theta \quad . \tag{IX.3}$$

Dla małych wychyleń, dla których $\sin\theta \cong \theta$, ze wzoru (IX.3) znajdujemy

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta \quad . \tag{IX.4}$$

To równanie ma tę samą postać co równanie dla ruchu harmonicznego więc

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad , \tag{IX.5}$$

lub

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad . \tag{IX.6}$$

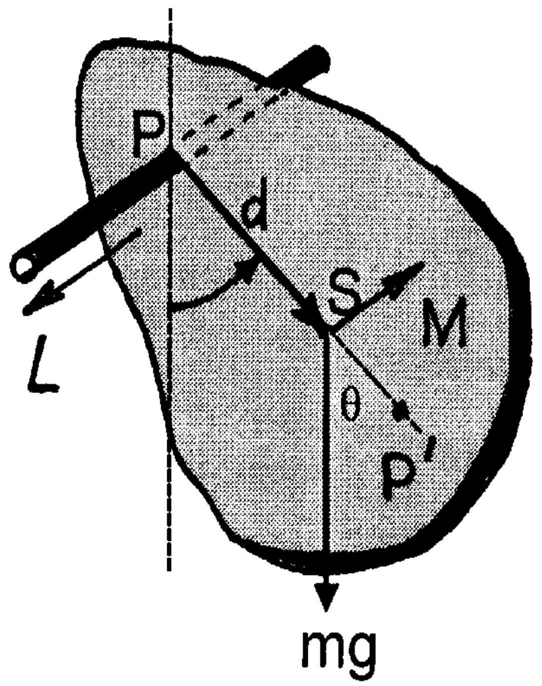
Porównajmy otrzymany okres wahadła fizycznego i okres wahadła matematycznego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\ . \tag{IX.7}$$

Z tych wzorów otrzymujemy, że wahadło matematyczne o długości

$$l_{zr} = \frac{I}{md} = \frac{md^2 + I_C}{md} = d + \frac{I_C}{md} \tag{IX.8}$$

ma taki sam okres co wahadło fizyczne.



Rys.IX.1. Wahadło fizyczne

Długość l_{zr}, określona wzorem (IX.8) nosi nazwę *długości zredukowanej wahadła fizycznego*. W równaniu (IX.8) I_C jest momentem bezwładności wahadła fizycznego względem osi przechodzącej przez jego środek masy S i równoległej do jego osi wahań. Ostatni człon w (IX.8) wyprowadziliśmy, korzystając z twierdzenia Steinera. Punkt $P^{/}$ (rys.IX.1), leżący na prostej PS w odległości l_{zr} od punktu zawieszenia wahadła nazywamy *środkiem wahań wahadła fizycznego*. Ten punkt ma interesującą właściwość: jeżeli zawiesimy wahadło w punkcie $P^{/}$, to okres drgań wahadła nie zmieni się.

Istotnie, zgodnie z (IX.8), wahadło zawieszone w punkcie $P^{/}$, ma następującą długość zredukowaną

$$l_{zr}^{/} = d^{/} + \frac{I_C}{md^{/}} \tag{IX.9}$$

Tu $d^{/}$ jest odległość punktu $P^{/}$ od środka masy S (rys.IX.1).

Zgodnie z określeniem środka wahań: $l_{zt} = d^{/} + d$, a zatem ze wzoru (IX.8) otrzymujemy

$$l_{zr} = d + d^{/} = d + \frac{I_C}{md}\ . \tag{IX.10}$$

Skąd

$$d' = \frac{I_C}{md} \quad \text{albo} \quad d = \frac{I_C}{md'} \tag{IX.11}$$

Po podstawieniu (IX.11) do wzoru (IX.9) otrzymujemy

$$l'_{zr} = d' + \frac{I_C}{md'} = d' + d = l_{zr} \ . \tag{IX.12}$$

A więc długość zredukowana wahadła zawieszonego w punkcie P' jest taka sama jak długość zredukowana wahadła zawieszonego w punkcie P. Ponieważ, długość zredukowana określa w jednoznaczny sposób okres i częstość drgań wahadła fizycznego, z równości (IX.12) wynika, że wahadła zawieszone w punktach P i P' mają takie same okresy i częstości.

Oscylator harmoniczny tłumiony

Rozważmy teraz drgania oscylatora z uwzględnieniem strat energii oscylatora. W przypadku drgań mechanicznych siłą hamującą (tłumiącą) ruch cząstki jest siła oporu F_{op} ośrodka. Siła oporu ma zwrot przeciwny do prędkości i w najprostszej postaci, jak wynika z doświadczeń, jest wprost proporcjonalna do prędkości

$$F_{op} = -\gamma \frac{dx}{dt} \ . \tag{IX.13}$$

Z uwzględnieniem siły hamującej (IX.13), równanie ruchu (VIII.18) oscylatora harmonicznego przyjmie postać

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ . \tag{IX.14}$$

Wprowadzając $\tau = m/\gamma$ oraz oznaczając *częstość drgań nietłumionych* $\omega_0^2 = k/m$ zapiszmy równanie (IX.14) w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \ . \tag{IX.15}$$

Będziemy szukali rozwiązania równania (IX.15) w postaci:

$$x = Ae^{-\beta t}\cos\omega t \ . \tag{IX.16}$$

Obliczmy teraz pierwszą i drugą pochodną funkcji (IX.16), względem czasu

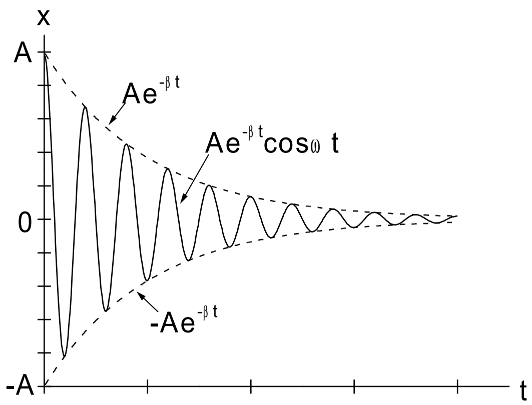
$$\frac{dx}{dt} = A\cdot\left(-\beta e^{-\beta t}\cos\omega t - e^{-\beta t}\omega \sin\omega t\right) \ , \tag{IX.17a}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\cdot\left(\beta^2 e^{-\beta t}\cos\omega t + 2\beta\omega e^{-\beta t}\sin\omega t - e^{-\beta t}\omega^2\cos\omega t\right) . \qquad \text{(IX.17b)}$$

Po podstawieniu tych pochodnych do równania (IX.15) otrzymujemy

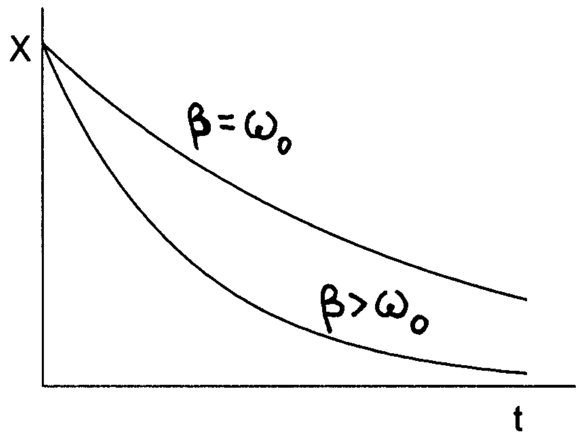
$$A\cdot\left(\beta^2 e^{-\beta t}\cos\omega t + 2\beta\omega e^{-\beta t}\sin\omega t - e^{-\beta t}\omega^2\cos\omega t\right)$$

$$+ A\cdot\frac{1}{\tau}\left(-\beta e^{-\beta t}\cos\omega t - e^{-\beta t}\omega\sin\omega t\right) + A\omega_0^2 e^{-\beta t}\cos\omega t = 0 . \qquad \text{(IX.18)}$$



Rys.IX.2. Wykres funkcji

$x = A\cdot e^{-t/2\tau}\cos\left[\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\cdot t\right]$



Rys. IX.3. Aperiodyczny ruch oscylatora z "silnym" tłumieniem

Zapiszmy (IX.18) w postaci

$$(\beta^2 - \frac{\beta}{\tau} + \omega_0^2 - \omega^2)\cdot\cos\omega t + \omega\cdot(2\beta - \frac{1}{\tau})\cdot\sin\omega t = 0 . \qquad \text{(IX.19)}$$

Równanie (IX.19) musi być słuszne dla dowolnej chwili. Niech $t = 2\pi/\omega$, wtedy ze wzoru (IX.19) otrzymujemy

$$(\beta^2 - \frac{\beta}{\tau} + \omega_0^2 - \omega^2) = 0 . \qquad \text{(IX.20)}$$

Jeżeli rozważymy teraz chwilę $t = \pi/2\omega$, wtedy

$$\omega\cdot(2\beta - \frac{1}{\tau}) = 0 . \qquad \text{(IX.21)}$$

Z równania (IX.21) mamy

$$\beta = \frac{1}{2\tau} . \qquad \text{(IX.22)}$$

Po podstawieniu $\tau = 1/2\beta$ do wzoru (IX.20) znajdujemy:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 . \tag{IX.23}$$

A zatem funkcja

$$x = A \cdot e^{-t/2\tau} \cos\left[\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t\right] \tag{IX.24}$$

jest rozwiązaniem równania opisującego ruch harmoniczny tłumiony. Widzimy, że opór zmniejsza zarówno amplitudę jak i częstość drgań, czyli powoduje spowolnienie ruchu. Wielkość tłumienia określa współczynnik tłumienia β (lub stała czasowa τ). Wykres ruchu oscylatora harmonicznego tłumionego w zależności od czasu jest pokazany na rysunku IX.2.

Powyższe rozważania dotyczą sytuacji "słabego tłumienia" tj. $\beta < \omega_0$. Gdy tłumienie wzrośnie powyżej pewnej krytycznej wartości ($\beta = \omega_0$) ruch przestaje być ruchem okresowym, drgającym. W tym przypadku obserwujemy, że ciało wychylone z położenia równowagi powraca do niego asymptotycznie. Takich ruch nazywamy ruchem *pełzającym (aperiodycznym)*. Zależności wychylenia od czasu dla ruchu tłumionego krytycznie ($\beta = \omega_0$) i ruchu pełzającego ($\beta > \omega_0$) są pokazane na rys.IX.3.

Straty mocy, współczynnik dobroci

W przypadku drgań tłumionych energia zmagazynowana w układzie drgającym zostaje stracona. Dlatego, żeby określić jak szybko układ drgający traci swoją energię wprowadzamy *współczynnik dobroci Q układu* drgającego, który jest zdefiniowany jako

$$Q = 2\pi \frac{E_{zmagazynowana}}{E_{stracona\ za\ okres}} = 2\pi \frac{E}{P/\nu} = \frac{E}{P/\omega} , \tag{IX.25}$$

gdzie P jest średnią stratą mocy, a ν częstotliwością.

Oscylator	Q
Ziemia dla fali sejsmicznej	250-400
Struna fortepianu lub skrzypiec	1000
Atom wzbudzony	10^7
Jądro wzbudzone	10^{12}

Im większa jest dobroć układu drgającego tym dłużej trwa czas drgań takiego układu. Dla przypadku słabo tłumionego oscylatora harmonicznego ($\beta << \omega_0$) współczynnik Q ma w przybliżeniu wartość $\omega_0/2\beta$. Kilka typowych wartości Q podano w tabeli wyżej.

Drgania wymuszone oscylatora harmonicznego. Rezonans

Rozważmy teraz przypadek, gdy na oscylator oprócz siły oporu działa jeszcze siła zewnętrzna wymuszająca $F(t)$. Siła wymuszająca ma za zadanie podtrzymywać gasnące drgania oscylatora. W tym przypadku równanie ruchu oscylatora ma postać

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F(t) \tag{IX.26}$$

Wprowadzając $\tau = m/\gamma = 1/2\beta$ oraz oznaczając *częstość drgań nietłumionych* $\omega_0^2 = k/m$ zapiszmy równanie (IX.26) w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \ . \tag{IX.27}$$

Załóżmy, że siła wymuszająca ma postać

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{F_0 \sin\omega t}{m} = \alpha_0 \sin\omega t \ , \tag{IX.28}$$

gdzie $\alpha_0 = F_0/m$.

Wtedy rozwiązanie równania (IX.27), które nie będziemy tutaj udowadniać, ma postać

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi). \tag{IX.29}$$

Tu

$$A = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}} \ , \tag{IX.30}$$

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \ . \tag{IX.31}$$

Z rozwiązania (IX.29) wynika, że gdy układ jest *zasilany częstością* ω *różną od częstości własnej* ω_0 *wówczas drgania oscylatora będą odbywały się z częstością siły zewnętrznej a nie z częstością własną*.

Zauważmy, że chociaż drgania odbywają się z częstością ω siły wymuszającej to amplituda i faza zależą od relacji pomiędzy częstością wymuszającą ω, a częstością własną

ω_0. W szczególności, gdy częstość siły wymuszającej osiągnie odpowiednią częstotliwość, to amplituda drgań może wzrosnąć gwałtownie nawet przy niewielkiej wartości siły wymuszającej. Zjawisko to nazywamy *rezonansem*. Wykres przedstawiający rezonansowy wzrost amplitudy drgań w funkcji częstości siły wymuszającej pokazany jest na rys.IX.4 dla różnych wartości współczynnika tłumienia β $(\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4)$. Częstość rezonansową ω_r i amplitudę rezonansową A_r możemy obliczyć z warunku na maksimum amplitudy drgań danej wzorem (IX.30). Przypomnimy, że funkcja $A(\omega)$ będzie miała maksimum (albo minimum) dla częstości ω_r, dla której

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0. \qquad \text{(IX.32)}$$

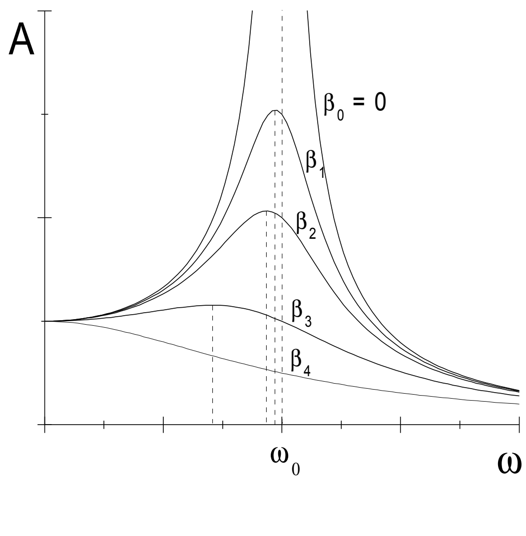
Obliczając pierwszą pochodną od funkcji (IX.30) i biorąc pod uwagę wzór (IX.32)

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \alpha_0 \frac{d}{d\omega}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{-3/2} \cdot [2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2\omega] = 0$$

znajdujemy

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ . \qquad \text{(IX.33)}$$



Rys.IX.4. Rezonans

Po podstawieniu (IX.33) do wzoru (IX.30) otrzymujemy

$$A_r = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4\beta^2\omega_r^2]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\alpha_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\ . \qquad \text{(IX.34)}$$

Widać, że im mniejsze tłumienie β tym większa amplituda A_r. Jeżeli tłumienie jest słabe $(\beta << \omega_0)$ to wówczas maksymalna amplituda odpowiada częstości drgań własnych $\omega_r = \omega_0$.

Jednocześnie, ten warunek odpowiada przesunięciu fazowemu $\varphi = \pi/2$ pomiędzy siłą a wychyleniem. Istotnie, gdy $\omega_r = \omega_0$, ze wzoru (IX.31) mamy

$$tg\varphi = \infty \quad , \tag{IX.35}$$

co odpowiada kątowi $\varphi = \pi/2$.

Siła więc nie jest zgodna w fazie z wychyleniem. Zauważmy jednak, że moc pochłaniana przez oscylator zasilany siłą wymuszającą F jest wprost proporcjonalna do prędkości

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon} \; . \tag{IX.36}$$

Ze wzoru (IX.29), w przypadku rezonansu ($\varphi = \pi/2$), mamy

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -A\cdot\omega\cdot\sin(\omega t) \tag{IX.37}$$

a zatem, żeby powstał rezonans trzeba, żeby to prędkość (a nie wychylenie) była zgodna w fazie z siłą. Ze wzorów (IX.29) i (IX.37) wynika, że w przypadku rezonansu ($\varphi = \pi/2$), gdy $x = 0$ ($\omega t = (2n+1)\pi/2$) to $\upsilon = \upsilon_{\max}$ a wtedy, zgodnie z (IX.28) siła też ma być maksymalna. W punktach zwrotnych, gdzie prędkość zmienia swój kierunek, siła też musi zmienić swój kierunek (siła działa cały czas to nie są impulsy tak jak np. przy popychaniu huśtawki).

Skutki rezonansu mogą być zarówno pozytywne, jak i negatywne. Z jednej strony staramy się wyeliminować przenoszenie drgań np. z silnika na elementy nadwozia w samochodzie, a z drugiej strony działanie odbiorników radiowych i telewizyjnych jest możliwe dzięki wykorzystaniu rezonansu elektrycznego. Dostrajając odbiornik do częstości nadajnika spełniamy właśnie warunek rezonansu. Zjawisko rezonansu jest bardzo rozpowszechnione w przyrodzie.

Literatura do Wykładu 9

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.344-384.*
2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. 239-255; str. 329-334.*

Zadania do Wykładu IX

1. Udowodnić, że gdy długość zredukowana wahadła fizycznego jest równa $l_{zr} = 9{,}81\cdot(4\pi)^{-2}$ m, to częstość drgań wahadła wynosi 2 Hz.

2. Jak zmieni się okres drgań wahadła fizycznego na Księżycu w porównaniu z jego okresem wahań na Ziemi? *Odpowiedź:* Zwiększy się w 2,4 razy. *Wskazówka:* Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Księżyca wynosi 1,67 m/s^2.
3. Ciało sztywne posiadające kształt krążka o promieniu r jest zawieszono w punkcie leżącym na jego obwodzie. Znaleźć a) częstość małych drgań wahadła i b) długość równoważnego wahadła prostego. *Odpowiedź*: a) $\omega = \sqrt{2g/3r}$; $l = 3r/2$. *Wskazówka*: moment bezwładności krążka względem jego średnicy wynosi $I = mr^2/2$.
4. Ciało sztywne posiadające kształt kuli o promieniu r jest zawieszone w punkcie leżącym na jego powierzchni. Znaleźć a) okres małych drgań wahadła i b) długość równoważnego wahadła prostego. *Odpowiedź*: a) $T = 2\pi\sqrt{7r/5g}$; $l = 7r/5$. *Wskazówka*: moment bezwładności kuli względem jego średnicy wynosi $I = 2mr^2/5$.
5. Pokazać, że okres wahadła fizycznego ma wartość minimalną, gdy $d = \sqrt{I_C/m}$.
6. Dla cienkiego pręta o długości l i masie m długość zredukowana jest minimalna, gdy $d = l/\sqrt{12}$. Pokazać, że moment bezwładności pręta względem osi symetrii prostopadłej do pręta i przechodzącej przez środek pręta wynosi $I = ml^2/12$.
7. Wychodząc z równania (IX.24) udowodnić, że w przypadku gdy $\gamma \to 0$
$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t).$$
8. Rozważyć drgania tłumione oscylatora w przypadku, gdy $\beta = \omega_0$.
9. Udowodnić, że współczynnik dobroci Q słabo tłumionego oscylatora harmonicznego ($\beta << \omega_0$) ma w przybliżeniu wartość $\omega_0/2\beta$.
10. Dla częstości wymuszającej siły ω_1 i ω_2 amplitudy wymuszonych drgań oscylatora są równe między sobą. Pokazać, że częstość własna oscylatora jest określona wzorem $\omega_0 = \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\beta^2)/2}$.