Wykład 8

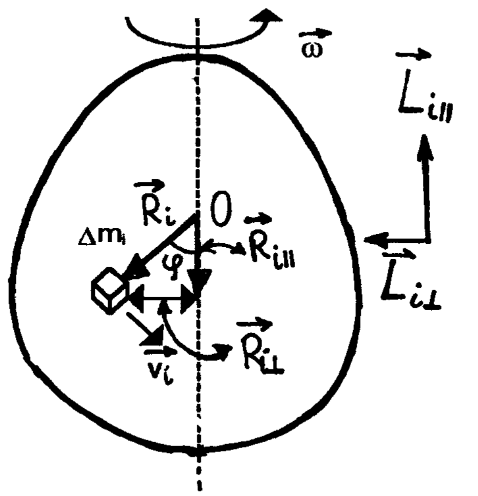
Dynamika ciała sztywnego

Ciała sztywne i moment bezwładności

Większość ciał w przyrodzie to nie cząstki punktowe tylko rozciągłe ciała stałe, które mogą wykonywać zarówno ruch postępowy jak i obrotowy. Przez *ciała stałe, sztywne, rozumiemy ciała, w których odległość między dwoma wybranymi elementami pozostaje stała.*

Przeanalizujmy ruch takiej bryły obracającej się ze stałą prędkością kątowa $\vec{\omega}$ wokół stałej osi w układzie środka masy. Dla uproszczenia rozważmy bryłę w postaci ciała o *symetrii obrotowej.* Mówimy, że ciało ma symetrię obrotową, jeżeli w ciele istnieje oś przy obrocie dookoła której o dowolny kąt ciało przechodzi samo w siebie.

Zauważmy, że różne części ciała mają różną prędkość liniową v, chociaż tą samą prędkość kątową ω. Podzielmy to ciało na małe elementy o masie Δm_i i zapiszmy wektor $\vec{R}_i$, określający położenie i- tego elementu względem początku układu współrzędnych O, jako $\vec{R}_i = \vec{R}_{i\parallel} + \vec{R}_{i\perp}$ (rys.VIII.1). Prędkość liniowa takiego elementu wynosi $\vec{v}_i = [\vec{\omega} \times \vec{R}_i]$ $= [\vec{\omega} \times \vec{R}_{i\parallel}] + [\vec{\omega} \times \vec{R}_{i\perp}] = [\vec{\omega} \times \vec{R}_{i\perp}]$, skąd $v_i = \omega \cdot R_{i\perp}$, ponieważ $\vec{\omega} \perp \vec{R}_{i\perp}$.



Rys.VIII.1. Ruch obrotowy bryły

Moment pędu i- tego małego elementu względem początku układu O wynosi

$$\vec{L}_i = [\vec{R}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i] = \vec{L}_{i\perp} + \vec{L}_{i\parallel},$$

gdzie

$$\vec{L}_{i\parallel} = \Delta m_i ([\vec{R}_{i\perp} \times \vec{v}_i]),$$

oraz

$$\vec{L}_{i\perp} = \Delta m_i ([\vec{R}_{i\parallel} \times \vec{v}_i]).$$

Dla ciała sztywnego o symetrii obrotowej, suma wszystkich składowych $\vec{L}_{i\perp}$ będzie równa zeru. Istotnie dla dowolnego i- tego elementu istnieje symetryczny j-ty element, dla którego $\vec{R}_{i\parallel} = \vec{R}_{j\parallel}$ i $\vec{v}_i = -\vec{v}_j$, a zatem $\vec{L}_{i\perp} + \vec{L}_{j\perp} = 0$.

Składowa momentu pędu

$$L_{i\parallel} = \Delta m_i R_{i\perp} \upsilon_i = \Delta m_i R_{i\perp}^2 \cdot \omega \qquad \text{(VIII.1)}$$

jest równoległa do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ (rys.VIII.1), a więc moment pędu obracającego się ciała sztywnego możemy zapisać w postaci

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_{i\parallel} = \left(\sum_i R_{i\perp}^2 \Delta m_i \right) \cdot \vec{\omega} \; . \qquad \text{(VIII.2)}$$

Wielkość w nawiasie nazywamy *momentem bezwładności* (I) bryły względem osi obrotu:

$$I = \sum_i R_{i\perp}^2 \Delta m_i \; . \qquad \text{(VIII.3)}$$

Biorą pod uwagę (VIII.3), możemy teraz zapisać moment pędu obracającego się ciała sztywnego w postaci

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \; . \qquad \text{(VIII.4)}$$

Warto podkreślić, że równanie wektorowe (VIII.4) jest słuszne tylko dla bryły o symetrii obrotowej. Dla bryły o dowolnym kształcie wektor $\vec{L}$ nie jest równoległy do wektora $\vec{\omega}$.

Po podstawieniu wzoru (VIII.4) do równania, określającego zmiany momentu pędu ($\dot{\vec{L}} = \vec{M}$), otrzymujemy

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\beta} = \vec{M} \; . \qquad \text{(VIII.5)}$$

Tu $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ jest przyspieszeniem kątowym, a $\vec{M}$ jest składową momentu siły wzdłuż osi obrotu bryły, czyli wzdłuż wektora $\vec{\omega}$.

Energia kinetyczna rotującej bryły sztywnej w układzie środka masy ma postać

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (R_{i\perp} \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i R_{i\perp}^2 \right) \omega^2 \; , \qquad \text{(VIII.6)}$$

a zatem, uwzględniając wzór (VIII.3), znajdujemy

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \; , \qquad \text{(VIII.7)}$$

Jeżeli ciało toczy się, to występuje zarówno ruch postępowy, jak i obrotowy. Całkowitą kinetyczną energię ciała sztywnego poruszającego się ruchem postępowo-obrotowym określa wzór

$$T = \frac{1}{2} M \upsilon^2_{śr.m} + \frac{1}{2} I_{śr,m} \cdot \omega^2 \,, \qquad \text{(VIII.8)}$$

gdzie $M = \sum_i m_i$ - całkowita masa ciała, $\upsilon_{śr.m}$ - prędkość środka masy, a $I_{śr.m}$ - moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez środek masy.

Zestawmy teraz obliczone wielkości ruchu obrotowego bryły z ich odpowiednikami dla ruchu postępowego.

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\beta}$
$T = \frac{1}{2} m\upsilon^2$	$T = \frac{1}{2} I\omega^2$

Z tej tabelki widzimy, że moment bezwładności *I* w ruchu obrotowym bryły odgrywa rolę analogiczną do masy *m* w ruchu postępowym. Istnieje jednak zasadnicza różnica: masa ciała nie zależy od jego położenia w przestrzeni, natomiast moment bezwładności zależy od osi, wokół której obraca się ciało. Momenty bezwładności niektórych ciał są podane w tabeli.

Ciało sztywne	I
Obręcz, pierścień względem osi ⊥ przez środek	mR^2
Krążek, walec względem osi ⊥ przez środek	$mR^2/2$
Pręt wokół osi ⊥ przez środek	$ml^2/12$
Pręt wokół osi ⊥ przez koniec	$ml^2/3$
Pełna kula wokół osi przez środek	$2mR^2/5$
Czasza kulista wokół osi przez środek	$2mR^2/3$

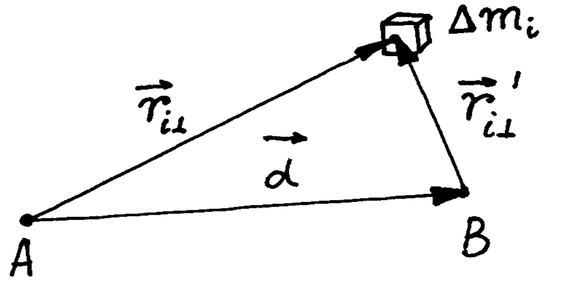
Twierdzenie Steinera

Często do obliczania momentu bezwładności wygodnie jest posłużyć się twierdzeniem Steinera. Podaje ono zależność pomiędzy momentem bezwładności *I* ciała względem danej osi, a momentem bezwładności I_C tego ciała względem osi przechodzącej przez jego środek masy i równoległej do danej osi:

$$I = I_C + md^2 \,, \qquad \text{(VIII.9)}$$

gdzie *m* jest masą ciała, a *d* odległością pomiędzy osiami. Udowodnimy twierdzenie Steinera.

Rozważmy dwie równoległe do siebie osie i niech osie te będą prostopadłe do płaszczyzny rysunku (rys.VIII.2) i przecinają tą płaszczyznę w punktach A i B. Zgodnie ze wzorem (VIII.2) momenty bezwładności ciała względem osi przechodzących przez punkty A i B są równe:



Rys.VIII.2.

$$I_A = \sum_i r_{i\perp}^2 \Delta m_i \,, \qquad \text{(VIII.10)}$$

$$I_B = \sum_i (r_{i\perp}^{/})^2 \Delta m_i \,. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Tu $r_{i\perp}$ i $r_{i\perp}^{/}$ - odległości masy Δm_i od osi przechodzące odpowiednio przez punkty A i B.

Z rys.VIII.2 wynika, że między wektorami $\vec{r}_{i\perp}$ i $\vec{r}_{i\perp}^{\,/}$ istnieje związek

$$\vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{i\perp}^{\,/} + \vec{d} \,. \qquad \text{(VIII.12)}$$

Po uwzględnieniu (VIII.12) ze wzoru (VIII.10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_A &= \sum_i r_{i\perp}^2 \Delta m_i = \sum_i (\vec{r}_{i\perp}^{\,/} + \vec{d})^2 \cdot \Delta m_i \\ &= \sum_i (r_{i\perp}^{/})^2 \Delta m_i + d^2 \sum_i \Delta m_i + 2\vec{d} \cdot \sum_i \Delta m_i \vec{r}_{i\perp}^{\,/} \,. \\ &= I_B + md^2 + 2m(\vec{d} \cdot \vec{r}_{C\perp}^{\,/}) \end{aligned} \qquad \text{(VIII.13)}$$

Tu m - masa ciała, a $\vec{r}_{C\perp}^{\,/}$ - wektor określający odległość środka masy ciała od osi przechodzącej przez punkt B. Jeżeli środek masy ciała znajduje się na osi przechodzącej przez punkt B, wtedy $\vec{r}_{C\perp}^{\,/} = 0$ i ze wzoru (VIII.13) wynika wzór (VIII.9), który wyraża twierdzenie Steinera.

<u>Zadanie 1:</u> Kula o masie *m* i promieniu *R* stacza się po równi pochyłej o wysokości *h*. Obliczyć prędkość kuli u dołu równi.

<u>Rozwiązanie:</u> Zapiszmy zasadę zachowania energii dla krążka i kuli:

$$mgh = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \,. \qquad \text{(VIII.14)}$$

Ponieważ $\omega = \upsilon / R$, a moment bezwładności dla kuli $I = 2mR^2/5$, ze wzoru (VIII.14) otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} gh} \ . \qquad \text{(VIII.15)}$$

Zauważmy, że gdyby kula zsuwała się (bez rotacji) to prędkość kuli u dołu równi wynosiłaby $v = \sqrt{2gh}$.

Drgania

Ruch, który powtarza się w regularnych odstępach czasu, nazywamy *ruchem okresowym* (periodycznym). Przemieszczenie cząstki w ruchu periodycznym można wyrazić za pomocą funkcji sinus albo cosinus. Ruch okresowy jest powszechną formą ruchu obserwowaną w życiu codziennym i dlatego jest ważnym przedmiotem fizyki.

Siła harmoniczna

Działającą na ciało siłę, która jest proporcjonalna do przesunięcia ciała od początku układu i która jest skierowana ku początkowi układu, nazywamy *siłą harmoniczną* lub *siłą sprężystości*. Jeżeli obierzemy oś Ox wzdłuż przesunięcia, to siła harmoniczna jest wyrażona równaniem

$$F = -kx \ , \qquad \text{(VIII.16)}$$

gdzie x jest przesunięciem od położenia równowagi. To równanie opisuje siłę wywieraną przez rozciągniętą sprężynę o ile tylko sprężyna nie została rozciągnięta poza granicę sprężystości. Poza granicą sprężystości sprężyna zmienia swoją długość nieodwracalnie. Wzór (VIII.16) wyraża tak zwane *prawo Hooke'a*.

Jeżeli sprężyna zostanie rozciągnięta tak aby masa m (zaczepiona do sprężyny) znalazła się w położeniu $x = A$, a następnie w chwili $t = 0$ została zwolniona, to położenie masy w funkcji czasu będzie dane równaniem:

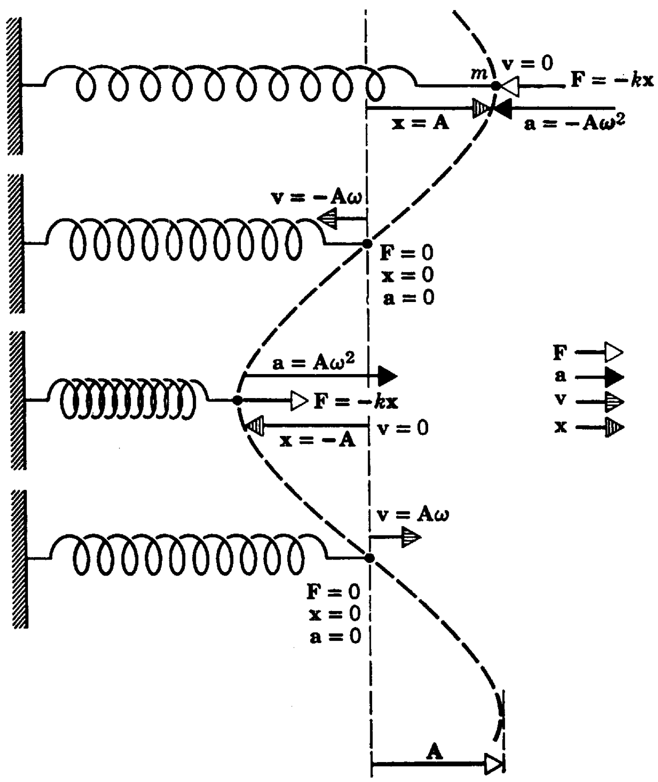
$$x = A \cdot \cos\omega t \ . \qquad \text{(VIII.17)}$$

Sprawdźmy czy jest to dobry opis ruchu. Dla $t = 0$, $x = A$, tzn. opis zgadza się z założeniami. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że

$$ma = -kx \ ,$$

czyli

$$ma \equiv m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ . \qquad \text{(VIII.18)}$$



Rys.VIII.3

Równanie takie nazywa się równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Staramy się "odgadnąć" rozwiązanie i następnie sprawdzić nasze przypuszczenia. Zwróćmy uwagę, że rozwiązaniem jest funkcja $x(t)$, która ma tę właściwość, że jej druga pochodna jest równa funkcji ale ze znakiem "–". Zgadujemy, że *może* to być funkcja $x = A \cdot \cos \omega t$ i sprawdzamy

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon = -A\omega \cdot \sin \omega t \ , \quad \text{(VIII.19)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = a = -A\omega^2 \cdot \cos \omega t \ . \quad \text{(VIII.20)}$$

Tu skorzystaliśmy ze wzorów

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega \cdot \sin(\omega t) \ , \quad \text{(VIII.21)}$$

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega \cdot \cos(\omega t) \ . \quad \text{(VIII.22)}$$

Podstawiając (VIII.20) do równania (VIII.18), znajdujemy

$$m(-A\omega^2 \cdot \cos \omega t) = -kA \cdot \cos \omega t \ . \quad \text{(VIII.23)}$$

Skąd mamy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ . \quad \text{(VIII.24)}$$

Widzimy, że funkcja $x = A \cdot \cos \omega t$ jest rozwiązaniem równania (VIII.18) ale tylko gdy $\omega = \sqrt{k/m}$.

Zwróćmy uwagę, że funkcja $x = A \sin \omega t$ jest również rozwiązaniem równania (VIII.18) ale nie spełnia warunku początkowego bo gdy $t = 0$ to $x(t = 0) = 0$ (zamiast $x = A$).

Najogólniejsze rozwiązanie równania (VIII.18) ma postać:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) \ , \tag{VIII.25}$$

albo

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \beta) \ . \tag{VIII.26}$$

Stałe α i β to są *stałe fazowe*. Stałe A oraz α albo β są określone przez warunki początkowe: położenie i prędkość w chwili $t = 0$.

Ze wzoru (VIII.25), na przykład, otrzymujemy

$$x_0 \equiv x(t = 0) = A \cdot \sin(\alpha) \ ,$$

$$\upsilon_0 \equiv \upsilon(t = 0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = A\omega \cdot \cos(\alpha) \ .$$

Skąd mamy

$$tg(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{x_0 \cdot \omega}{\upsilon_0} \ ,$$

$$A = \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 + (x_0 \cdot \omega)^2}}{\omega} \ .$$

Ze wzorów (VIII.17), (VIII.19) i (VIII.20) wynika, że *wartości maksymalne* (amplitudy) wychylenia, prędkości i przyspieszenia wynoszą:

- dla wychylenia A;
- dla prędkości ωA
(*występuje gdy* $\omega t = (2n + 1)\pi / 2$, czyli $x = 0$);
- dla przyspieszenia $\omega^2 A$
(*występuje gdy* $x = A$).

Okres drgań

Funkcja $\cos\omega t$ lub $\sin\omega t$ powtarza się po czasie $T = 2\pi / \omega$. Tą szczególną wartość czasu nazywamy *okresem* T . Liczba drgań w czasie t jest równa

$$n = \frac{t}{T} \ . \tag{VIII.27}$$

Gdy podzielimy obie strony przez t, otrzymamy liczbę drgań w jednostce czasu

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \ , \tag{VIII.28}$$

która nazywa się *częstotliwością drgań*.

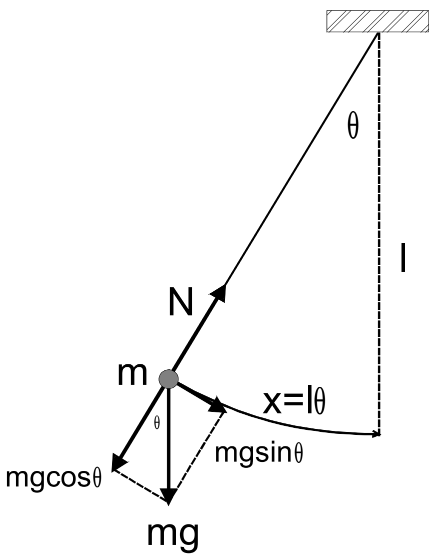
Dla ruchu harmonicznego $\omega = \sqrt{k/m}$ otrzymujemy więc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ . \qquad \text{(VIII.29)}$$

Jest to okres drgań masy *m* przyczepionej do końca sprężyny o stałej sprężystości *k*.

Wahadło proste

Wahadło proste albo wahadło matematyczne jest to ciało o masie punktowej m, zawieszone na cienkiej, nieważkiej, nierozciągliwej nici. Kiedy ciało wytrącimy z równowagi to zaczyna się ono wahać w płaszczyźnie poziomej pod wpływem siły ciężkości. Udowodnimy, że przy małych odchyleniach masy m od osi pionowej wahadło to wykonuje ruch periodyczny.



Rys. VIII.4. Wahadło proste

Rysunek przedstawia wahadło o długości l i masie *m*, odchylone o kąt θ od stanu równowagi wahadła ($\theta = 0$). Na masę *m* działa siła przyciągania grawitacyjnego mg. Składową $mg \cdot \cos\theta$ siły grawitacyjnej równoważy siła naprężenia nici *N*. Natomiast składowa $mg \cdot \sin\theta$ nie jest zrównoważona i jest siłą przywracającą równowagę układu, sprowadzając masę *m* do położenia równowagi. Siła ta wynosi

$$F = -mg\sin\theta \ . \qquad \text{(VIII.30)}$$

Znak minus tu oznacza, że siła ta jest skierowana w stronę przeciwną od kierunku odchylenia wahadła. Ze wzoru (VIII.30) widać, że siła przywracająca równowagę układu jest *proporcjonalna do* $\sin\theta$*, a nie do* θ*, więc nie jest to ruch prosty harmoniczny.* Jeżeli jednak kąt θ jest mały (mniejszy niż 10°) to $\sin\theta$ jest bardzo bliski θ (różnica mniejsza niż 0.5%). Przemieszczenie wzdłuż łuku (z miary łukowej kąta) wynosi $x = l \cdot \theta$. Przyjmując zatem, że $\sin\theta \cong \theta$ wzór (VIII.30) możemy zapisać w postaci

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x \ . \qquad \text{(VIII.31)}$$

Siła (VIII.31) jest wprost proporcjonalna do przemieszczenia (ze znakiem "–"), czyli jest siłą harmoniczną. W tym przypadku w równaniu siły harmonicznej (VIII.16) stałą k określa stała

mg/l. Korzystając ze wzoru (VIII.31) oraz wzoru (VIII.24) dla częstości drgań wahadła matematycznego znajdujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \ . \tag{VIII.32}$$

Po podstawieniu (VIII.32) do wzoru (VIII.29) mamy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{VIII.33}$$

Zauważmy, że częstość i okres wahadła prostego zależy tylko od długości wahadła i nie zależy od amplitudy (początkowego kąta θ) i od masy wahadła.

Literatura do Wykładu 8

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.266- 300; str.344-384.*
2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. 220-227; str.303-328.*

Zadania do Wykładu VIII

1. Dwie kule o masach $m = 10$ kg każda są połączone ze sobą lekkim, sztywnym prętem o długości 2 m. Pomijając masę pręta obliczyć moment bezwładności: a) względem osi normalnej przechodzącej przez środek układu, b) względem osi normalnej do pręta i przechodzącej przez jedną z kul. *Odpowiedź*: a) 20 $kg \cdot m^2$; b) 20 $kg \cdot m^2$.
2. Udowodnić, że środek masy ciała o symetrii obrotowej znajduje się na osi symetrii ciała.
3. Udowodnić wzór (VIII.8). *Wskazówka*: skorzystać z twierdzenia Steinera.
4. Krążek o masie *m* i promieniach *R* stacza się po równi pochyłej o wysokości *h*. Obliczyć prędkość krążka u dołu równi. *Odpowiedź*: $\upsilon = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \approx 1.7\sqrt{gh}$.
5. Bardzo cienka powłoka sferyczna ma moment bezwładności względem dowolnej średnicy równy $I = 2MR^2/3$. Powłoka stacza się po równi pochyłej o wysokości *h*. Obliczyć prędkość powłoki u dołu równi. *Odpowiedź*: $\upsilon = \sqrt{\frac{6}{5}gh}$.

6. Udowodnić, że w ciągu wahań wahadła prostego energia mechaniczna wahadła nie zmienia się.
7. Głośnik wytwarza dźwięki dzięki drganiom membrany. Jakie częstości mogą powstawać dla drgań, w których przyspieszenia przekraczają 10 m/s^2, jeżeli amplituda drgań jest ograniczona do $1.0 \cdot 10^{-3}$ mm. *Odpowiedź*: Większe niż 500 Hz.
8. Dwie sprężyny przymocowane są do ciała o masie m i do nieruchomych ścian. Współczynniki sprężystości są równe $k_1 = k_2 = k$. Znaleźć częstość drgań ciała. *Odpowiedź*: $\omega = \sqrt{2k/m}$.
9. Jaka jest długość wahadła prostego, którego okres wynosi 2,00 s w punkcie, gdzie przyspieszenie grawitacyjne $g = 986$ cm/s^2? *Odpowiedź*: 1 m.
10. W pewnej miejscowości wahadło proste o długości 1 m wykonuje 100 całkowitych wahnięć w ciągu 200 s. Jakie jest przyspieszenie g w tej miejscowości? *Odpowiedź*: $g = 9{,}86$ m/s^2.