

Wykład 7

Dynamika ruchu obrotowego punktu materialnego

Moment pędu i moment siły. Równanie ruchu obrotowego. Prawo zachowania momentu pędu.

Ważnymi charakterystykami ruchu obrotowego ciała materialnego są moment pędu oraz moment siły. *Moment pędu* punktu materialnego względem początku układu współrzędnych określa wzór

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] . \quad (\text{VII.1})$$

Różniczkując wzór (VII.1) względem czasu i korzystając z drugiej zasady Newtona otrzymujemy następujące równanie ruchu dla wektora momentu pędu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r} \times \vec{F}] . \quad (\text{VII.2})$$

Wielkość

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (\text{VII.3})$$

nazywamy *momentem siły*.

Po podstawieniu (VII.3) do wzoru (VII.2) otrzymujemy równanie określające zmiany w czasie momentu pędu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (\text{VII.4})$$

Równanie (VII.4) jest podstawowym równaniem opisującym ruch obrotowy i nazywa się *równaniem ruchu obrotowego*.

Ze wzoru (VII.3) wynika, że jeżeli siła działająca na punkt materialny jest siłą centralną

$$\vec{F} = k \cdot \vec{r} , \quad (\text{VII.5})$$

gdzie $k = f(x, y, z)$ jest skalarną funkcją współrzędnych punktu, to

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = k[\vec{r} \times \vec{r}] = 0 ,$$

skąd

$$\vec{L} = \text{const} . \quad (\text{VII.6})$$

Ze wzoru (VII.6) wynika więc, że jeżeli na punkt materialny działa siła centralna (albo suma sił działających na punkt jest równa zero $\vec{F} = 0$), to moment pędu jest wielkością zachowaną (stałą).

Rotacja punktu materialnego dookoła nieruchomej osi

Na poprzednim wykładzie udowodniliśmy, że przy obrocie punktu materialnego dookoła osi, gdy punkt zatacza okrąg, wektor prędkości chwilowej \vec{v} oraz wektor wodzący \vec{r} punktu materialnego są zawsze wzajemnie prostopadłe, a zatem ze wzoru (VII.1) otrzymujemy:

$$|\vec{L}| = m v \cdot r . \quad (\text{VII.7})$$

Wektor momentu pędu \vec{L} , z definicji iloczynu wektorowego, jest prostopadły do płaszczyzny, na której znajdują się wektory \vec{r} i \vec{v} , a zatem wektor \vec{L} jest skierowany wzdłuż nieruchomej osi. Prędkość liniowa v jest związana z prędkością kątową (patrz wzór (VI.9)) wzorem:

$$v = \omega \cdot r . \quad (\text{VII.8})$$

Po podstawieniu (VII.8) do (VII.7) znajdujemy:

$$|\vec{L}| \equiv L = m \omega \cdot r^2 = m \dot{\varphi} \cdot r^2 . \quad (\text{VII.9})$$

Tu $\dot{\varphi} = d\varphi / dt = \omega$.

Ruch w polu sił centralnych

Dla siły centralnej, tj. dla siły $\vec{F} = f(x, y, z) \cdot \vec{r}$, tor punktu materialnego znajduje się zawsze w płaszczyźnie. Udowodnimy to twierdzenie.

Jak udowodniliśmy wyżej (patrz wzór (VII.6)) moment pędu siły centralnej jest wielkością zachowaną

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = \text{const} . \quad (\text{VII.10})$$

Mnożąc (VII.10) skalarnie przez \vec{r} otrzymujemy

$$(\vec{L} \cdot \vec{r}) = 0 . \quad (\text{VII.11})$$

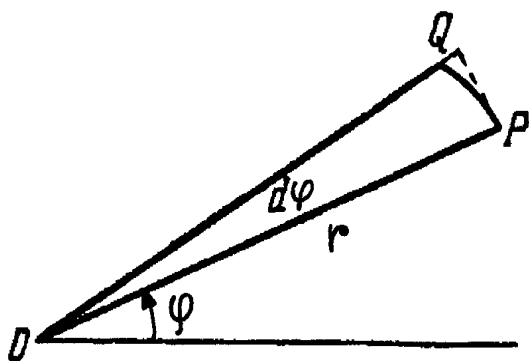
Istotnie, wektor $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, zgodnie z definicją iloczynu wektorowego, jest wektorem prostopadłym do wektora wodzącego \vec{r} , czyli kąt α między wektorem \vec{L} i wektorem \vec{r} jest równy 90° . A zatem iloczyn skalarny $(\vec{L} \cdot \vec{r}) = |\vec{L}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos 90^\circ = 0$, ponieważ $\cos 90^\circ = 0$.

Z definicji momentu pędu i iloczynu wektorowego wynika, że wektor \vec{r} jest zawsze prostopadły do \vec{L} . Ponieważ, zgodnie z (VII.10) dla sił centralnych wektor \vec{L} , ma stały kierunek, to więc wektor $\vec{r}(t)$ będzie zawsze znajdował się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora \vec{L} .

Z uwzględnieniem wzoru (VII.9) prawo zachowania momentu pędu dla sił centralnych przyjmuje postać

$$L = mr^2\dot{\varphi} = const . \quad (\text{VII.12})$$

Prawo zachowania (VII.12) ma prostą interpretację geometryczną. (rys.VII.1) Rozważmy punkt materialny, który w czasie $t, t + dt$ przechodzi od punktu P do punktu Q . Jeżeli dt jest bardzo małym to pole powierzchni prostokątnego trójkąta OPQ będzie polem, które zakreśla wektor \vec{r} w chwili dt . Pole tego trójkąta wynosi:



Rys.VII.1

$$d\sigma = \frac{1}{2}(OP) \cdot (PQ) = \frac{1}{2}r[r \cdot \sin(d\varphi)] .$$

Dla małych odcinków czasowych dt , a zatem małych kątów $d\varphi$ możemy skorzystać ze wzoru $\sin(d\varphi) \cong d\varphi$ i zapisać

$$d\sigma \cong \frac{1}{2}r^2 d\varphi .$$

Skąd wynika, że

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}r^2\omega . \quad (\text{VII.13})$$

Wielkość $d\sigma / dt$ nazywamy *prędkością polową (albo wycinkową, sektorową)*.

Biorąc pod uwagę (VII.13) wzór (VII.12) możemy zapisać w postaci

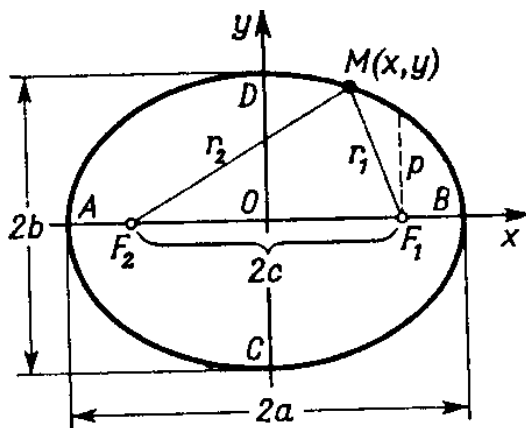
$$L = 2m \frac{d\sigma}{dt} = const . \quad (\text{VII.14})$$

Ze wzoru (VII.14) wynika, że dla sił centralnych, *prędkość polowa (sektorowa) jest wielkością stałą (zachowaną)*. Innymi słowy - wektor wodzący punktu zakreśla równe pola w tych samych odcinkach czasu.

Prawa Keplera. Prawa rządzące ruchem planet

Przykładem siły centralnej jest siła grawitacyjna. Prawa, które rządzą ruchem planet, ustanowił Kepler analizując doświadczalne dane dotyczące obserwacji ruchu planet w latach 1609-1619. Te prawa mówią, że:

1. Każda planeta porusza się po elipsie, w której w jednym z ognisk znajduje się Słońce.



Rys. VII.2 Elipsa

Elipsą nazywamy taką zamkniętą krzywą na płaszczyźnie, dla której suma odległości od dwóch punktów F_1 i F_2 , które nazywamy *ogniskami*, do dowolnego punktu M jest wielkością stałą (rys.VII.2):

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (\text{VII.15})$$

Równanie elipsy ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{VII.16})$$

2. *Prędkość polowa względem Słońca każdej planety jest stała (oczywiście dla różnych planet prędkości polowe będą różne).*

3. *Iloraz kwadratów okresów (T) obiegu poszczególnych planet i sześciątów wielkiej półosi (a) jest stały i dla wszystkich planet jednakowy*

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const} \quad (\text{VII.17})$$

Drugie prawo Keplera udowodniliśmy wyżej. Udowodnienie pierwszego i trzeciego prawa wymaga trochę zaawansowanej matematyki. Nie wszystkie ciała niebieskie poruszają się po elipsach. Na przykład komety poruszają się po *hiperbolach* lub po *parabolach* (określenie tych krzywych podajemy niżej).

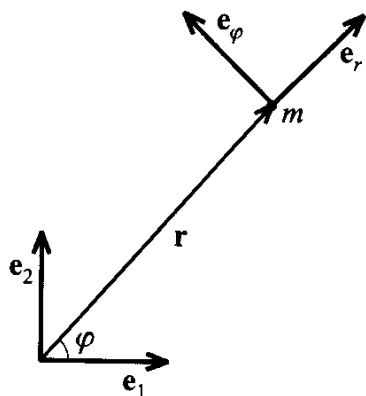
Nie rozwiązując równań ruchu, rozważmy ruch planet w polu grawitacyjnym dużej gwiazdy (na przykład Słońca), korzystając tylko z wielkości fizycznych, które są stałe. Dla układu zamkniętego (odosobnionego) planeta + Słońce wielkościami stałymi są energia układu

i moment pędu (siła grawitacyjna jest siłą centralną). Wzór na energię takiego układu ma postać:

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} - G \frac{m \cdot M}{r} = \text{const} . \quad (\text{VII.18})$$

Tu m jest masą planety, a M jest masą Słońca. We wzorze (VII.18) odrzuciliśmy energię kinetyczną Słońca ponieważ zwykle $M \gg m$ i powolny ruch Słońca dookoła środka mas układu możemy zaniedbać.

Oprócz stałej energii taki układ ma jeszcze jedną wielkość zachowaną (całkę ruchu) - moment pędu. Niech w określonej chwili planeta znajduje się w punkcie, którego położenie określa wektor wodzący \vec{r} (rys.VII.3). Wprowadźmy jednostkowy wektor \vec{e}_r skierowany od centrum siły grawitacyjnej (od Słońca) ku planecie o masie m (rys.VII.3).



Rys.VII.3

Wtedy wektor wodzący planety możemy zapisać w postaci:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r . \quad (\text{VII.19})$$

Jednostkowy wektor \vec{e}_r nie jest wektorem stałym i zmienia swój kierunek wraz ze zmianą położenia planety na orbicie.

Wektor prędkości chwilowej planety znajdujemy różniczkując wzór (VII.19) względem czasu:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} . \quad (\text{VII.20})$$

Żeby znaleźć wektor $d\vec{e}_r / dt$ wprowadźmy jednostkowy wektor \vec{e}_ϕ , prostopadły do wektora \vec{e}_r (rys.VII.3) i zapiszmy wektory \vec{e}_r i \vec{e}_ϕ przez współrzędne w nieruchomym układzie kartezjańskim (rys.VII.3):

$$\vec{e}_r = \cos \phi \cdot \vec{e}_x + \sin \phi \cdot \vec{e}_y , \quad (\text{VII.21})$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \cdot \vec{e}_x + \cos \phi \cdot \vec{e}_y . \quad (\text{VII.22})$$

We wzorach (VII.21) i (VII.22) wektory \vec{e}_x i \vec{e}_y są jednostkowymi nieruchomymi wektorami a zatem

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \sin\varphi \cdot \vec{e}_x + \frac{d\varphi}{dt} \cos\varphi \cdot \vec{e}_y \equiv \omega \cdot \vec{e}_\varphi . \quad (\text{VII.23})$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru (VII.22) oraz ze wzorów

$$\frac{d \cos \varphi (t)}{dt} = -\frac{d \varphi}{dt} \sin \varphi , \quad (\text{VII.24})$$

$$\frac{d \sin \varphi (t)}{dt} = \frac{d \varphi}{dt} \cos \varphi . \quad (\text{VII.25})$$

Po podstawieniu (VII.23) do wzoru (VII.20), znajdujemy

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi . \quad (\text{VII.26})$$

Ze wzoru (VII.26) wynika, że w przypadku krzywoliniowego ruchu prędkość zawiera dwa składniki:

$$\vec{v}_r = \dot{r} \cdot \vec{e}_r . \quad (\text{VII.27a})$$

oraz

$$\vec{v}_\varphi = r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi . \quad (\text{VII.27b})$$

Korzystając ze wzorów (VII.27a) i (VII.27b) łatwo znaleźć moment pędu planety względem początku układu

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = mr \cdot [\vec{e}_r \times (\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi)] = mr^2\dot{\varphi} [\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi] = mr^2\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z . \quad (\text{VII.28})$$

Ponieważ jednostkowe wektory \vec{e}_r i \vec{e}_φ są wzajemnie prostopadłe łatwo znaleźć:

$$v^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v}) = v_r^2 + v_\varphi^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2 . \quad (\text{VII.29})$$

Podstawiając (VII.29) do wzoru (VII.18), otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m \cdot M}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \cdot \dot{\varphi}^2 - G \frac{m \cdot M}{r} . \quad (\text{VII.30})$$

Biorąc pod uwagę wzór (VII.28), wzór (VII.30) możemy zapisać w postaci

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{m \cdot M}{r} = \text{const} . \quad (\text{VII.31})$$

Wprowadzając efektywną energię potencjalną

$$U_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{m \cdot M}{r}, \quad (\text{VII.32})$$

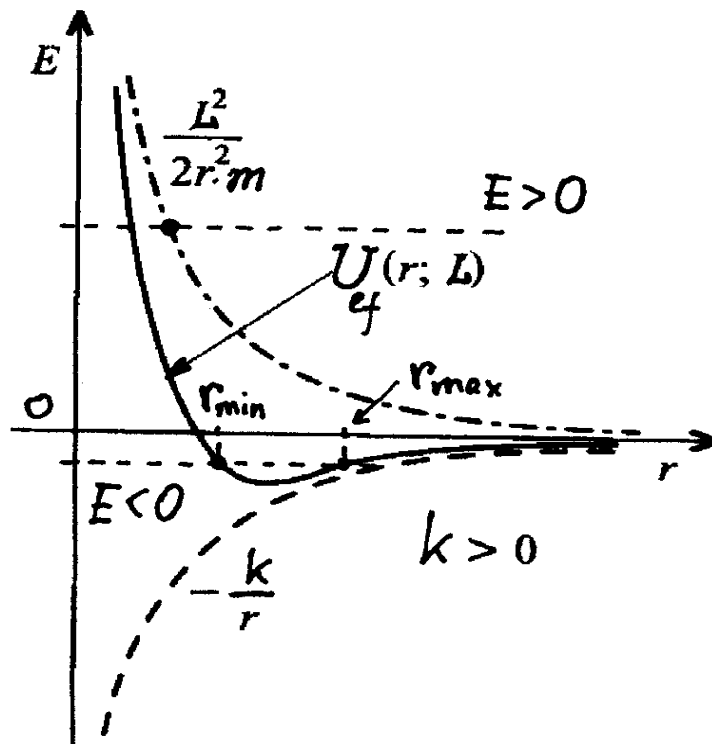
wzór (VII.31) możemy zapisać w postaci

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{ef}(r) = \text{const}. \quad (\text{VII.33})$$

We wzorze (VII.32) wyraz $L^2 / 2mr^2$ nazywa się *odśrodkową energią potencjalną*. Wykres funkcji określającej efektywną energię potencjalną

$$U_{ef}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (\text{VII.34})$$

ma postać przedstawioną na rys.VII.4. We wzorze (VII.34) $k = GmM$.



Rys.VII.4. Zależność $U_{ef}(r)$

Z wykresu, przedstawionego na rys.VII.4, widać, że funkcja $U_{ef}(r)$ ma minimum. W matematyce udowodniono, że funkcja $f(x)$ ma minimum w punkcie $x = x_0$, jeżeli w tym punkcie $df/dx = 0$. A zatem funkcja $U_{ef}(r)$ ma minimum, gdy

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0 ,$$

czyli przy

$$r_m = \frac{L^2}{k \cdot m} . \quad (\text{VII.35})$$

Gdy $r = r_m$ ze wzoru (VII.34) otrzymujemy

$$(U_{ef})_{\min} = -\frac{k}{2r_m} < 0 . \quad (\text{VII.36})$$

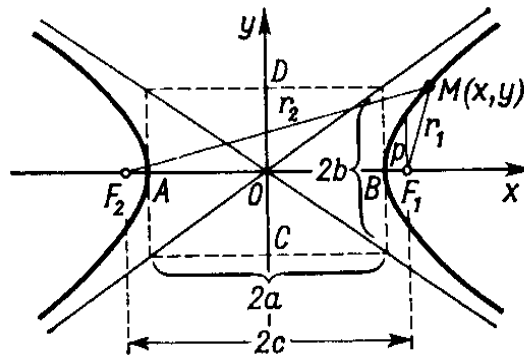
Z rys.VII.4 wynika, że jeżeli $(E - U_{ef}) \geq 0$, ruch planety zachodzi w obszarze ograniczonym ($r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$). Z wykresu funkcji $U_{ef}(r)$ widać, że tor punktu będzie ograniczonym w przestrzeni przy $E < 0$.

Ponieważ $E = T + U$, a T jest zawsze wielkością dodatnią, to ograniczonemu w przestrzeni ruchowi ($E < 0$) odpowiadają przypadki, dla których

$$T \leq |U| . \quad (\text{VII.37})$$

Torem planety w tym przypadku będzie *elipsa*.

Jeżeli $E > 0$, z rys.VIII.4 widać, że ruch cząstki zachodzi w nieograniczonym obszarze ($r \geq r_{\min}$). W tym przypadku $T > |U|$, czyli energia kinetyczna cząstki przewyższa energię potencjalną. Torem planety w tym przypadku będzie *lewa gałąź hiperboli* (rys.VII.5).



Rys.VII.5. Hiperbola

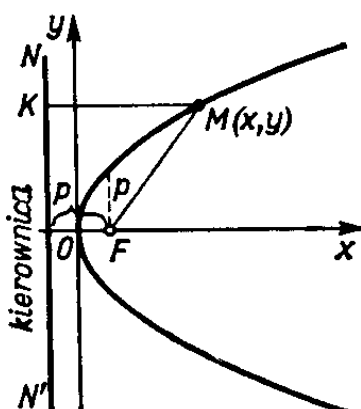
Hiperbolą nazywamy taką nie zamkniętą krzywą na płaszczyźnie, dla której bezwzględna różnica odległości od dwóch punktów F_1 i F_2 , które nazywamy *ogniskami*, do dowolnego punktu M jest wielkością stałą (rys.VII.5):

$$F_1M - F_2M = 2a \quad . \quad (\text{VII.38})$$

Równanie hiperboli ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad (\text{VII.39})$$

W przypadku, gdy $E = 0$ orbitą ciała będzie *parabola* (rys.VII.6). *Parabolą* nazywamy taką nie zamkniętą krzywą na płaszczyźnie, dla której odległości dowolnego punktu M od punktu F , który nazywamy *ogniskiem*, i od prostej, którą nazywamy *kierownicą*, są sobie równe (rys.VII.6):



Rys.VII.6. Parabola

$$FM = KM \quad . \quad (\text{VII.40})$$

Równanie paraboli ma postać:

$$y^2 = 2px \quad . \quad (\text{VII.41})$$

A więc podsumowując, możemy powiedzieć, że tor ciała niebieskiego w polu grawitacyjnym gwiazdy będzie:

- *hiperbolą*, jeżeli całkowita energia $E > 0$;
- *parabola*, jeżeli całkowita energia $E = 0$;
- *elipsą*, jeżeli całkowita energia $0 > E > (U_{ef})_{\min}$;

- określić, jeżeli całkowita energia $E = (U_{ef})_{\min}$.

Przypadek $E < (U_{ef})_{\min}$ nie realizuje się, ponieważ wtedy wielkość $E - U_{ef} = mv^2/2 < 0$, co nie powinno mieć miejsca.

Literatura do Wykładu 7

1. Robert Resnik, David Halliday: *Fizyka 1*, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.266-323; str.385-424.
2. Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, t.1*, PWN, Warszawa 1980, str. 49-53; str.83-87.

Zadania do Wykładu VII

1. Pokazać, że moment pędu punktu materialnego poruszającego się ze stałą prędkością względem dowolnego nieruchomego punktu pozostaje stały podczas ruchu.
2. We wzorze (VII.18) odrzuciliśmy energią kinetyczną Słońca. Udowodnić, że w układzie Słońce + planeta powolny ruch Słońca dookoła środka masy układu możemy zaniedbać.
3. Wychodząc z trzeciej zasady dynamiki Newtona udowodnić, że wypadkowy moment sił wewnętrznych centralnych układu punktów materialnych jest równy zero.
4. Żeby obrócić walec o promieniu R wiszący pionowo o kąt $d\phi$ dookoła osi walca musimy przyłożyć do walca siłę \vec{F} skierowaną prostopadle do osi walca. Udowodnić, że zewnętrzna siła \vec{F} wykonuje pracę $dA = M \cdot d\phi$, gdzie $M = F \cdot R$ - składowa momentu siły \vec{F} wzdłuż osi walca.
5. Udowodnić, że w przypadku ruchu planety po orbicie kołowej $mv^2/2 = GmM_s/2r$.
6. Udowodnić, że w przypadku ruchu planety po orbicie kołowej $r^3/T^2 = GM_s/4\pi^2$.
Wskazówka: skorzystać z rozwiązania zadania 6.
7. Masa Słońca jest równa $M_s \cong 2 \cdot 10^{30}$ kg. Oszacować odległość Słońca od Ziemi. Porównać wynik z odległością $152 \cdot 10^6$ km.
8. Pierwszą prędkością kosmiczną v_1 nazywamy minimalną prędkość, jaką musi mieć statek kosmiczny aby pozostać na orbicie okołoziemskiej jako sztuczna satelita. Wykazać, że $v_1 = \sqrt{r \cdot g} \approx 8$ km/s, gdzie $r \approx 6.4 \cdot 10^6$ m - promień Ziemi.

9. *Drugą prędkością kosmiczną* v_2 nazywamy minimalną prędkość, jaką musi mieć statek, aby mógłby pokonać przyciąganie ziemskie i stać się sztuczną satelitą Słońca.

Udowodnić, że $v_2 = \sqrt{2r \cdot g} = 1.4 \cdot v_1 = 11.2 \text{ km/s}$, gdzie $r \approx 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$ – promień Ziemi.

10. *Trzecią prędkością kosmiczną* v_3 nazywamy minimalną prędkość, jaką należy nadać startującemu z Ziemi statkowi aby mógł on pokonać przyciąganie Słońca i opuścić

układ Słoneczny. Udowodnić, że $v_3 = \sqrt{2G \cdot \frac{M_S}{R}} = 42 \text{ km/s}$. Tu R jest promieniem

orbity Ziemi dookoła Słońca ($R = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$), a $M_S = 1.97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ - masa Słońca.