Wykład 6

Kinematyka ruchu obrotowego punktu materialnego

Ruch po okręgu

Rozważmy ruch punktu materialnego po okręgu. W tym przypadku położenie punktu A na okręgu możemy również określić za pomocą współrzędnych x, y, z w wybranym dowolnie układzie kartezjańskim. Jednak dogodniej jest określić położenie punktu A na okręgu za pomocą kąta φ (rys.VI.1). *Chwilową prędkością kątową* albo *kołową* nazywa się pochodną kąta φ względem czasu t

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \equiv \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi} \quad . \tag{VI.1}$$

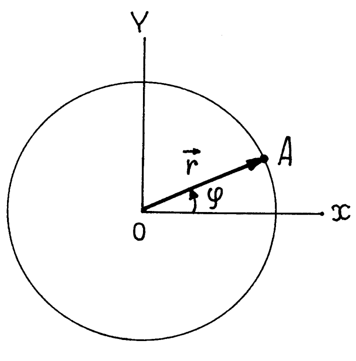
Udowodnimy, że jeżeli $\omega = \omega_0 = const$, czyli prędkość kątowa jest stała wtedy

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \quad . \tag{VI.2}$$

Tu φ_0 - wartość kąta φ w chwili początkowej $t = t_0 = 0$.

Istotnie po podstawieniu (VI.2) do wzoru (VI.1) otrzymujemy:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\omega_0 (t + \Delta t) + \varphi_0] - [\omega_0 t + \varphi_0]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega_0 \cdot \Delta t}{\Delta t} = \omega_0 = const \quad . \tag{VI.3}$$



Rys.VI.1. Ruch obrotowy

Ruch po okręgu ze stałą prędkością kątową nazywamy *ruchem jednostajnym obrotowym*. Czas, po upływie, którego punkt materialny wykonuje jeden obrót nazywamy *okresem ruchu obrotowego*. Okres ruchu obrotowego oznaczamy dużą literą T. Korzystając z definicji okresu, ze wzoru (VI.2) otrzymujemy ($t_0 = 0$):

$$\varphi(t_0 + T) \equiv 2\pi + \varphi_0 = \omega_0 \cdot T + \varphi_0 \quad .$$

Skąd mamy

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad . \tag{VI.4}$$

Wielkość odwrotna do okresu

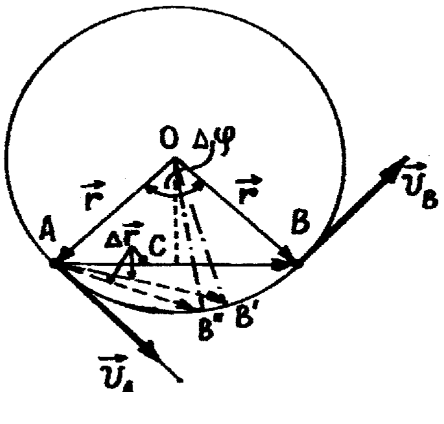
$$\nu_0 = \frac{1}{T} \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} \; . \qquad \text{(VI.5)}$$

nazywa się *częstością ruchu obrotowego*. Łatwo wyjaśnić sens fizyczny częstości ν_0. W czasie równym okresowi $t = T$ punkt materialny wykonuje jeden obrót. A zatem w jednostce czasu punkt materialny wykonuje $\nu_0 = 1/T$ obrotów. Na przykład, jeżeli $T = 1/100$ sekundy, to w czasie jednej setnej sekundy punkt wykonuje jeden obrót, a w czasie 1 sekundy punkt materialny wykonuje 100 obrotów. Więc częstość $\nu_0 = 1/T$ jest liczbą obrotów punktu materialnego w jednostce czasu. Częstość mierzymy w hercach (Hz). 1 Hz = 1 s^{-1}.

W ogólnym przypadku prędkość kątowa ω może zależeć od czasu. Zmiany prędkości kątowej w czasie określa *chwilowe przyspieszenie kątowe*:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega} \; . \qquad \text{(VI.6)}$$

Znajdziemy związek między chwilową prędkością liniową i chwilową prędkością kątową, określoną wzorem (VI.1).



Rys.VI.2.

Niech w chwili początkowej $t = t_0 = 0$ punkt materialny znajduje się na okręgu w punkcie A, a w chwili $t = \Delta t$ - w punkcie B (rys.VI.2). Jeżeli rozważamy bardzo mały czas $t = \Delta t$, długość łuku AB jest w przybliżeniu równa długości cięciwy AB. Przybliżenie to jest tym lepiej spełnione, im bardziej zmniejszmy odcinek czasowy Δt. Wtedy dla chwilowej liniowej prędkości punktu możemy zapisać

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t} \; . \qquad \text{(VI.7)}$$

Z rys.VI.2 widać, że

$$AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right) \approx 2 \cdot r \cdot \frac{\Delta \varphi}{2} = r \cdot \Delta \varphi \; . \qquad \text{(VI.8)}$$

Tu skorzystaliśmy z przybliżenia, że dla małych kątów $\sin\alpha \approx \alpha$.

Po podstawieniu (VI.8) do (VI.7) znajdujemy

$$v = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega \quad . \tag{VI.9}$$

Ze wzoru (VI.9) otrzymujemy, że w przypadku ruchu punktu materialnego po okręgu ze stałą prędkością kątową $\omega_0 = const$, bezwzględna wartość prędkości liniowej $v \equiv |\vec{v}|$ jest też stała.

Z rys.VI.2 wynika, że gdy $\Delta t \to 0$ wektor przemieszczenia $\Delta \vec{r}$ dąży do stycznej w punkcie A. A zatem prędkość chwilowa w punkcie A jest wektorem stycznym do krzywej w tym punkcie, czyli jest prostopadła do wektora wodzącego punktu $\vec{r}$. Z rys.VI.2 wynika również, że prędkość liniowa $\vec{v}$ punktu materialnego poruszającego się po okręgu ciągle zmienia swój kierunek. A zatem ruch po okręgu jest ruchem z przyspieszeniem.

Znajdziemy teraz przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się po okręgu, w przypadku, gdy prędkość linowa $|\vec{v}| = const$. Rozważmy znów dwa punkty A i B (rys.VI.3). Z podobieństwa trójkątów AOB i DBE (rys.VI.3) wynika, że wektor $\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$, który pokrywa się z wektorem $\overrightarrow{DE}$ ma długość

$$\begin{aligned} DE &= 2 \cdot DF = 2 \cdot v \cdot \sin\left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right) \\ &\approx 2 \cdot v \cdot \frac{\Delta \varphi}{2} = v \cdot \Delta \varphi \end{aligned} \quad . \tag{VI.10}$$

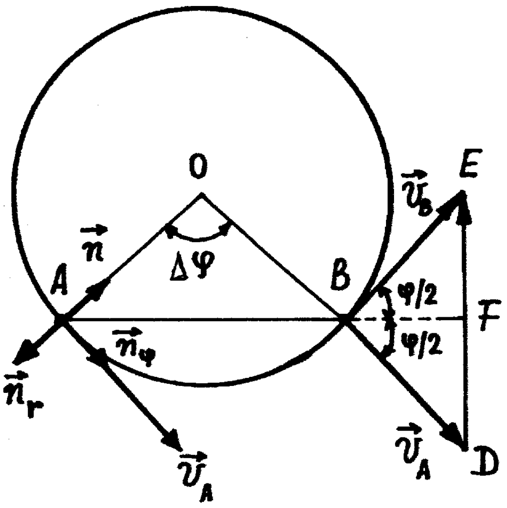
A zatem dla długości wektora przyspieszenia możemy zapisać:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{DE}{\Delta t} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt} = v \cdot \omega \quad . \tag{VI.11}$$

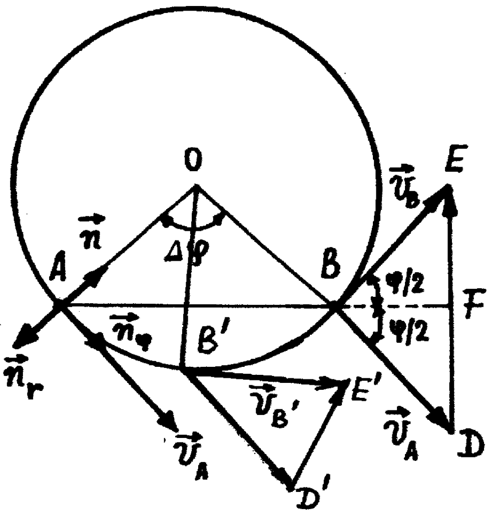
Biorąc pod uwagę wzór (VI.9), ze wzoru (VI.10) mamy

$$a = v \cdot \omega = \frac{v^2}{r} \quad . \tag{VI.12}$$

Kierunek wektora przyspieszenia (VI.12) pokrywa się z kierunkiem wektora $\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \overrightarrow{DE}$, który przy $\Delta t \to 0$ jest prostopadły do wektora prędkości $\vec{v}$ w punkcie A (rys.VI.4). A zatem wektor przyspieszenia $\vec{a}$ punktu materialnego jest równoległy do wektora wodzącego $\vec{r}$, ale zwrot wektora $\vec{a}$ jest przeciwny do zwrotu wektora $\vec{r}$. Dlatego przyspieszenie to nosi nazwę *przyspieszenia radialnego* lub *przyspieszenia dośrodkowego* i oznacza się $\vec{a}_r$.



Rys.VI.3



Rys.VI.4

Podsumowując możemy powiedzieć, że ruch obrotowy punktu materialnego po okręgu ze stałą prędkością odbywa się ze stałym dośrodkowym przyspieszeniem skierowanym ku środkowi okręgu. Bez tego dośrodkowego przyspieszenia ciało (punkt materialny) poruszałoby się wzdłuż wektora prędkości $\vec{v}$. Istnienie dośrodkowego przyspieszenia $\vec{a}_r$ powoduje, że ciało ciągle „spada" na środek okręgu i poruszający się punkt materialny pozostaje na okręgu.

Przyspieszenie styczne i dośrodkowe

Wprowadzając jednostkowy wektor $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$), (rys.VI.3) skierowany od punktu A ku środkowi okręgu, wektor przyspieszenia dośrodkowego możemy zapisać w postaci:

$$\vec{a}_r = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n} \; . \qquad \text{(VI.13)}$$

Jednostkowy wektor $\vec{n}$ jest podobny do wektorów jednostkowych bazy układu odniesienia $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$. Wektor ten wyznacza jedynie kierunek w przestrzeni. Jednak, w odróżnieniu od wektorów $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$, wektor $\vec{n}$ nie jest wektorem stałym i zmienia swój kierunek wraz ze zmianą położenia punktu materialnego na okręgu. Wektor $\vec{n}$ jest skierowany do środka okręgu, a zatem ma kierunek przeciwny do kierunku wektora wodzącego $\vec{r}$. Wprowadzając jednostkowy wektor:

$$\vec{n}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\vec{n} \ , \tag{VI.14}$$

przyspieszenie dośrodkowe możemy zapisać w postaci:

$$\vec{a}_r = -\frac{\upsilon^2}{r}\cdot\vec{n}_r \equiv -\omega^2\cdot\vec{r} \ . \tag{VI.15}$$

Tu uwzględniliśmy, że $(\upsilon / r) = \omega$ (patrz wzór (VI.9)) oraz $\vec{r} = r\cdot|\vec{n}_r|$ (patrz wzór (VI.14)).

Wektor prędkości chwilowej punktu materialnego poruszającego się po okręgu, jak widzieliśmy wyżej, jest wektorem stycznym do okręgu w punkcie gdzie znajduje się punkt materialny. Wprowadzając jednostkowy wektor $\vec{n}_\varphi$, styczny do okręgu w punkcie A (rys.VI.3):

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} \ , \tag{VI.16}$$

wektor prędkości chwilowej dla ruchu po okręgu możemy zapisać w postaci:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\cdot\vec{n}_\varphi = \omega\cdot r\cdot\vec{n}_\varphi \ . \tag{VI.17}$$

Jednostkowy wektor $\vec{n}_\varphi$ jak i wektor $\vec{n}_r$ nie jest stałym wektorem i zmienia swój kierunek przy zmianie położenia punktu materialnego na okręgu.

Korzystając ze wzoru (VI.17) mamy

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \upsilon\cdot\frac{d\vec{n}_\varphi}{dt} \ . \tag{VI.18}$$

Porównując wzór (VI.18) ze wzorem (VI.15), który wyprowadziliśmy rozważając przypadek ruchu po okręgu ze stałą prędkością kątową, znajdujemy

$$\vec{a}_r = -\frac{\upsilon^2}{r}\cdot\vec{n}_r \equiv \upsilon\cdot\frac{d\vec{n}_\varphi}{dt} \ . \tag{VI.19}$$

Ze wzoru (VI.19) otrzymujemy ważny dla następnych rozważań wzór:

$$\frac{d\vec{n}_\varphi}{dt} = -\frac{\upsilon}{r}\cdot\vec{n}_r \ . \tag{VI.20}$$

Chociaż wyprowadziliśmy wzór (VI.20) tylko na przykładzie ruchu po okręgu ze stałą prędkością, okazuje się, że ten wzór jest słuszny w przypadku ruchu po dowolnej krzywej nie będącej okręgiem. W tym przypadku jednak r określa tak zwany *promień krzywizny krzywej* w punkcie, w którym obliczamy przyspieszenie. Promień krzywizny określa o ile jest zakrzywiona krzywa w danym punkcie. Dla okręgu promień krzywizny dla wszystkich punktów jest taki sam i pokrywa się z promieniem okręgu. Dla prostej promień krzywizny jest równy nieskończoności. Dla dowolnej krzywej im bardziej jest zakrzywiona krzywa w otoczeniu wybranego punktu, tym mniejszy jest promień krzywizny. O promieniu krzywizny krzywej będzie mową później na analizie matematycznej.

Skorzystamy teraz z matematycznego twierdzenia, że prawie dowolną funkcję $f(x+\Delta x)$ można przedstawić w postaci szeregu Taylora

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{df}{dx}\Delta x+O(\Delta x^2)\ , \tag{VI.21}$$

tu $O(\Delta x^2)$ oznacza wyrazy zawierające $\Delta x^2, \Delta x^3, \ldots$, a słowo „prawie" oznacza, że rozważamy taką funkcję $f(x)$ dla której istnieje pierwsza (i drugie) pochodne.

Udowodnimy teraz jeden z podstawowych wzorów rachunku różniczkowego - wzór na pochodną od iloczynu funkcji

$$\frac{d}{dt}[u(t)\cdot h(t)]=u(t)\cdot\frac{dh}{dt}+h(t)\cdot\frac{du}{dt}\ . \tag{VI.22}$$

Biorąc pod uwagę wzór (VI.21) oraz określenie pochodnej natychmiast otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}[u(t)\cdot h(t)]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)\cdot h(t+\Delta t)-u(t)\cdot h(t)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[u(t)+\frac{du}{dt}\Delta t+O(\Delta x^2)]\cdot[h(t)+\frac{dh}{dt}\Delta t+O(\Delta x^2)]-u(t)\cdot h(t)}{\Delta t}=u(t)\cdot\frac{dh}{dt}+h(t)\cdot\frac{du}{dt}\ .$$

Wróćmy teraz do ruchu punktu materialnego wzdłuż dowolnej krzywej na płaszczyźnie. W tym przypadku, korzystając ze wzoru (VI.22) dla przyspieszenia punktu materialnego znajdujemy

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\equiv\frac{d[\upsilon(t)\cdot\vec{n}_\varphi]}{dt}=\frac{d\upsilon}{dt}\vec{n}_\varphi+\upsilon\cdot\frac{d\vec{n}_\varphi}{dt}\ . \tag{VI.23}$$

Biorąc pod uwagę wzór (VI.20), wzór (VI.23) możemy zapisać w postaci

$$\vec{a}=\frac{d\upsilon}{dt}\vec{n}_\varphi-\frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}_r\ . \tag{VI.24}$$

Ze wzoru (VI.24) wynika, że w przypadku ruchu po dowolnej krzywej ze zmienną w czasie prędkością przyspieszenie zawiera dwa składniki:

$$\vec{a}_r = -\frac{\upsilon^2}{r}\cdot\vec{n}_r \qquad \text{(VI.25)}$$

- przyspieszenie dośrodkowe, oraz

$$\vec{a}_t = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{n}_\varphi \qquad \text{(VI.26)}$$

- *przyspieszenie styczne*.

Wektor przyspieszenia dośrodkowego jest prostopadły do wektora prędkości punktu, a zatem wywołuje zmiany kierunku wektora prędkości. Natomiast wektor przyspieszenia stycznego jest równoległy do wektora prędkości punku, a więc zmienia tylko wartość (długość) wektora prędkości.

<u>Zadanie 1:</u> punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością, która zmienia się w czasie jak:

$$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = c\cdot t \ ,$$

gdzie c jest stała. Znajdziemy przyspieszenie dośrodkowe i przyspieszenie styczne.

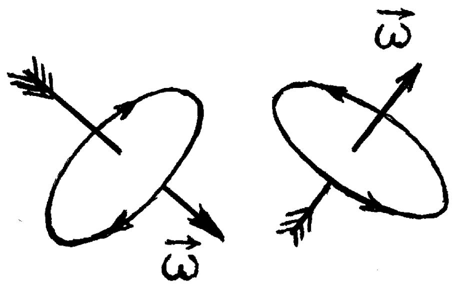
<u>Rozwiązanie</u>: ze wzorów (VI.25) i (VI.26) otrzymujemy:

$$\vec{a}_r = -\frac{\upsilon^2}{r}\cdot\vec{n}_r = -\frac{c^2t^2}{r}\cdot\vec{n}_r \ ,$$

$$\vec{a}_t = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{n}_\varphi = c\cdot\vec{n}_\varphi \ .$$

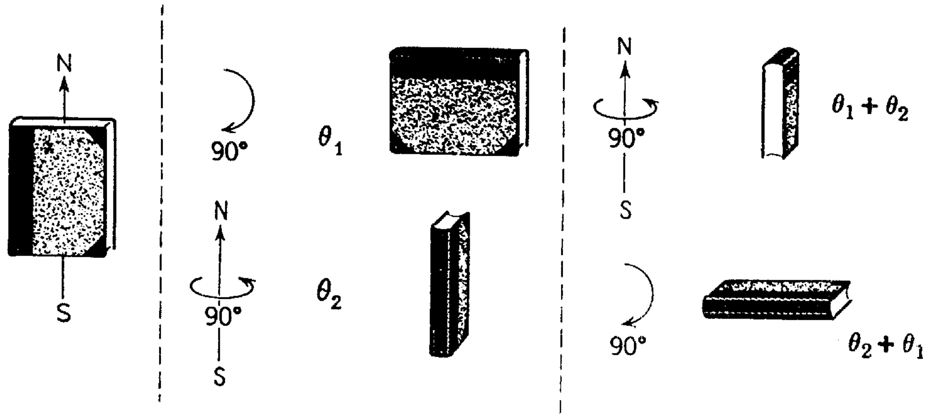
Wielkości kątowe jako wektory. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Przy rotacji punktu materialnego po okręgu ruch punktu może zachodzić w dwie różne strony: zgodnie z wskazówką zegara albo w przeciwną stronę. Dlatego, żeby rozróżnić te dwa możliwe ruchy po okręgu wprowadza się *wektor prędkości kątowej albo wektor prędkości kołowej*. Wektor ten wprowadzamy stosując reguły (rys.VI.5):



Rys. VI.5. Wektor prędkości kątowej

1) ze środka okręgu rysujemy oś obrotu - prostą prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch kołowy; 2) na osi obrotu ze środka okręgu oznaczamy odcinek o długości równej wartości prędkości kątowej; 3) kierunek otrzymanego odcinka (strzałkę) wybieramy w taki sposób abyśmy patrząc wzdłuż niego (z tyłu strzałki) widzieli ruch obrotowy punktu odbywający się zgodnie ze wskazówką zegara. Może powstać pytanie: „Czy wprowadzone w taki sposób wektory rzeczywiście są wektorami?”



Rys.VI.6

Dlatego, żeby odpowiedzieć na to pytanie musimy sprawdzić, czy tak wprowadzone wektory spełniają prawa dotyczące wektorów, m.in. prawo dodawania wektorów, a w szczególności prawo przemienności $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Łatwo zauważyć z prostego przykładu obrotu książki (rys.VI.6), że prawo to nie jest słuszne, w przypadku skończonych przemieszczeń kątowych. Jednak wektor $\vec{\omega}$ jest określony jako pochodna od kąta obrotu φ, czyli dotyczy nieskończenie małych przemieszczeń kątowych ($\vec{\varphi}(t_2) \approx \vec{\varphi}(t_1)$)

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t = t_2 - t_1 \to 0} \frac{\vec{\varphi}(t_2) - \vec{\varphi}(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

Tu wektor $\vec{\varphi}$ ma zwrot wzdłuż osi obrotu, a wartość bezwzględną równą φ .

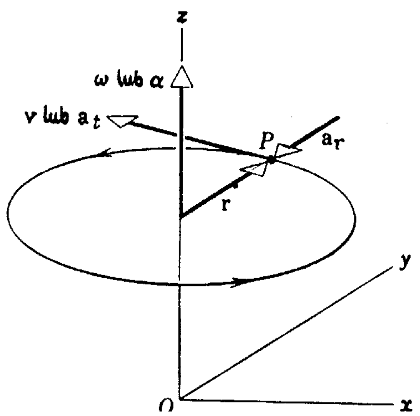
Można udowodnić, że dla nieskończenie małych przemieszczeń kątowych prawo przemienności jest słuszne, czyli $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$. A zatem wprowadzenie wektorów opisujących przemieszczenia kątowe jest uzasadnione.

Otrzymaliśmy wyżej następujące wzory, opisujące ruch obrotowy

$$\vec{v} = v \cdot \vec{n}_\varphi = \omega \cdot r \cdot \vec{n}_\varphi \ , \qquad \text{(VI.27)}$$

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{n}_\varphi = r \cdot \frac{d\omega}{dt}\vec{n}_\varphi \ , \qquad \text{(VI.28)}$$

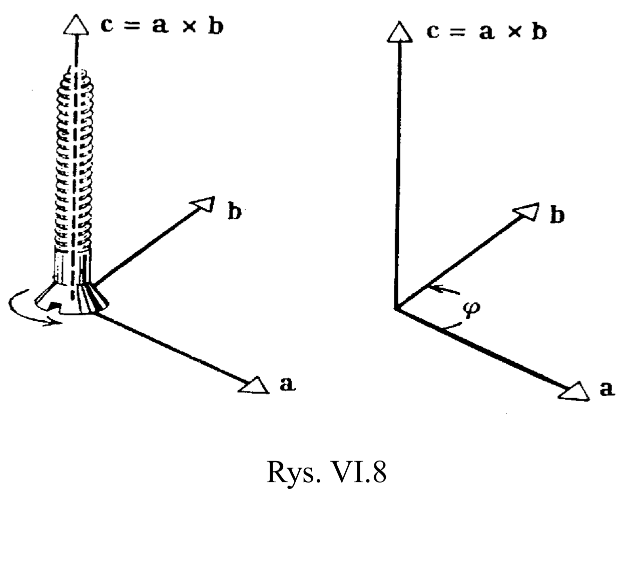
$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{n}_r = -\omega \cdot v \cdot \vec{n}_r \ . \qquad \text{(VI.29)}$$



Rys.VI.7

Rys. VI.7 przedstawia wektory $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}_t, \vec{a}_r$, $\vec{\omega}, \vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ dla obracającego się punktu materialnego. Wzory (VI.27) – (VI.29) dogodniej jest zapisać w postaci, w której zamiast skalarnych wielkości $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}_t, \vec{a}_r$, $\vec{\omega}, \vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ występują wielkości wektorowe $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}_t, \vec{a}_r, \vec{\omega}, \vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. Ta postać wzorów (VI.27) – (VI.29) będzie szczególnie użyteczna dla przypadków, dla których oś obrotu jest osią ruchomą.

Dlatego, żeby wykonać takie przekształcenie wzorów (VI.27) – (VI.29) musimy wprowadzić pojęcie iloczynu wektorowego dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. *Iloczynem wektorowym* dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, oznaczanym jako $\vec{a} \times \vec{b}$ (albo $[\vec{a} \times \vec{b}]$) nazywamy wektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez te dwa wektory (rys.VI.8).



Rys. VI.8

Wartość bezwzględna wektora $\vec{c}$ określa równanie

$$c = |\vec{c}| = ab \cdot \sin\varphi \quad , \tag{VI.30}$$

gdzie φ jest mniejszym kątem zawartym między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zwrot wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ określa reguła prawoskrętnej śruby: kierunek poruszania się śruby prawoskrętnej (od wektora $\vec{a}$ do wektora $\vec{b}$) określa zwrot wektora $\vec{c}$ (rys.VI.8).

Korzystając z określenia iloczynu wektorowego łatwo zapisać wzory (VI.27) – (VI.29) przez wektory $\vec{r}, \vec{\upsilon}, \vec{a}_t, \vec{a}_r, \vec{\omega}, \vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad , \tag{VI.31}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad , \tag{VI.32}$$

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon} \quad . \tag{VI.33}$$

Istotnie, iloczyn wektorowy $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ma wartość bezwzględną $\omega \cdot r$ i kierunek pokrywający się ze zwrotem wektora $\vec{n}_\varphi$. Podobnie, iloczyn wektorowy $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ ma wartość bezwzględną $(d\omega / dt) \cdot r$ i kierunek pokrywający się ze zwrotem wektora $\vec{n}_\varphi$. Iloczyn wektorowy $\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$ ma wartość bezwzględną $\omega \cdot \upsilon$ i kierunek pokrywający się ze zwrotem wektora $-\vec{n}_r$.

Literatura do Wykładu 6.

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str. 248 – 265.*
2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. 44-53.*

Zadania do Wykładu VI

1. Położenie kątowe punktu materialnego znajdującego się na obręczy obracającego się koła określa wzór

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta \cdot t^2 . \tag{VI.34}$$

   a) Wyprowadzić wzór, który określa zależność prędkości kątowej od czasu; b) udowodnić, że wzór (VI.34) opisuje ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem kątowym; c) Jaki sens mają φ_0 i ω_0 w równaniu (VI.34).

2. Płyta gramofonowa obraca się z prędkością kątową 33 obr/min. Jaka jest prędkość liniowa punktu płyty, w którym dotyka igła: a) na początku i b) na końcu odtwarzania?

Założyć, że odległości igły od osi obrotu wynoszą 15 cm na początku i 6 cm na końcu. *Odpowiedź*: a) 31 m/min; b) 12,4 m/min.

3. Położenie kątowe punktu materialnego znajdującego się na obręczy obracającego się koła określa wzór $\varphi = at^3 - bt$. a) Jaki wymiar mają wielkości a i b?. Znaleźć wzory na prędkość i przyspieszenie kątowe.
4. Obracające się wokół swojej osi koło, wskutek tarcia o oś, zaczyna hamować. Po upływie 3 min jego prędkość kątowa wynosi 0,7 prędkości kątowej $\omega_0 = 10$ obr/min na początku tej minuty. Przyjmując, że siły tarcia są stałe, obliczyć opóźnienie kątowe koła. *Odpowiedź*: -1 obr/min^2.
5. Obracające się wokół swojej osi koło, wskutek tarcia o oś, zaczyna hamować. Po upływie 1 min jego prędkość kątowa wynosi 0,9 prędkości kątowej ω_0 na początku tej minuty. Przyjmując, że siły tarcia są stałe, obliczyć prędkość kątową po upływie 3 min. *Odpowiedź*: 0,7 ω_0.
6. Stałe przyspieszenie kątowe koła wynosi 1 rad/s^2. Ile musi być równa prędkość początkowa koła, aby w ciągu 2 s koło obróciło się o 360^0. *Odpowiedź*: 2,14 rad/s.
7. Jaka jest prędkość kątowa samochodu jadącego po torze kołowym o promieniu 90 m z prędkością 60 km/h? *Odpowiedź*: 0,185 rad/s.
8. Jaki jest stosunek przyspieszenia dośrodkowego związanego z obrotem Ziemi punktu znajdującego się na równiku, do przyspieszenia Ziemi związanego z jej ruchem dookoła Słońca? Przyjąć kołowe orbity. (Promień Ziemi wynosi około $R \approx$ 6 400 km, a odległość Ziemi od Słońca wynosi około $R \approx$ 150 10^6 km). *Odpowiedź*: 5,7.
9. Ciało obraca się wokół stałej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym β. Prędkość początkowa kątowa równa się zeru. Udowodnić, że dla punktu znajdującego się w odległości r od osi obrotu przyspieszenia dośrodkowe i styczne są równe $a_r = r\beta^2 t^2$ i $a_t = r\beta$.
10. Punkt materialny obraca się wokół stałej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym β. Odległość punktu od osi wynosi r, a jego prędkość początkowa kątowa równa się zeru. W pewnej chwili przyspieszenie wypadkowe (dośrodkowe + styczne) tworzy kąt 60^0 z przyspieszeniem stycznym. O jaki kąt obrócił się punkt materialny dookoła osi do tej chwili? *Odpowiedź*: $\varphi = \sqrt{3}/2$ rad. *Wskazówka*: skorzystać z rozwiązania zadania 9.