Wykład 5

Zderzenia w mechanice

Zderzeniem nazywamy zjawisko, wskutek którego zachodzą raptowne zmiany ruchu dwóch albo kilku zderzających się ciał. Warto podkreślić, że przy zderzeniu siły, które działają między cząstkami występują przez bardzo krótki czas, tak że możemy zawsze powiedzieć, że to było do zderzenia, a to po zderzeniu. Siły krótkotrwałe (impulsowe), które działają przy zderzeniu nazywamy siłami *zderzeniowymi*.

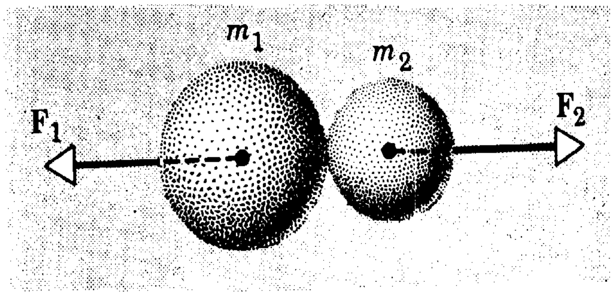
Popęd siły

Ponieważ siły zderzeniowe działają przez bardzo krótki czas Δt, to korzystając z drugiego prawa Newtona możemy napisać, że zmiana pędu $\Delta\vec{p}$ ciała podczas działania sił zderzeniowych $\vec{F}$ wynosi

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{F}\cdot\Delta t \ . \tag{V.1}$$

Tu wskaźniki i i f odnoszą się do czasu przed i po zderzeniu. Wielkość $\vec{F}\cdot\Delta t$ nosi nazwę *popędu siły.* A zatem, *zmiana pędu ciała pod wpływem zderzeniowej siły* $\vec{F}$ *jest równa popędowi siły.*

Rozważmy teraz zderzenie pomiędzy dwiema cząstkami o masach m_1 i m_2 (rys.V.1)



RysV.1

Na podstawie wzoru (V.1) możemy zapisać, że zmiany pędów cząstek pod wpływem zderzenia wynoszą

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_1\cdot\Delta t \ , \tag{V.2}$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_2\cdot\Delta t \ , \tag{V.3}$$

gdzie $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ są, odpowiednio siły zderzeniowe, działające na pierwsze i drugie ciało.

Zgodnie z trzecią zasadą Newtona siły zderzeniowe $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ muszą być równe, względem wartości bezwzględnej i być przeciwnie do siebie skierowane

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \ . \tag{V.4}$$

Biorąc pod uwagę wzór (V.4) otrzymujemy, że całkowita zmiana pędu $\Delta\vec{P}$ układu w wyniku zderzenia równa się zeru

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \ . \tag{V.5}$$

Wzór (V.5) wyraża, *prawo zachowania całkowitego pędu cząstek podczas zderzenia*. Należy podkreślić, że ponieważ siły zderzeniowe są *siłami wewnętrznymi*, prawo zachowania pędu cząstek podczas zderzenia, wynika bezpośrednio z prawa zachowania pędu izolowanego układu cząstek (patrz Wykład 3 – wzór (III.9)).

Ze wzoru (V.1) wynika, że im krótszy jest czas zderzenia, tym większa jest zmiana pędu cząstki. Rozważmy przykład ilustrujący to zdanie.

Zadanie 1. Piłka ważąca $0{,}2$ kG z prędkością $\upsilon = 30$ m/s uderza prostopadle w ścianę, po czym odbija się od niej z prędkością nie zmienioną co do wartości. Jaka siła zderzeniowa działa na piłkę, jeżeli czas zderzenia wynosi $\Delta t = 0{,}01$ s?

Rozwiązanie: Wybierzmy oś Ox układu współrzędnych wzdłuż prędkości piłki po zderzeniu. Wtedy, zgodnie z treścią zadania, możemy zapisać

$$\upsilon_{fx} = -\upsilon_{ix} \equiv \upsilon \ . \tag{V.6}$$

Uwzględniając (V.6), ze wzoru (V.1) otrzymujemy

$$\Delta p_x = m\upsilon_{fx} - m\upsilon_{ix} = 2m\upsilon = F_x \cdot \Delta t \ . \tag{V.7}$$

Skąd mamy

$$F_x = \frac{2m\upsilon}{\Delta t} = \frac{2 \cdot (0{,}200kG) \cdot (30m/s)}{9{,}8m/s^2 \cdot 0{,}01s} \approx 100kG \ . \tag{V.8}$$

Dla krótszych czasów średnia siła będzie jeszcze większa. Na przykład, jeżeli $\Delta t = 0{,}001$ s, to $F_x = 1000kG$.

Zderzenia doskonale niesprężyste

Zderzenie dwóch ciał nazywamy *zderzeniem doskonale (całkowicie) niesprężystym*, gdy po zderzeniu oba ciała łączą się i poruszają się dalej jako całość. Przykładem takiego zderzenia jest uderzenie kuli w zawieszony worek z piaskiem. Procesy fizyczne, które zachodzą podczas tego zderzenia są bardzo złożone. Jednak nie rozważając tych zjawisk, możemy znaleźć prędkość połączonego ciała, korzystając tylko z zasady zachowania pędu.

Rozważmy zderzenia dwóch ciał (punktów materialnych) o masach m_1 i m_2, poruszających się ruchem postępowym z prędkościami $\vec{\upsilon}_1$ i $\vec{\upsilon}_2$. Na dwa zderzające się ciała nie działa żadna siła zewnętrzna, a zatem, zgodnie z zasadą zachowania pędu dla odosobnionego układu, wypadkowy pęd dwóch ciał do i po zderzeniu musi być ten sam. Oznaczając prędkość połączonego ciała przez $\vec{V}$ zapiszmy prawo zachowania pędu

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\cdot\vec{V} \ ,$$

skąd dla prędkości $\vec{V}$ otrzymujemy

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \ . \tag{V.9}$$

Znajdziemy teraz energię kinetyczną dwóch ciał do i po zderzeniu. Do zderzenia energia kinetyczna dwóch ciał była równa:

$$T_{do} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \ . \tag{V.10}$$

Po zderzeniu energia kinetyczna układu jest równa:

$$T_{po} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\cdot V^2 \ . \tag{V.11}$$

Po podstawieniu (V.9) do (V.11), znajdujemy

$$T_{po} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\cdot V^2 =$$

$$= \frac{1}{2(m_1 + m_2)}\cdot\left(m_1^2\upsilon_1^2 + 2m_1m_2(\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{\upsilon}_2) + m_2^2\upsilon_2^2\right). \tag{V.12}$$

Wydzielimy w tym wzorze energią kinetyczną T_{do}, dodając i odejmując człon

$\dfrac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2)$:

$$T_{po} = \frac{1}{2(m_1 + m_2)}\cdot\left(m_1^2\upsilon_1^2 + 2m_1m_2(\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{\upsilon}_2) + m_2^2\upsilon_2^2\right) +$$

$$+ \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2) - \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2(m_1 + m_2)}\cdot\{[m_1(m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_1^2) + m_2(m_2\upsilon_2^2 + m_1\upsilon_2^2)] +$$

$$+ 2m_1m_2(\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{\upsilon}_2) - m_1m_2\upsilon_1^2 - m_1m_2\upsilon_2^2\} =$$

$$= T_{do} - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot(\upsilon_1^2 - 2(\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{\upsilon}_2) + \upsilon_2^2) =$$

$$= T_{do} - \frac{1}{2}\mu\cdot(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2. \tag{V.13}$$

Tu

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{V.14}$$

jest masą zredukowaną.

Ze wzoru (V.13) wnioskujemy, że przy zderzeniu niesprężystym energia kinetyczna układu (dwóch zderzających się ciał) maleje:

$$A = T_{po} - T_{do} = -\frac{1}{2}\mu\cdot(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2 . \tag{V.15}$$

Ze wzoru (V.15) wynika, że podczas zderzenia niesprężystego całkowita energia układu nie zachowuje się. Zmiana energii kinetycznej jest równa, jak wiemy, pracy, którą wykonują siły zderzeniowe występujące przy zderzeniu. A zatem zmniejszenie całkowitej energii kinetycznej układu może być wykorzystane i wykorzystuje się do wykonania pracy, na przykład kucia albo wbijania gwoździ.

Z równania (V.15) widzimy, że największa zmiana energii kinetycznej powstaje gdy wektory $\vec{\upsilon}_1$ i $\vec{\upsilon}_2$ są skierowane w strony przeciwne.

<u>Zadanie 2.</u> Rozważmy zderzenie dwóch samochodów o masach $m_1 = m_2 = m$ w przypadku a) samochody przed zderzeniem miały równe, co do wartości bezwzględnej, prędkości $\vec{\upsilon}_1 = -\vec{\upsilon}_2 \equiv \vec{\upsilon}$ i b) prędkość jednego samochodu wynosi $\vec{\upsilon}_1 \equiv \vec{\upsilon}$ a drugi samochód jest nieruchomy $\vec{\upsilon}_2 \equiv 0$.

<u>Rozwiązanie</u>: a) Zgodnie z (V.10) całkowita energia kinetyczna dwóch samochodów do zderzenia wynosi

$$T_{do} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = m\upsilon^2 . \tag{V.16}$$

Po zderzeniu, zgodnie z (V.15) praca sił zderzeniowych jest równa (tu $\mu = m/2$)

$$A = T_{po} - T_{do} = -\frac{1}{2}\mu\cdot(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2 = -m\upsilon^2 . \tag{V.17}$$

Prędkość samochodów po zderzeniu, zgodnie z (V.9), wynosi

$$\vec{V} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} = 0 \ . \tag{V.18}$$

A zatem po zderzeniu dwa samochody zatrzymują się, a cała energia kinetyczna samochodów idzie na zniszczenie samochodów.

b) Zgodnie z (V.10), (V.15) i (V.9) mamy

$$T_{do} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 \ . \tag{V.19}$$

$$A = T_{po} - T_{do} = -\frac{1}{2}\mu \cdot v^2 = -\frac{1}{4}mv^2 \ . \tag{V.20}$$

$$\vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{v} \ . \tag{V.21}$$

Ze wzoru (V.21) wynika, że po zderzeniu dwa samochody poruszają się jako całość z prędkością $v/2$. Z porównania wzorów (V.20) i (V.17) widzimy, że w tym przypadku tylko połowa energii kinetycznej samochodów idzie na ich zniszczenie.

Zderzenia doskonale sprężyste

Zderzenie dwóch ciał nazywamy *zderzeniem doskonale sprężystym*, jeżeli podczas tego zderzenia energia całkowita nie ulega zmianie. To oznacza, że przy zderzeniu wewnętrzna energia ciał nie zmienia się.

Rozważmy zderzenie dwóch ciał o masach m_1 i m_2, poruszających się ruchem postępowym z prędkościami $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Oznaczając przez $\vec{v}_1^{\,/}$ i $\vec{v}_2^{\,/}$ prędkości cząstek po zderzeniu, zapiszmy prawo zachowania pędu i prawo zachowania energii dla takiego układu:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,/} + m_2\vec{v}_2^{\,/} \ , \tag{V.22a}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^{/2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{/2} \ . \tag{V.22b}$$

Układ równań (V.22) to układ czterech równań: wektorowe równanie (V.22a) jest układem trzech równań dla składowych wektorów plus jedno równanie (V.22b). Natomiast niewiadomych w tym układzie równań mamy sześć: po trzy składowe dla wektorów $\vec{v}_1^{\,/}$ i $\vec{v}_2^{\,/}$. A zatem, ponieważ, jak to zwykle bywa, nie znamy rzeczywistych sił zderzeniowych, nie możemy rozwiązać, w ogólnym przypadku, zagadnienia sprężystego zderzenia dwóch ciał. Istnieje jednak przypadek, dla którego możemy znaleźć rozwiązanie, korzystając tylko z równań (V.22). Jest to przypadek, tak zwanego *zderzenia czołowego*, czyli zderzenia, dla którego pędy zderzających się ciał znajdują się na *linii zderzenia*, czyli na linii łączącej dwa zderzające się ciała. Rozważmy ten przypadek.

Wybierzmy oś Ox wzdłuż linii łączącej środki mas ciał i oznaczmy $\upsilon_{1x} = \upsilon_1$, $\upsilon_{2x} = \upsilon_2$, $\upsilon_{1x}^{/} = \upsilon_1^{/}$, $\upsilon_{2x}^{/} = \upsilon_2^{/}$. Korzystając z tych oznaczeń przepiszmy wzory (V.22a) i (V.22b) w postaci:

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1^{/}) = m_2(\upsilon_2^{/} - \upsilon_2) \ , \tag{V.23}$$

$$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1^{/2}) = m_2(\upsilon_2^{/2} - \upsilon_2^2) \ . \tag{V.24}$$

Ze wzoru (V.24), biorąc pod uwagę, że $(\upsilon_i^2 - \upsilon_i^{/2}) = (\upsilon_i - \upsilon_i^{/})(\upsilon_i + \upsilon_i^{/})$ i po uwzględnieniu wzoru (V.23) znajdujemy

$$\upsilon_1 + \upsilon_1^{/} = \upsilon_2^{/} + \upsilon_2 \ . \tag{V.25}$$

Równania (V.24) i (V.23) tworzą układ dwóch równań algebraicznych względem dwóch nie wiadomych prędkości $\upsilon_1^{/}$ i $\upsilon_2^{/}$:

$$\upsilon_1^{/} - \upsilon_2^{/} = \upsilon_2 - \upsilon_1 \ . \tag{V.26a}$$

$$m_1\upsilon_1^{/} + m_2\upsilon_2^{/} = m_2\upsilon_2 + m_1\upsilon_1 \ . \tag{V.26b}$$

Mnożąc (V.26a) przez m_2 i sumując otrzymane równanie z równaniem (V.26b) znajdujemy

$$(m_1 + m_2)\upsilon_1^{/} = 2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1 \ . \tag{V.27}$$

Skąd

$$\upsilon_1^{/} = \frac{2m_2\upsilon_2 - m_2\upsilon_1 + m_1\upsilon_1 + (m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_1)}{m_1 + m_2} = -\upsilon_1 + 2\frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \ . \tag{V.28}$$

W podobny sposób, mnożąc (V.26a) przez m_1 i odejmując otrzymane równanie od równania (V.26b) znajdujemy

$$(m_1 + m_2)\upsilon_2^{/} = 2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2 \ . \tag{V.29}$$

Skąd

$$\upsilon_2^{/} = \frac{2m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_2 + (m_2\upsilon_2 - m_2\upsilon_2)}{m_1 + m_2} = -\upsilon_2 + 2\frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \ . \tag{V.30}$$

Wielkość

$$\upsilon_C = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \tag{V.31}$$

określa prędkość środka mas dwóch zderzających się ciał w wybranym (laboratoryjnym) układzie odniesienia. W przypadku ruchu izolowanego ta prędkość, zgodnie z zasadą zachowania całkowitego pędu izolowanego układu, jest wielkością stałą. A zatem, z uwzględnieniem (V.31) wzory (V.28) i (V.30) możemy zapisać w postaci

$$\upsilon_1^{/} = -\upsilon_1 + 2\upsilon_C \ . \tag{V.32}$$

$$\upsilon_2^{/} = -\upsilon_2 + 2\upsilon_C \ . \tag{V.33}$$

Jeżeli $m_1 = m_2 \equiv m$, ze wzoru (V.31) mamy

$$\upsilon_C = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(\upsilon_1 + \upsilon_2) \ . \tag{V.34}$$

A zatem ze wzorów (V.32) i (V.33) otrzymujemy:

$$\upsilon_1^{/} = \upsilon_2, \qquad \upsilon_2^{/} = \upsilon_1 \ , \tag{V.35}$$

czyli *dwa ciała o jednakowej masie po zderzeniu sprężystym zamieniają się prędkościami.*

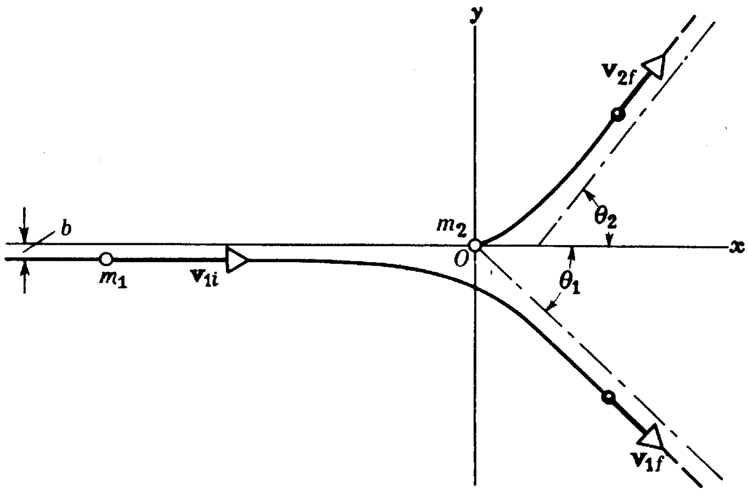
Czasami dogodnie jest rozważać zderzenia cząstek w układzie odniesienia, w którym środek mas spoczywa ($\upsilon_C = 0$). Taki układ odniesienia nazywamy *układem środka masy.* W układzie środka masy, zgodnie ze wzorami (V.32) i (V.33) mamy

$$\upsilon_1^{/} = -\upsilon_1, \qquad \upsilon_2^{/} = -\upsilon_2 \ . \tag{V.36}$$

A zatem w układzie środka mas po zderzeniu sprężystym prędkości cząstek zmieniają swoje kierunki. Wartości bezwzględne prędkości cząstek pozostają takie same.

Zadanie 3. Cząstka o masie m zderza się z cząstką o tej samej masie m, która początkowo spoczywa. Prędkość ruchomej cząstki do zderzenia była równa υ_{1i} Po zderzeniu pierwsza cząstka porusza się pod kątem θ_1 do pierwotnego kierunku ruchu (rys.V.2). Zakładając, że zderzenie cząstek jest doskonale sprężyste, znajdziemy prędkość każdej cząstki po zderzeniu i kąt, jaki tworzy odrzucona cząstka z kierunkiem pierwotnym cząsteczki padającej.

Rozwiązanie. Stosując zasadę zachowania pędu otrzymujemy dwa równania skalarne dla składowych x i składowych y pędów:



Rys.V.2

$$m v_{1i} = m v_{1f} \cos\theta_1 + m v_{2f} \cos\theta_2 \ , \qquad \text{(V.37a)}$$

$$0 = - m v_{1f} \sin\theta_1 + m v_{2f} \sin\theta_2 \ . \qquad \text{(V.37b)}$$

Z zasady zachowania energii możemy zapisać trzecie równanie

$$\frac{1}{2} m v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m v_{2f}^2 \ . \qquad \text{(V.37c)}$$

Mamy trzy równania względem trzech niewiadomych: v_{1f}, v_{2f} i θ_2. Przepiszmy równania (V.37) w postaci

$$v_{1i} - v_{1f} \cos\theta_1 = v_{2f} \cos\theta_2 \ , \qquad \text{(V.38)}$$

$$v_{1f} \sin\theta_1 = v_{2f} \sin\theta_2 \ , \qquad \text{(V.39)}$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \ . \qquad \text{(V.40)}$$

Podnosząc do kwadratu równanie (V.38) i równanie (V.39) otrzymujemy

$$v_{1i}^2 - 2 v_{1i} v_{1f} \cos\theta_1 + v_{1f}^2 \cos^2\theta_1 = v_{2f}^2 \cos^2\theta_2 \ . \qquad \text{(V.41)}$$

$$v_{1f}^2 \sin^2\theta_1 = v_{2f}^2 \sin^2\theta_2 \ , \qquad \text{(V.42)}$$

Sumując stronami równania (V.41) i (V.42) i przypominając, że $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, znajdujemy

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta_1 = v_{2f}^2 \;. \tag{V.43}$$

Biorąc pod uwagę wzór (V.40), znajdujemy

$$2v_{1f}^2 + v_{2f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta_1 = v_{2f}^2 \;. \tag{V.44}$$

Skąd mamy

$$v_{1f} = v_{1i}\cos\theta_1 \;. \tag{V.45}$$

Dalej z równania (V.40) otrzymujemy

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = v_{1i}^2(1-\cos^2\theta_1) \;. \tag{V.46}$$

Skąd wynika, że

$$v_{2f} = v_{1i}\sin\theta_1 \;. \tag{V.47}$$

Ostatecznie z równania (V.39) mamy

$$\sin\theta_2 = \frac{v_{1f}}{v_{2f}}\sin\theta_1 \;. \tag{V.48}$$

Po uwzględnieniu (V.45) i (V.47) znajdujemy

$$\sin\theta_2 = \frac{v_{1f}}{v_{2f}}\sin\theta_1 = \cos\theta_1 \;. \tag{V.49}$$

Literatura do Wykładu 5.

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.219-247.*
2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. 129-134.*

Zadania do Wykładu 5

1. Piłka o masie 200 g porusza się z prędkością 50 m/s, w chwili, gdy uderza w nią kij, który zmienia kierunek jej ruchu na przeciwny i nadaje jej prędkość 50 m/s. Jaką przeciętną siłę wywarł na piłkę kij, jeżeli oddziałuje na nią 5 ms. *Odpowiedź*: 4000 N.
2. Piłka o masie 500 g spadając pionowo na podłogę ma chwili zderzenia prędkość 20 m/s. Piłka odbija się od podłogi z prędkością początkową 10 m/s. a) Obliczyć popęd

działający na piłkę w czasie kontaktu z podłogą. b) Jaką siłą działa piłka na podłogę, jeżeli kontakt trwał 0,02 s? *Odpowiedź*: a) 15 N s; b) 750 N.

3. Dwa statki kosmiczne rozdzieliły się wskutek wybuchu ładunku umieszczonego między nimi. Jeżeli masy statków wynoszą odpowiednio 1000 kg i 2000 kg, a popęd siły wybuchu 1000 N s, to jaka jest względna prędkość oddalania się dwóch statków? *Odpowiedź*: 0,75 m/s.
4. Rozważyć zderzenie niesprężyste dwóch ciał o masach $m_1 >> m_2 = m$ w przypadku, gdy ciała przed zderzeniem miały równe, co do wartości bezwzględnej, prędkości $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \equiv \vec{v}$.
5. Rozważyć zderzenie niesprężyste dwóch ciał o masach $m_1 >> m_2 = m$ w przypadku, gdy prędkość jednego ciała wynosi $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}$ a drugie ciało jest nieruchome $\vec{v}_2 \equiv 0$.
6. Dwie cząstki materialne, jedna o masie cztery razy większej od drugiej, połączone są ściśniętą sprężyną. Energia zmagazynowana w sprężynie wynosi 25 J. Ile energii kinetycznej ma każda cząstka po puszczeniu sprężyny? *Odpowiedź*: 20 J – cząstka lżejsza, 5 J – cząstka cięższa.
7. Z atomem wodoru, znajdującym się w spoczynku, elektron zderza się czołowo w sposób sprężysty. Ruch przed i po zderzeniu odbywa się wzdłuż tej samej prostej. Jaką część energii kinetycznej elektronu otrzyma wskutek zderzenia atom wodoru? Masa atomu wodoru jest 1840 razy większa od masy elektronu. *Odpowiedź*: 0,22%
8. Na sanki o masie 6 kg, poruszające się po lodzie z prędkością 10 m/s, rzucono pionowo z góry paczkę o masie 4 kg. Opisać ruch sanek po ich obciążeniu. *Odpowiedź*: prędkość sanek zmniejszy się do 6 m/s.
9. Pokazać, że gdy zderzenie jest sprężyste oraz jednowymiarowe, prędkość środka masy dwóch cząstek o masie m_1 poruszającej się z prędkością v_{1i} oraz o masie m_2 poruszającej się z prędkością v_{2i} wynosi

$$v_{śr.m} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2i} .$$

10. Ciało o masie m zderza się sprężyście z innym ciałem będącym w spoczynku, i po zderzeniu ciało to porusza się dalej w tym samym kierunku, lecz z prędkością o α mniejszą od prędkości początkowej. Jaka jest masa ciała pozostającego początkowo w spoczynku? *Odpowiedź*: $m \cdot (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$.