Wykład 4

Zasada zachowania energii

Siły zachowawcze i niezachowawcze

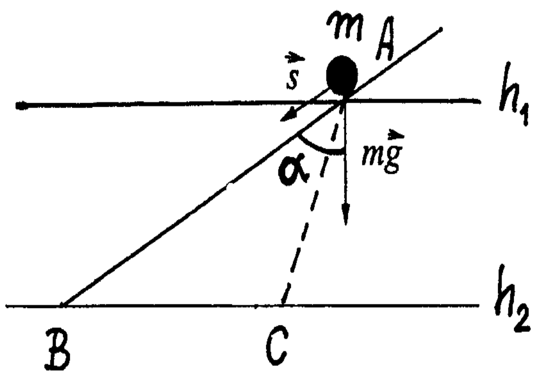
Wszystkie istniejące siły możemy podzielić na siły zachowawcze i siły nie zachowawcze. *Siła jest zachowawcza, jeżeli praca, którą wykonuję ta siła nad punktem materialnym poruszającym się po zamkniętemu toru równa się zeru*. Udowodnimy, że siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą.

Obliczmy najpierw pracę siły grawitacyjnej po przemieszczeniu punktu materialnego o masie m z wysokości h_1 do wysokości h_2 wzdłuż prostej AB (rys. IV.1). Podzielmy odcinek prostej AB na n małych odcinków. W każdym punkcie prostej AB na punkt materialny działa stała skierowana w dół siła

$$\vec{F} = m\vec{g} \ . \tag{IV.1}$$

A zatem praca, którą wykonuje siła grawitacyjna na i - tym odcinku prostej AB wynosi

$$A_i = \vec{F} \cdot d\vec{s}_i = mg \cdot \left| \overrightarrow{ds_i} \right| \cdot \cos\alpha \ , \tag{IV.2}$$



Rys.IV.1. Obliczanie pracy siły grawitacyjnej

gdzie α jest katem między siła $\vec{F}$ i wektorem $d\vec{s}_i = \overrightarrow{AB}/n$.

Całkowita praca siły grawitacyjnej będzie równa sumie prac (IV.2), czyli

$$A_{AB} = \sum_{i=1}^{n} A_i = mg \cdot \left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \cos\alpha \ . \tag{IV.3}$$

Ponieważ

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \cos\alpha = (h_1 - h_2) \ , \tag{IV.4}$$

ze wzoru (IV.3) otrzymujemy

$$A_{AB} = mg(h_1 - h_2) \ . \tag{IV.5}$$

Ze wzoru (IV.4) wynika, że praca siły grawitacyjnej zależy tylko od różnicy wysokości, a zatem praca siły grawitacyjnej wzdłuż prostej AC (rys.IV.1) będzie taką samą, jak praca wzdłuż prostej AB.

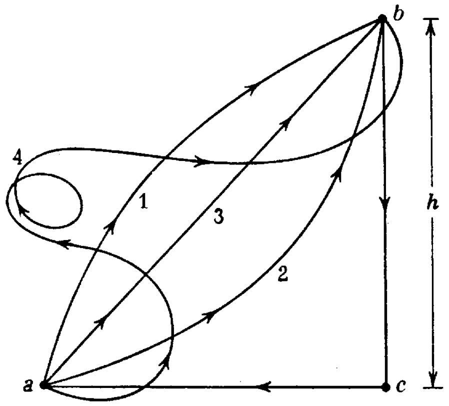
Gdy rozważamy odwrotny ruch punktu materialnego z wysokości h_2 do wysokości h_1 wzdłuż prostej BA praca siły grawitacyjnej wynosi:

$$A_{BA} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{BA} = mg \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \cos(180^0 - \alpha) = -mg \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \cos\alpha \quad . \qquad \text{(IV.6)}$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru $\cos(180^0 - \alpha) = \cos(180^0) \cdot \cos\alpha + \sin(180^0) \cdot \sin\alpha = -\cos\alpha$.

Uwzględniając wzór (IV.4) otrzymujemy

$$A_{BA} = -mg(h_1 - h_2) = -A_{AB} \quad . \qquad \text{(IV.7)}$$



A zatem, jak widać ze wzoru (IV.7) praca wykonana przez siłę grawitacyjną nad ciałem poruszającym się od punktu A, znajdującym się na wysokości h_2, do punktu B, znajdującym się na wysokości h_1, nie zależy w ogóle od drogi łączącej te punkty i jest równa prace wykonanej przy przejściu od B do A, lecz ze znakiem minus.

Jeżeli rozważmy teraz zamkniętą krzywą o dowolnym kształcie zawierającym punkty A i B, to zgodnie z (IV.7) *praca, którą wykonuję siła grawitacyjna nad punktem materialnym poruszającym się po zamkniętemu toru równa się zeru*

$$A = A_{AB} + A_{BA} = A_{AB} - A_{AB} = 0 . \qquad \text{(IV.8)}$$

A zatem udowodniliśmy, że siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą. Powtórzmy, że dla *siły zachowawczej praca, którą wykonuje ta siła nad ciałem poruszającym się pomiędzy dwoma punktami zależy tylko od położenia tych punktów i nie zależy od kształtu drogi łączącej te punkty.*

Przykładem siły zachowawczej jest również siła Coulomba, określająca oddziaływanie dwóch ładunków elektrycznych.

Dla sił niezachowawczych praca nad punktem materialnym poruszającym się wzdłuż zamkniętego toru nie jest równa zeru. Przykładem siły nie zachowawczej jest *siła tarcia*. W przypadku siły niezachowawczej *praca, którą wykonuje ta siła nad ciałem poruszającym się pomiędzy dwoma punktami zależy od kształtu drogi łączącej te punkty.*

Siły potencjalne. Energia potencjalna. Prawo zachowania energii.

Ze wzoru (IV.7) wynika, że dla tego żeby obliczyć pracę, którą wykonuje siła grawitacyjna wystarczy wiedzieć skalarną funkcję

$$U(h) = mgh \quad . \tag{IV.9}$$

Wtedy praca siły grawitacyjnej nad punktem materialnym poruszającym się od punktu A do punktu B wynosi

$$A_{AB} = U(h_1) - U(h_2) \quad . \tag{IV.10}$$

Siły, dla których możemy wprowadzić skalarną funkcję $U(x, y, z)$ nazywamy *siłami potencjalnymi.* Skalarna funkcja $U(x, y, z)$ nosi nazwę *energii potencjalnej*.

Wybierając kartezjański układ współrzędnych tak, aby kierunek osi Oz był przeciwny do kierunku wektora przyspieszenia $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$ i zamieniając w (IV.9) h przez (z) łatwo widzieć, że

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dz}\vec{e}_z = -\frac{d(mgz)}{dz}\vec{e}_z = -mg \cdot \vec{e}_Z \, . \tag{IV.11}$$

W ogólnym przypadku energia potencjalna jest związana z *siłą potencjalną* wzorem

$$\vec{F} = -\left[\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}\vec{e}_z\right] \, , \tag{IV.12}$$

We wzorze (IV.12) wielkości $\partial U(x, y, z)/\partial x$, $\partial U(x, y, z)/\partial y$, $\partial U(x, y, z)/\partial z$ noszą nazwę *cząstkowych pochodnych funkcji (energii) potencjalnej* $U(x, y, z)$ *względem, odpowiednio,* x, y, z. Cząstkową pochodną funkcji $U(x, y, z)$ względem, na przykład, zmiennej x określa wzór

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \quad . \tag{IV.13}$$

Zadanie 1. Na ciało poruszające się wzdłuż osi Ox działa siła $F = -kx$, powodując jego ruch. Znajdziemy funkcję energii potencjalnej $U(x)$ dla tego ruchu.

Rozwiązanie. Zgodnie z (IV.12)

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx} \quad .$$

Skąd otrzymujemy

$$dU = kxdx .$$

Korzystając ze wzoru $xdx = d(x^2)/2$, znajdujemy

$$dU = d(\frac{1}{2}kx^2) .$$

A zatem

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 .$$

Dla sił potencjalnych (patrz wzór (IV.10)) *praca, którą wykonuje siła potencjalna nad ciałem poruszającym się pomiędzy dwoma punktami A i B nie zależy od kształtu drogi łączącej te punkty a zależy jedynie od wartości energii potencjalnej w tych punktach*

$$A_{AB} = U_A - U_B , \qquad \text{(IV.14)}$$

Zgodnie z tym wzorem praca, którą wykonuje siła potencjalna nad punktem materialnym poruszającym się od punktu B do punktu A wynosi

$$A_{BA} = U_B - U_A , \qquad \text{(IV.15)}$$

A zatem siła potencjalna zawsze jest siłą zachowawczą, ponieważ praca tej siły nad punktem materialnym poruszającym się po zamkniętemu toru równa się zeru

$$A = A_{AB} + A_{BA} = U_A - U_B + U_B - U_A = 0 . \qquad \text{(IV.16)}$$

Należy zwrócić uwagę, że przy określaniu energii potencjalnej istnieje pewna dowolność, związana z tym, że sens fizyczny ma tylko różnica energii potencjalnej. Istotnie zamiast energii potencjalnej (IV.9) możemy rozważać potencjalną energię

$$U(h) = mgh + C , \qquad \text{(IV.17)}$$

gdzie C jest dowolna stała. Wybór energii potencjalnej siły grawitacyjnej w postaci (IV.17) nie zmienia ani pracy (IV.10), ani siły (IV.11). A zatem wartość bezwzględna energii potencjalnej jest zawsze określona z dokładnością do dowolnej stałej.

Tą niepewność w energii potencjalnej możemy wyeliminować, jeżeli wybierzemy jakiś punkt odniesienia. W przypadku energii potencjalnej (IV.17) dogodniej jest wybrać jako punkt odniesienia potencjalną energię na powierzchni Ziemi i założyć, że

$$U(h = 0) = C = 0 .$$

Na wykładzie 3 otrzymaliśmy, że praca dowolnej siły (potencjalnej albo niepotencjalnej) nad punktem materialnym poruszającym się pomiędzy dwoma punktami A i B określa wzór

$$A_{AB} = T_B - T_A \ . \tag{IV.18}$$

Tu $T_B = mv_B^2/2$ i $T_A = mv_A^2/2$ są, odpowiednio, energie kinetyczne ciała w punkcie B i punkcie A.

Z porównania (IV.14) i (IV.18) otrzymujemy

$$T_B - T_A = U_A - U_B \ . \tag{IV.19}$$

Skąd mamy

$$E = T_A + U_A = T_B + U_B = const \ . \tag{IV.20}$$

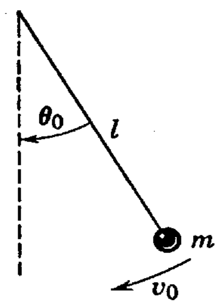
Wzór (IV.20) wyraża jedno z podstawowych praw w fizyce - *prawo zachowania całkowitej energii* punktu materialnego.

Wyżej omówiliśmy pewną dowolność w wyborze punktu odniesienia energii potencjalnej. Wartość energii kinetycznej określa prędkość ciała, która w różnych układach odniesienia będzie miała różną wartość. A zatem warto pamiętać, że zawsze istnieje pewna niejednoznaczność przy określaniu wartości bezwzględnej energii mechanicznej E, która jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej. Ale warto też pamiętać, że *nie jest rzeczą ważna* wartość bezwzględna energii E. Rzeczą ważną jest fakt, że jeżeli siły są siłami zachowawczymi, to wartość bezwzględna energii E nie zmienia się podczas ruchu dla żadnego obserwatora.

Prawo zachowania energii umożliwia w niektórych przypadkach sił potencjalnych nie rozwiązując równań ruchu znaleźć odpowiedzi na niektóre zagadnienia, związane z ruchem punktu materialnego. Rozważmy przykład takiego zagadnienia.

Zadanie 2. Wahadło utworzone z lekkiego sztywnego pręta o długości l i z ciała o masie m przymocowanego do końca tego pręta, ustawiono tak, aby pręt tworzył kąt θ_0 z pionem, po czym je puszczono. Obliczmy prędkość ciała w chwili, gdy znajduje się ono w najniższym położeniu.

Rozwiązanie. W chwili $t = 0$, kiedy pręt tworzył kąt θ_0 z pionem, prędkość ciała była równa zero, a zatem całkowita energia składała się tylko z energii potencjalnej ciała



$$E(\theta = \theta_0) = U(\theta = 0) + mg(l - l \cdot \cos\theta_0).$$

Tu $U(\theta = 0)$ - energia potencjalna ciała w chwili, gdy znajduje się ono w najniższym położeniu.

W chwili, gdy ciało znajduje się w najniższym położeniu całkowita energia ciała wynosi

$$E(\theta = 0) = U(\theta = 0) + \frac{mv^2}{2}.$$

Z zasady zachowania energii wynika, że energia $E(\theta = \theta_0)$ musi być równa energii $E(\theta = 0)$, a więc

$$U(\theta = 0) + mg(l - l \cdot \cos\theta_0) = U(\theta = 0) + \frac{mv^2}{2}.$$

Ze tego wzoru znajdujemy

$$mg(l - l \cdot \cos\theta_0) = \frac{mv^2}{2}. \tag{IV.21}$$

Z lewej strony równania (IV.21) mamy energię mechaniczną wahadła w chwili $t = 0$, która składa się tylko z energii potencjalnej. Natomiast z prawej strony mamy tylko energię kinetyczną wahadła w chwili, kiedy wahadło zajmowało pionowe położenie. A zatem z zasady zachowania energii wynika, że *energia może być przekształcona z jednej formy w inna (energia potencjalna w energię kinetyczną i na odwrót), ale nie może być wytwarzana, ani niszczona.*

Ze wzoru (IV.21) znajdujemy ostateczny wynik

$$v = \sqrt{2gl \cdot (1 - \cos\theta_0)}.$$

Skąd otrzymujemy, że prędkość ciała będzie miała maksymalną możliwą wartość $v = 2\sqrt{gl}$, gdy $\theta_0 = 180^0$.

Wyżej mówiliśmy, że nie wszystkie siły są siłami potencjalnymi, a zatem nie dla wszystkich sił możemy wprowadzić pojęcie energii potencjalnej. Przykładem siły niepotencjalnej jest siła tarcia. W przypadku istnienia sił niepotencjalnych prawo zachowania energii mechanicznej ciała nie jest słuszne i związane jest to z tym, że siły niepotencjalne, wykonując pracę nad ciałem zmniejszają całkowitą energię mechaniczną ciała. Może powstać pytanie: co się stało z tą „straconą” energią mechaniczną? Odpowiedź na to pytanie łatwo znaleźć rozważając na przykład nagle hamujący samochód. W tym przypadku siła tarcia wykonuje pracę (hamuje samochód), wskutek czego samochód całkowicie traci swoją energię kinetyczną. Ta „stracona" energia kinetyczna samochodu objawia się we wzroście temperatury i w częściowym zniszczeniu opon samochodu oraz pokrycia drogi. A zatem „stracona" energia zostaje przekształcona na inne formy energii (energię wewnętrzną (albo cieplną) opon i drogi), a część energii zostaje zużyta na częściowe zniszczenie opon samochodu oraz pokrycia drogi.

Siły centralne

Potencjalne a więc zachowawcze są, tak zwane, siły *centralne*. Siła centralna jest to siła działająca wzdłuż prostej łączącej punkt materialny i pewien nieruchomy punkt, zwany *centrum siły*:

$$\vec{F} = f(x,y,z)\cdot\vec{r} \ , \tag{IV.22}$$

gdzie $f(x,y,z)$ jest skalarną funkcją współrzędnych punktu.

Z siłą postaci (IV.22) często spotykamy się w fizyce. Przykładami takiej siły są siła grawitacji oraz siła Coulomba, które możemy zapisać w postaci:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^3}\cdot\vec{r} \ , \tag{IV.23}$$

Dla siły *grawitacyjnej*:

$$k = Gm_1 m_2 \ . \tag{IV.24}$$

Dla siły *Coulomba*:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1 q_2 \ . \tag{IV.25}$$

Można udowodnić, że siła centralna jest siłą potencjalną i energia potencjalna tej siły określa wzór

$$U(x,y,z) = \frac{k}{r} \equiv \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ . \tag{IV.26}$$

Istotnie, korzystając ze wzoru $\partial[u(x,y,z)]^n/\partial x = n\cdot u^{n-1}(x,y,z)\cdot\partial u/\partial x$ znajdujemy, że

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x \equiv -\frac{x}{r^3} \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2y \equiv -\frac{y}{r^3} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2z \equiv -\frac{z}{r^3} ,$$

a zatem, zgodnie z (IV.12) i (IV.26)

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = k\frac{x}{r^3} , \tag{IV.27a}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = k\frac{y}{r^3} , \tag{IV.27b}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = k\frac{z}{r^3} . \tag{IV.27c}$$

Biorąc pod uwagę wzory (IV.27), siłę $\vec{F}$ możemy zapisać w wektorowej postaci

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z =$$

$$= \frac{k}{r^3}\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) = \frac{k}{r^3}\vec{r} , \tag{IV.28}$$

ponieważ $\vec{r} \equiv x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

A zatem udowodniliśmy, że funkcji potencjalnej (IV.26) odpowiada siła centralna postaci (IV.23). Ważną cechą sił centralnych jest to, że ruch ciał w polu sił centralnych jest zawsze ruchem płaskim, tj. trajektoria ciała leży zawsze w płaszczyźnie. Z tego właśnie powodu Ziemia porusza się wokół Słońca w jednoznacznie zorientowanej w przestrzeni płaszczyźnie i nigdy nie wychodzi za granicy tej płaszczyzny. Udowodnienie tej ważnej cechy siły centralnej wykonujemy na Wykładzie 7.

Pole grawitacyjne

Ze wzoru na siłę grawitacyjną

$$\vec{F} = G\frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} , \tag{IV.29}$$

wynika, że siła przyciągania, która działa ze strony masy M na ciało o masie m jest wprost proporcjonalna do tej masy:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{E} , \tag{IV.30}$$

Tu:

$$\vec{E} = G\frac{M}{r^3}\cdot\vec{r} \ , \tag{IV.31}$$

Wektor $\vec{E}$ określa siłę przyciągania, która działa ze strony masy M na ciało o dowolnej masie. Długość tego wektora zależy tylko od masy M źródła siły grawitacyjnej oraz od położenia $\vec{r}$ punktu w przestrzeni. Więc jeżeli mamy źródło siły grawitacyjnej o masie M, możemy dla każdego punktu o wektorze wodzącym $\vec{r}$ obliczyć, zgodnie ze wzorem (IV.31), wektor $\vec{E}$. Określony w taki sposób zbiór wektorów $\vec{E}$ w każdym punkcie przestrzeni nazywamy *polem grawitacyjnym*. Mówimy, że ciało o masie M jest źródłem wektorowego pola grawitacyjnego. Wektor $\vec{E}(\vec{r})$ nosi nazwę *natężenia pola grawitacyjnego*. Zgodnie ze wzorem (IV.30) dla tego, żeby sprawdzić czy istnieje w przestrzeni pole grawitacyjne musimy wziąć próbne ciało o masie m i zobaczyć co się dzieje się s tym próbnym ciałem.

Siła grawitacyjna, jak wiemy jest siłą potencjalną. Dla siły potencjalnej możemy wprowadzić energię potencjalną. W podobny sposób dla pola wektorowego siły grawitacyjnej możemy dla każdego punktu przestrzeni, zamiast wektora natężenia pola $\vec{E}(\vec{r})$, wprowadzić skalarną funkcję zwaną *potencjałem pola grawitacyjnego* $\varphi(\vec{r})$. Ze wzorów (IV.26) i (IV.24) łatwo widzieć, że

$$\varphi(x,y,z) = \frac{U(x,y,z)}{m} \equiv \frac{G\cdot M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ . \tag{IV.32}$$

<u>Zadanie 3</u>. Siła przyciągania przez Ziemie ciała o masie m dana jest wzorem

$$F = mg \ . \tag{IV.33}$$

Z drugiej strony tę samą siłę określa wzór

$$F = G\frac{m\cdot M_Z}{R_Z^2} \ , \tag{IV.34}$$

gdzie $R_Z \approx 6{,}37\cdot 10^3$ km jest promieniem Ziemi, a M_Z jest masą Ziemi. We wzorze (IV.34) $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 jest stałą powszechnego ciążenia. Korzystając z tych wzorów znajdziemy ile wynosi masa Ziemi.

<u>Rozwiązanie</u>. Łącząc wzory (IV.33) i (IV.34) otrzymujemy

$$M_Z = \frac{gR_Z^2}{G} = \frac{9{,}8 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg.} \qquad \text{(IV.35)}$$

Literatura do Wykładu 4.

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str. 161-192; str.385-424.*
2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. 116-134, str.159-173.*

Zadania do Wykładu 4

1. Na ciało poruszające się wzdłuż osi Ox działa siła $F = -kx$, powodując jego ruch. Udowodnić, że ta siła jest siłą zachowawczą.
2. Między dwoma punktami materialnymi o masach m_1 i m_2, znajdującym na osi Ox działa siła grawitacyjnego przyciągania $F \equiv |\vec{F}| = G\frac{m_1 m_2}{x^2}$, gdzie x - odległość między punktami. Znaleźć funkcję potencjalną $U(x)$, odpowiadającą grawitacyjnemu oddziaływaniu.
3. Rozwiązując na tym Wykładzie zadanie 2 skorzystaliśmy z prawa zachowania energii $U_{\max} = T_{\max}$, gdzie $U_{\max}$ i $T_{\max}$ są odpowiednio maksymalne wartości energii potencjalnej i energii kinetycznej. Znaleźć kąt θ, przy którym $U(\theta) = T(\theta) = U_{\max}/2 = T_{\max}/2$. *Odpowiedź:* $\cos\theta = (1 + \cos\theta_0)/2$.
4. Udowodnić, że
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3z^4) = 2xy^3z^4 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3z^4) = 3x^2y^2z^4 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^3z^4) = 4x^2y^3z^3 \ .$$
5. Jaka siła odpowiada energii potencjalnej $U = -ax^2 + bxy + z$?
6. Udowodnić, że jeżeli na ciało działa siła tarcia, to całkowita energia mechaniczna nie jest stała, a zmniejsza się o wielkość pracy wykonanej przez tę siłę tarcia.
7. Sprężyna w karabinie sprężynowym ma współczynnik sprężystości $k = 900$ N/m. Po ściśnięciu długość sprężyny zmniejszyła się o 2 cm. W lufie znajduje się pocisk o masie 10 g. Zakładając brak tarcia i poziome ustawienie lufy obliczyć prędkość pocisku w chwili opuszczania lufy. *Odpowiedź:* $\upsilon = 6$ m/s.

8. Kula o masie 10 g z zerową początkową prędkością spada z wysokości 100 m i zagłębia się w piasek na głębokość 1 m. Znaleźć średnią siłę tarcia, jaką piasek działa na kulę. *Odpowiedź:* 9,8 N.
9. Oszacować wartość siły grawitacyjnej działającej między dwoma osobami o równych masach $m_1 = m_2 = 50$ kg. Odległość między osobami wynosi 1 cm. *Odpowiedź:* 1,7 $\cdot 10^{-3}$ N.
10. Gęstość wody wynosi 1 g/cm^3. Udowodnić, że średnia gęstość Ziemi około 5,5 razy większa niż gęstość wody. *Wskazówka:* Skorzystać ze wzoru (IV.35).