Wykład 3

Dynamika układu punktów materialnych

Siły zewnętrzne i wewnętrzne. Środek masy

W układzie punktów materialnych siły działające na punkty dogodnie jest podzielić na siły wewnętrzne i siły zewnętrzne. *Siły wewnętrzne są to siły działające między punktami układu. Siły zewnętrzne są to siły, które pochodzą nie od cząstek (punktów) układu.* Są to siły innych ciał, albo pól fizycznych, które działają na punkty układu. A więc siłę, która działa na i-ty punkt układu możemy zapisać w postaci

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{zew} + \vec{F}_i^{wew} , \tag{III.1}$$

gdzie $\vec{F}_i^{zew}$ - wypadkowa zewnętrzna siła, działająca na i-ty punkt, a $\vec{F}_i^{wew}$ - wypadkowa wewnętrzna siła, która jest sumą wektorową sił pochodzących od oddziaływania z pozostałymi punktami układu

$$\vec{F}_i^{wew} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} . \tag{III.2}$$

Tu $\vec{F}_{ji}$ - siła działająca na i-ty punkt ze strony punktu j-tego.

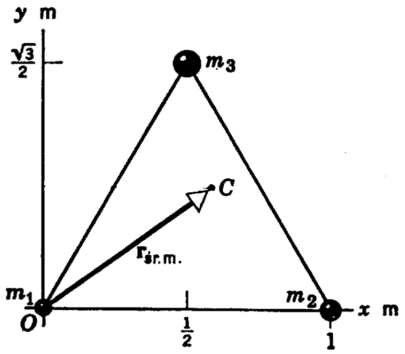
Wiele informacji o zachowaniu się układu punktów materialnych możemy uzyskać na podstawie rozważania ruchu *środka masy.*

Niech $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ będą wektorami wodzącymi punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots, m_N$. *Środkiem masy* układu nazywa się punkt C, którego położenie w przestrzeni określone jest wzorem

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} . \tag{III.3}$$

<u>Zadanie 1</u>. Znaleźć środek masy układu trzech cząstek o masach m_1, m_2, m_3, umieszczonych w rogach równobocznego trójkąta.

<u>Rozwiązanie</u>. Trójkąt jest płaską figurą, a zatem wybierzemy osi współrzędnych Ox i Oy w płaszczyźnie trójkąta tak, jak to jest pokazano na rys.III.1. Niech boki trójkąta są równe a.



Rys.III.1

Wtedy współrzędne rogów trójkąta są równe $m_1(0{,}0)$, $m_2(a{,}0)$, $m_3(a/2, a\sqrt{3}/2)$. Zgodnie z (III.3), punkt, określający środek masy ma współrzędne:

$$x_{śr.m} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot a + m_3 \cdot a/2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{a(2m_2 + m_3)}{2(m_1 + m_2 + m_3)},$$

$$y_{śr.m} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 + m_3 \cdot a\sqrt{3}/2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

.

Z tych wzorów wynika, że jeżeli $m_1 = m_2 = m_3 = m$, to wektor wodzący środka masy ma współrzędne ($a/2, a/2\sqrt{3}$).

Ruch środka masy. Prawo zachowania pędu dla układu punktów materialnych

Równanie ruchu środka masy łatwo otrzymać za pomocą równań ruchu dla poszczególnych punktów

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \ . \tag{III.4}$$

Sumując równania (III.4) otrzymujemy

$$m \ddot{\vec{r}}_C = \vec{F} \ . \tag{III.5}$$

Tu $m = \sum_i m_i$ - masa całego układu, a $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ - suma wszystkich sił działających na punkty materialne układu.

Uwzględniając wzory (III.1) i (III.2) siłę $\vec{F}$ możemy zapisać w postaci

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{zew} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}^{wew} \ . \tag{III.6}$$

Suma wszystkich sił wewnętrznych, zgodnie z trzecim prawem Newtona ($\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$), jest równa zeru, ponieważ

$$\vec{F}^{wew} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \equiv \sum_{i > j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0 \ . \tag{III.7}$$

Istotnie, jeżeli mamy na przykład trzy ciała, to dla sumy wszystkich sił wewnętrznych możemy zapisać

$$\vec{F}^{wew} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) + (\vec{F}_{23} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) + (\vec{F}_{23} - \vec{F}_{12}) + (-\vec{F}_{13} - \vec{F}_{23}) = 0,$$

ponieważ, zgodnie z trzecią zasadą Newtona: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}, \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$.

Z uwzględnieniem (III.7), równanie ruchu dla środka masy przyjmuje postać

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \vec{F}^{zew} . \qquad \text{(III.8)}$$

Chociaż w równaniu (III.8) *mamy tylko siły zewnętrzne, siły wewnętrzne w ogólnym przypadku wpływają również na ruch środka masy.* Wynika to z tego, że w ogólnym przypadku zewnętrzne siły mogą być zależne od położeń oraz prędkości punktów układu i czasu, tj $\vec{F}^{zew} = f(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N;\dot{\vec{r}}_1,\ldots,\dot{\vec{r}}_N;t)$. Jednak położenia i prędkości punktów zmieniają się (patrz wzór (III.4)) zarówno pod wpływem sił zewnętrznych jak i sił wewnętrznych. Powoduje to, że zmieniają się argumenty funkcji $\vec{F}^{zew} = f(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N;\dot{\vec{r}}_1,\ldots,\dot{\vec{r}}_N;t)$, a więc zmienia się siła zewnętrzna.

Szczególne miejsce w mechanice zajmują *układy odosobnione (izolowane albo zamknięte*). Układ nazywamy *zamkniętym*, jeżeli można zaniedbać oddziaływanie sił zewnętrznych z punktami układu. Dla takiego układu $\vec{F}_i^{zew} = 0$, a więc zgodnie z (III.8)

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \dot{\vec{P}}_C = 0 .$$

Skąd

$$\vec{P}_C = const . \qquad \text{(III.9)}$$

Tu $\vec{P}_C = m\dot{\vec{r}}_C = \sum_i \vec{p}_i \equiv \vec{P}$ jest pędem środka masy, a $\vec{P}$ - wypadkowym pędem układu. Ze wzoru (III.9) wynika, że w przypadku układu odosobnionego, środek masy porusza się ruchem jednostajnym i prostoliniowym. Siły wewnętrzne nie mogą zmienić prędkości środka masy układu. A więc pęd środka masy układu izolowanego jest stałym (niezależnym od czasu). Prawo to nazywamy *prawem zachowania pędu układu odosobnionego*.

<u>Zadanie 2.</u> Nieruchoma bomba w postaci kuli, na którą nie działa żadna siła z zewnątrz, wybucha w pewnej chwili. Co możemy powiedzieć o położeniu i ruchu środka masy odłamków bomby po jej wybuchu?

Rozwiązanie: Do wybuchu bomby środek masy bomby pokrywał się ze środkiem kuli, a pęd środka masy był równy $\vec{P}_C(0)=0$. Na bombę w chwili wybuchu $(t=0)$ nie działała żadna siła, a więc $\vec{F}_i^{zew}=0$. Wtedy, zgodnie z (III.9), po wybuchu bomby pęd środka masy odłamków musi pozostać równy $\vec{P}_C(t)=0$. Z równania

$$\vec{P}_C = M\frac{d\vec{R}_C}{dt} = 0,$$

gdzie M wypadkowa masa wszystkich odłamków bomby, wynika, że $R_C(t)=R_C(0)=const$. Tu $R_C(0)$ środek masy odłamków w chwili wybuchu bomby. A więc środek masy odłamków bomby pozostaje w tym miejscu, w którym znajdował się środek kuli.

Zagadnienie dwóch ciał. Masa zredukowana

Przez zagadnienie dwóch ciał rozumie się zwykle zagadnienie o ruchu dwóch wzajemnie oddziałujących punktów materialnych. Rozważmy ruch dwóch ciał o masach m_1 i m_2 i przypuśćmy, że siła oddziaływania dwóch punktów $\vec{F}_{ij}(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$ zależy tylko od odległości między punktami.

Ponieważ układ dwóch ciał jest zamkniętym, zgodnie z (III.9) pęd środka masy układu jest całką ruchu, a więc środek masy porusza się względem układu inercjalnego K ruchem jednostajnym i prostoliniowym i

$$\vec{P}_C = m\vec{\upsilon}_{C0} = m_1\vec{\upsilon}_{10} + m_2\vec{\upsilon}_{20} = const\ . \tag{III.10}$$

Tu $m=m_1+m_2$; $\vec{\upsilon}_{C0}$ - prędkość środka masy; $\vec{\upsilon}_{10}$ i $\vec{\upsilon}_{20}$ - prędkości początkowe odpowiednich punktów.

Ruch jednostajny i prostoliniowy określa, jak wiemy z kinematyki punktu materialnego, wzór

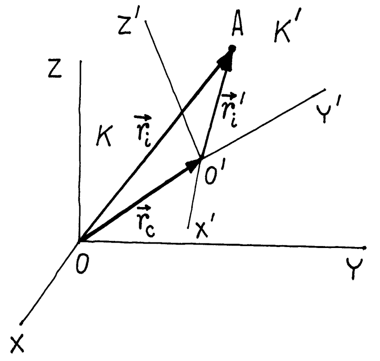
$$\vec{r}_C = \vec{r}_{C0} + \vec{\upsilon}_{C0}t\ , \tag{III.11}$$

gdzie $\vec{r}_{C0}$ - wektor określający położenie środka masy w początkowej chwili.

Rozpatrzmy teraz ruch punktów względem układu $K^{/}$, w którym środek masy znajduje się w spoczynku i w początku układu odniesienia $K^{/}$. Układy odniesienia K i $K^{/}$ są układami inercjalnymi. Z rys. III.2 wynika, że

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i^{\,/} , \qquad \text{(III.12)}$$

gdzie $\vec{r}_i^{\,/}$ - wektor wodzący i-tego punktu w układzie $K^/$, w którym środek masy spoczywa.



Rys.III.2. Ruch dwóch ciał.

Z zasady względności Galileusza wynika, że równania ruchu w układzie $K^/$ muszą mieć taką samą postać jak równania ruchu w układzie K, czyli

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1^{\,/} = \vec{F}_{21}(|\vec{r}_2^{\,/} - \vec{r}_1^{\,/}|) , \qquad \text{(III.13a)}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2^{\,/} = \vec{F}_{12}(|\vec{r}_2^{\,/} - \vec{r}_1^{\,/}|) . \qquad \text{(III.13b)}$$

Ze wzoru (III.12) mamy: $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1\vec{r}_1^{\,/} + m_2\vec{r}_2^{\,/}) + (m_1 + m_2)\vec{r}_C$. Skąd, uwzględniając, że $\vec{r}_C = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$, otrzymujemy

$$m_1\vec{r}_1^{\,/} + m_2\vec{r}_2^{\,/} = 0 . \qquad \text{(III.14)}$$

Ze wzoru (III.14) wynika, że położenia punktów 1 i 2 w układzie $K^/$ nie są niezależne: zmiana na przykład wektora $\vec{r}_1^{\,/}$ jednoznacznie określa o ile zmieni się wektor $\vec{r}_2^{\,/}$. Wprowadzając wektor $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^{\,/} - \vec{r}_1^{\,/}$, wyznaczający względne położenie punktów i biorąc pod uwagę (III.14) znajdujemy, że

$$\vec{r}_1^{\,/} = -\frac{m_2}{m}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2^{\,/} = \frac{m_1}{m}\vec{r} . \qquad \text{(III.15)}$$

Na podstawie związków (III.15) możemy rozdzielić zmienne w równaniach (III.13). Mnożąc równanie (III.13a) przez m_2, a równanie (III.13b) przez m_1 i biorąc pod uwagę, iż zgodnie z trzecim prawem Newtona $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ otrzymujemy

$$m_2 m_1\ddot{\vec{r}}_1^{\,/} = -m_2\vec{F}_{12} ,$$

$$m_1 m_2\ddot{\vec{r}}_2^{\,/} = m_1\vec{F}_{12} .$$

Skąd mamy

$$m_1 m_2(\ddot{\vec{r}}_2^{\,/} - \ddot{\vec{r}}_1^{\,/}) = \vec{F}_{12}(m_1 + m_2) . \qquad \text{(III.16)}$$

Wprowadzając wielkość

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \; , \qquad \text{(III.17)}$$

która nosi nazwę *masy zredukowanej*, równanie (III.16) możemy zapisać w postaci

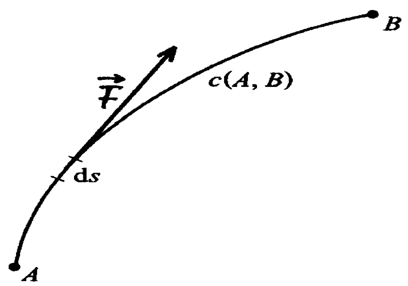
$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}(|\vec{r}|) \; . \qquad \text{(III.18)}$$

A zatem zagadnienie dwóch ciał sprowadzone zostało do równoważnego zagadnienia o ruchu punktu materialnego o masie zredukowanej μ *i wektorze wodzącym* $\vec{r}$ *w polu sił o symetrii kulistej z nieruchomym centrum siły umieszczonym w środku masy układu dwóch punktów.*

Praca sił a energia kinetyczna

Rozważmy ruch punktu materialnego pod wpływem siły $\vec{F}$. Niech wskutek działania tej siły punkt przemieszcza się wzdłuż krzywej $c(AB)$ (rys.III.3).

Podzielmy tą krzywą na bardzo małe przedziały $\Delta \vec{s}_i$, takie, aby siła $\vec{F}$ miała prawie stałą wartość i kierunek w tym przedziale. *Pracą siły* $\vec{F}_i$ podczas przemieszczenia punktu materialnego o $\Delta \vec{s}_i$ nazywa się iloczyn skalarny dwóch wektorów $\vec{F}_i$ i $\Delta \vec{s}_i$:



Rys.III.3. Praca siły $\vec{F}$

$$A_i = (\vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i) = |\vec{F}_i| \cdot |\Delta \vec{s}_i| \cdot \cos\alpha_i \; . \qquad \text{(III.19)}$$

Tu spotykamy się z pojęciem iloczynu skalarnego dwóch wektorów. *Iloczynem skalarnym dwóch wektorów* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *jest nazywany skalar równy iloczynowi wartości bezwzględnych wektorów* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*, oraz cosinusa mniejszego kąta* φ *między tymi wektorami*

$$c = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \; . \qquad \text{(III.20)}$$

Symbolem mnożenia skalarnego dwóch wektorów jest *kropka*.

Jeżeli zapisać wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ przez ich współrzędne ($\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$, $\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z$), to iloczyn skalarny tych dwóch wektorów możemy zapisać w postaci

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z) \cdot (b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) =$$

$$= a_x b_x(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) + a_x b_y(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) + a_x b_z(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z) +$$

$$+ a_y b_x(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x) + a_y b_y(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) + a_y b_z(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z) +$$

$$+ a_z b_x (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x) + a_z b_y (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y) + a_z b_z (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \ . \qquad \text{(III.21)}$$

Ponieważ

$$(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) = (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) = (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(0^0) = 1 \ ,$$

$$(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) = (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x) = (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z) = (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x) = (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z) = (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^0) = 0 \ ,$$

ze wzoru (III.21) otrzymujemy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \ . \qquad \text{(III.22)}$$

Wróćmy teraz do wzoru (III.18) określającego pracę siły $\vec{F}_i$. Gdy $\Delta \vec{s}_i \to 0$ będziemy zamiast skończonej wielkości przemieszczenia $\Delta \vec{s}_i$ pisać $d\vec{s}_i$, co oznacza nieskończenie małą wielkość przemieszczenia $d\vec{s}_i$. W matematyce nieskończenie małą zmianę funkcji nazywają *różniczką. Różniczką ($du(x)$) funkcji $u(x)$ w danym punkcie x nazywamy iloczyn pochodnej (du/dx) przez nieskończenie mały przyrost dx zmiennej x*

$$du = \frac{du}{dx} \cdot dx \ .$$

Przez różniczkę $d\vec{s}_i$ wzór (III.18) przyjmuje postać

$$A_i = (\vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i) \ . \qquad \text{(III.23)}$$

Skorzystamy teraz z drugiej zasady Newtona i zapiszemy wzór (III.23) w postaci

$$A_i = (\vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i) = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \cdot d\vec{s}_i \ . \qquad \text{(III.24)}$$

Biorąc pod uwagę, że $d\vec{s}_i = (d\vec{s}_i / dt) \cdot dt \equiv \vec{\upsilon}_i \cdot dt$, ze wzoru (III.24) znajdujemy

$$A_i = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \cdot d\vec{s}_i = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \cdot dt \cdot \vec{\upsilon}_i = m \cdot \vec{\upsilon}_i \cdot d\vec{\upsilon}_i \ . \qquad \text{(III.25)}$$

Uwzględniając wzór (III.22), zapiszmy wzór (III.25) w postaci

$$A_i = m \cdot \vec{\upsilon}_i \cdot d\vec{\upsilon}_i = m \cdot \left(\upsilon_{ix} d\upsilon_{ix} + \upsilon_{iy} d\upsilon_{iy} + \upsilon_{iz} d\upsilon_{iz}\right) \ . \qquad \text{(III.26)}$$

W matematyce udowodniono, że dla dowolnej funkcji $u(x)$

$$\frac{d}{dx} u^n = n \cdot u^{n-1} . \qquad \text{(III.27)}$$

Skąd dla różniczki $d(u^n)$ znajdujemy

$$d(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot dx \, . \qquad \text{(III.28)}$$

Korzystając ze wzoru (III.28), mamy:

$$\upsilon_{ix} d\upsilon_{ix} = \frac{d(\upsilon_{ix}^2)}{2}, \quad \upsilon_{iy} d\upsilon_{iy} = \frac{d(\upsilon_{iy}^2)}{2}, \quad \upsilon_{iz} d\upsilon_{iz} = \frac{d(\upsilon_{iz}^2)}{2},$$

a zatem

$$A_i = \frac{m}{2} \cdot d\left(\upsilon_{ix}^2 + \upsilon_{iy}^2 + \upsilon_{iz}^2\right) = \frac{m}{2} d(\upsilon_i^2) = d\left(\frac{m\upsilon_i^2}{2}\right). \qquad \text{(III.29)}$$

Wzór (III.29) określa pracę siły $\vec{F}_i$ podczas przemieszczenia punktu materialnego o nieskończenie małe przemieszczenie $d\vec{s}_i$. Okazuje się, że wzór (III.29) jest słuszny również w przypadku skończonych przemieszczeń oraz w przypadku gdy siła działająca na punkt materialny zależy od współrzędnych (x, y, z). A więc praca, którą wykonuje siła $\vec{F}(x, y, z)$ podczas przemieszczenia ciała od punktu A do punktu B (rys.III.3) jest równa

$$A = \Delta\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \frac{m\upsilon_B^2}{2} - \frac{m\upsilon_A^2}{2}. \qquad \text{(III.30)}$$

Tu υ_B - prędkość ciała w punkcie B, natomiast υ_A jest prędkością ciała w punkcie A.

Jeżeli wprowadźmy wielkość

$$T = \frac{1}{2} m\vec{\upsilon}^2 = \frac{1}{2} m\upsilon^2, \qquad \text{(III.31)}$$

wzór (III.30) możemy zapisać w postaci

$$A = T_B - T_A. \qquad \text{(III.32)}$$

Wielkość $T = m\upsilon^2/2$ nazywa się *energią kinetyczną punktu materialnego*. A zatem praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ jest równa różnicy energii kinetycznych w końcowym B i początkowym A punkcie.

Jednostki energii kinetycznej i pracy są takie same. W układzie jednostek SI pracę i energię kinetyczną mierzymy w *dżulach*. 1 J (dżul)= 1 N (niuton) m (metr).

Praca może być dodatnia albo ujemna. Jeżeli praca jest dodatnia, to zgodnie z (III.30) prędkość ciała w końcowym punkcie B będzie większa niż prędkość ciała w początkowym punkcie A. A zatem, w przypadku dodatniej pracy ciało porusza się z przyspieszeniem. W przypadku ujemnej pracy prędkość ciała w końcowym punkcie B będzie mniejsza niż prędkość ciała w początkowym punkcie A, a więc ruch ciała zachodzi z opóźnieniem.

Jeżeli na punkt materialny nie działa żadna siła z zewnątrz, to, zgodnie z pierwszą zasadą Newtona, prędkość ciała pozostaję stałą, a zatem

$$T_B = T_A \; . \tag{III.33}$$

Każda praca jest wykonywana w jakimś czasie. Przedział

$$P = \lim_{\Delta t_i} \frac{\Delta A_i}{\Delta t_i} = \frac{dA}{dt} \tag{III.34}$$

nazywa się *mocą* chwilową źródła siły, która wykonuje tą pracę. W układzie SI jednostką mocy jest *wat*. 1 *W* (wat) = 1 *J* (dżul)/ 1 s (sekunda).

Zadanie: Rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia K i $K^{/}$ i niech układ $K^{/}$ porusza się względem układu K ze stałą prędkością $\vec{v}_0$. Poruszający się w przestrzeni punkt materialny ma w określonej chwili w układzie $K^{/}$ prędkość $\vec{v}^{\,/}$. Znaleźć energię kinetyczną punktu materialnego w układzie K.

Rozwiązanie: Zgodnie z prawem dodawania prędkości w mechanice nie relatywistycznej, prędkość punktu materialnego w układzie K jest równa:

$$\vec{v} = \vec{v}^{\,/} + \vec{v}_0 \; .$$

A zatem energia kinetyczna punktu w układzie K wynosi:

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{m}{2}[(v^{/})^2 + 2(\vec{v}^{\,/}\cdot\vec{v}_0) + v_0^2] = T^{/} + (\vec{p}^{\,/}\cdot\vec{v}_0) + \frac{1}{2}mv_0^2 \, . \tag{III.35}$$

Tu $T^{/} = \frac{m}{2}(v^{/})^2$ - energia kinetyczna punktu materialnego w układzie odniesienia $K^{/}$, $\vec{p}^{\,/} = m\vec{v}^{\,/}$ - pęd punktu w tym układzie.

Literatura do Wykładu 3.

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.141 - 160.*
2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. 71-83 i 116-134.*

Zadania do Wykładu 3

1. Masa Księżyca jest w przybliżeniu równa 0,013 masy Ziemi, a odległość od środka Księżyca do środka Ziemi jest około 60 razy większa od promienia Ziemi. Jak daleko

od środka Ziemi leży środek masy układu Ziemia-Księżyc, jeżeli promień Ziemi wynosi w przybliżeniu 6400 km? *Odpowiedź*: 4900 km.

2. Udowodnić, że jeżeli $m_1 >> m_2$, to masa zredukowana jest rzędu m_2.
3. Przykładem zagadnienia dwóch ciał jest zagadnienie o ruchu dwóch punktów materialnych o masach m_1 i m_2 połączonych ze sobą nieważką sprężyną o długości l. W chwili t_0 sprężyna została rozciągnięta. Wprowadzając masę zredukowaną zapisać równanie ruchu dla tego zagadnienia.
4. Udowodnić, że

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2,$$

gdzie $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

5. Udowodnić, że

$$d\vec{r}^{\,2} = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} = 2r \cdot dr \ .$$

Wskazówka: Skorzystać, ze wzorów (III.22) i (III.28).

6. Cząstka α (jądro atomu helu) jest emitowana z prędkością $\vec{v}_\alpha$ przez jądro uranu-238, pozostające początkowo w spoczynku. Co możemy powiedzieć o ruchu powstałego jądra toru-234 i o ruchu środka masy układu tor + cząstka α ?
7. Ciało o masie m wiszące na linie spuszczamy z wysokości h pionowo w dół ze stałym skierowanym do dołu przyspieszeniem, równym $g/3$. Znaleźć pracę, którą wykonujemy. *Odpowiedź:* $A = -2mgh/3$.
8. Wiązka zawierająca 10^{16} cząstek α zostaje zahamowana w szklance wody. Zakładając, że każda cząstka α miała energię kinetyczną 4 MeV (1eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J), a w szklance wody znajdowało się $m =$ 200 g wody oszacować o ile wzrosła temperatura ΔT wody? Przy rozwiązaniu zadania skorzystać ze wzoru $\Delta Q = mc\Delta T$, gdzie $c = 4{,}186$ J/g$\cdot K$ - ciepło właściwe wody, m - masa wody, ΔQ - ilość energii dostarczonej do wody w postaci ciepła. *Odpowiedź:* $\Delta T \approx 80$ *K.*
9. Co sekundę z progu wodnego o wysokości 100 m spada 1200 m^3 wody. Przyjmując, że ¾ energii kinetycznej uzyskanej przy spadaniu wody zmienia się w generatorze hydroelektrycznym w energię elektryczną, znaleźć moc tego generatora. *Odpowiedź:* $8{,}8 \cdot 10^5$ kW.

10. Energie kinetyczne ciała w różnych układach inercjalnych są różne (patrz wzór (III.35)). Czy praca, którą wykonuje siła $\vec{F}$ nad ciałem też będzie różna w różnych układach inercjalnych?