

Wykład 2

Mechanika Newtona

Dynamika jest nauką, która zajmuje się ruchem ciał z uwzględnieniem sił, które działają na ciało. Podstawą mechaniki klasycznej są trzy *doświadczalne* zasady, które po raz pierwszy zostały sformułowane przez Newtona w 1687 roku.

Pierwsza zasada dynamiki. Inercjalne układy odniesienia. Siły rzeczywiste i pozorne.

Pierwsza zasada dynamiki albo zasada bezwładności brzmi: *Istnieją takie układy odniesienia, w których punkt materialny znajduje się w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego, dopóki siły działające na ten punkt nie zmienią tego stanu.* Siła tutaj, która może zmienić ruch bezwładny punktu materialnego, jest miarą oddziaływania ciała z innymi ciałami materialnymi albo z polami fizycznymi. Siły takie nazywamy *siłami rzeczywistymi*. Dla sił rzeczywistych zawsze możemy wskazać źródło fizyczne (ciało albo pole fizyczne) tej siły.

Z pierwszej zasady Newtona wynika, że jeżeli na punkt materialny nie działa żadna siła, to punkt materialny porusza się ze stałą prędkością wzdłuż prostej a wektor wodzący tego punktu jest funkcją liniową czasu (patrz wzór (I.11))

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t . \quad (\text{II.1})$$

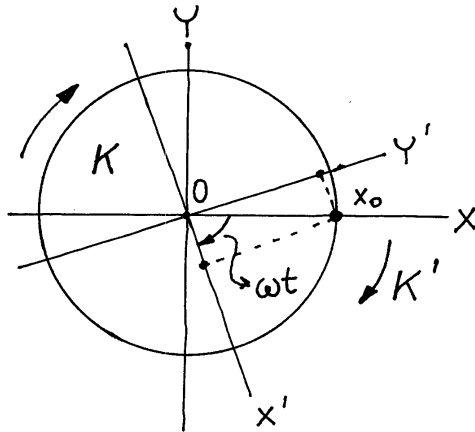
Tu \vec{r}_0 - wektor położenia punktu materialnego w początkowej chwili $t = 0$, a \vec{v} - niezależny od czasu wektor jego prędkości w wybranym układzie odniesienia.

Na pierwszy rzut oka ta zasada czasami jest sprzeczna z doświadczeniami. Rozważmy na przykład bąk, który wykonuje ruch obrotowy z dużą prędkością kątową. Na ten bąk nie działa żadna siła, a nikt nie powie, że bąk znajduje się w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego. Okazuje się, że nie ma tu sprzeczności z pierwszą zasadą dynamiki, ponieważ bąk nie możemy rozważać jako punkt materialny. Jak zobaczymy później ruch bąka lepiej opisuje model ciała sztywnego albo bryły sztywnej. Podkreślimy jeszcze raz, że pierwsza zasada dynamiki dotyczy punktu materialnego, który nie ma wymiarów, a zatem nie może wykonywać ruchów obrotowych.

Łatwo sprawdzić, że wzór (II.1) jest słuszny nie dla wszystkich układów odniesienia. Jako przykład, rozważmy układ odniesienia K i niech w tym układzie na punkt materialny A ($x = x_0, y = z = 0$) nie działa żadna siła i punkt znajduje się w spoczynku, tj. $\vec{v} = 0$.

Rozpatrzmy teraz ten sam punkt materialny A w układzie odniesienia K' , który obraca się względem układu K dookoła osi Oz ze stałą prędkością kątową ω („karuzela”). Względem układu odniesienia K' zależność współrzędnych punktu A od czasu opisuje wzór

$$x' = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad y' = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad z' = z. \quad (\text{II.2})$$



Rys.II.1. Określenie położenia punktu nazywamy *układami inercyjnymi*. materialnego w dwóch układach odniesienia. Odpowiednio, układy odniesienia, w których nie jest spełniona pierwsza zasada Newtona nazywamy *układami nieinercyjnymi*.

W układach nieinercyjnych, jak zobaczymy później, na punkt materialny zaczynają działać siły pozorne albo, tak zwane, *siły bezwładności*. Przykładem takiej siły, jak wiemy z fizyki elementarnej, jest siła Coriolisa. Dla sił pozornych, które powstają w nieinercyjnych układach odniesienia nie istnieje źródło fizyczne (ciało albo pole fizyczne) tych sił. Chociaż skutki działania tych sił na ciała fizyczne są takie same, jak skutki działania sił rzeczywistych (ciała poruszają się, deformują się itp.).

Druga zasada dynamiki. Siła, masa, pęd. Zasada zachowania pędu.

Z pierwszej zasady mechaniki wynika, że jeżeli na punkt materialny działa siła, punkt zmienia swoją prędkość, czyli zaczyna poruszać się z przyspieszeniem. Z *doświadczeń wynika*, że kierunek przyspieszenia albo kierunek zmiany prędkości punktu materialnego pokrywa się z kierunkiem działania siły. A zatem możemy zapisać, że przyspieszenie, którego doznaje punkt wskutek działania siły jest wprost proporcjonalna do działającej na niego siły:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \propto \vec{F}. \quad (\text{II.3})$$

Z doświadczeń również wynika, że na przykład dwie małe jednakowe kule, jedna z drewna, a druga z żelaza, doznają różnych przyspieszeń, gdy działa na nie taka sama siła. A mianowicie kula z drewna doznaje większego przyspieszenia niż kula z żelaza. Dlatego, żeby uwzględnić ten fakt, zapiszmy wzór (II.3) w postaci

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} . \quad (\text{II.4})$$

We wzorze (II.4) wielkość m nosi nazwę *masy bezwładnej punktu materialnego (ciała)*. Masa ciała jest wewnętrzną charakterystyką ciała i zależy od tego, z czego jest zbudowane to ciało. Pod wpływem pewnej siły określona zmiana prędkości ciała mającego większą masę zachodzi w dłuższym czasie niż w przypadku ciała o mniejszej masie (ze wzoru (II.4) wynika, że $\Delta \vec{v} = \vec{F} \cdot (\Delta t/m)$).

Z doświadczeń wynika, że jeżeli mamy do czynienia z ruchami ciał o prędkościach znacznie mniejszych niż prędkość światła c ($c=3 \cdot 10^8$ m/s) masa bezwładna ciała jest stała. Jednak, jeżeli ciało zaczyna poruszać się z prędkością porównywalną z prędkością światła, masa zaczyna rosnąć dążąc do nieskończoności. Ruchami ciał z takimi dużymi prędkościami zajmuje się *szczególna teoria względności Einsteina* i o tym będzie mowa później. Masę bezwładną ciała mierzymy za pomocą wagi równoramiennej, korzystając ze wzorców. W układzie SI jednostką masy jest kilogram (kg) - pewien cylinder platynowo-irydowy.

Oprócz masy bezwładnej ciała istnieje *masa ważka* ciała, którą mierzymy dynamometrem. Masa ważka ciała jest miarą oddziaływania grawitacyjnego ciała i występuje we wzorze opisującym prawo powszechnego ciężenia Newtona. Z doświadczeń oraz ogólnej teorii względności Einsteina wynika, że *masa bezwładna równa się masie ważkiej*.

Ważną rolę w fizyce odgrywa wielkość fizyczna, która nosi nazwę *pędu*. Pędem ciała nazywamy iloczyn jego masy i prędkości:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} . \quad (\text{II.5})$$

Druga zasada dynamiki albo zasada ruchu brzmi: *Zmiana pędu punktu materialnego w układzie inercyjnym jest proporcjonalna względem siły działającej na punkt i ma kierunek prostej, wzdłuż której ta siła działa:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} . \quad (\text{II.6})$$

Wzór (II.6) jest słuszny w mechanice nierelatywistycznej jak i w mechanice relatywistycznej. Jednak, ponieważ w mechanice nierelatywistycznej ($v \ll c$) masa ciała jest stała w czasie ruchu, wzór (II.6) możemy zapisać w postaci

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} . \quad (\text{II.7})$$

W układzie SI jednostką siły jest niuton (1 N). $1N = 1kg \cdot 1m / s^2$, czyli siła w 1 niuton nadaje masie w 1 kg przyspieszenie $1 m/s^2$.

W ogólnym przypadku, na ciało może działać równocześnie kilka sił: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Z doświadczeń wynika, że pod wpływem tych sił ciało porusza się tak, jakby działała nań jedna siła \vec{F} , która jest równa sumie wektorowej wszystkich działających na ciało sił:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}_i . \quad (\text{II.8})$$

W niektórych przypadkach wypadkowa siła jest równa zero, ale to nie oznacza, że na ciało nie działają żadne siły. Na przykład na człowieka stojącego na podłodze działa siła przyciągania ze strony Ziemi (ciężar ciała) a zatem, zgodnie z drugą zasadą dynamiki człowiek musi poruszać się w kierunku centrum Ziemi. Tego jednak nie obserwujemy wskutek tego, że ze strony podłogi na ciało działa siła, która równoważy ciężar ciała tak, że wypadkowa siła jest równa zero.

Równanie (II.8) wyraża bardzo ważną zasadę w fizyce - *zasadę superpozycji sił*. Ta zasada też jest jedną z podstawowych zasad w fizyce i *słuszność tej zasady wynika tylko z doświadczenia*.

W ogólnym przypadku wszystkie siły \vec{F}_i mogą być funkcjami położenia punktu (\vec{r}), jego prędkości (\vec{v}) oraz czasu. Z matematycznego punktu widzenia wektorowe równanie (II.7) stanowi układ trzech, tak zwanych, *zwykłych równań różniczkowych drugiego rzędu*. Rozwiązaniem tych równań będziemy zajmowali się później w mechanice teoretycznej.

Jeżeli znana jest masa m punktu materialnego i jego położenie w każdej chwili (na przykład z obserwacji ruchu punktu), to bardzo łatwo wyznaczyć siły, które ten ruch spowodowały: wektor siły \vec{F} otrzymuje się przez dwukrotne różniczkowanie wektora $\vec{r}(t)$ względem czasu i mnożenie wyniku przez masę m . Znacznie trudniejszym zadaniem jest jednak znalezienie wektorów położenia punktów $\vec{r}(t)$ jako funkcji czasu, jeżeli zadane są siły

jako funkcje położenia punktów, ich prędkości i czasu. W ogólnym przypadku, nie zawsze możemy znaleźć analityczne rozwiązanie układu równań (II.7). Gdy rozwiązanie analityczne równań ruchu (III.7) jest niemożliwe, jedynie efektywne rozwiązanie można uzyskać tylko za pomocą metod numerycznych używając komputera. Właśnie z rozwojem technik komputerowych mechanika i w ogóle fizyka nabrała nowego życia związanego z badaniami chaosu deterministycznego i innych zagadnień.

Z drugiej zasady Newtona (II.6) wynika, że jeżeli suma sił działających na punkt materialny jest równa zeru ($\vec{F} = 0$), to

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad (\text{II.9})$$

skąd

$$\vec{p} = \text{const}. \quad (\text{II.10})$$

Wzór (II.1) wyraża tak zwane *prawo zachowania pędu*: jeżeli suma sił działających na punkt materialny jest równa zeru, to pęd punktu materialnego jest stałym niezależnym od czasu.

Przykłady sił rzeczywistych

W przyrodzie istnieje mnóstwo sił określających oddziaływania ciał. Na razie rozpatrzemy tylko cztery siły, które będziemy często rozważać na tym wykładzie. Podkreślimy, że *prawa rządzące tymi, jak również innymi podstawowymi oddziaływaniami, wynikają tylko z doświadczeń*.

1. *Prawo powszechnego ciężenia Newtona*: Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 przyciągają się do siebie z siłą *grawitacyjną*:

$$F \equiv |\vec{F}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (\text{II.11})$$

Tu G jest *stałą grawitacyjną*, a r jest odległością między punktami. Siła ta jest skierowana zawsze od jednego punktu do drugiego.

2. *Prawo Coulomba*: Dwa punkty materialne o ładunkach elektrycznych q_1 i q_2 oddziałują między sobą z siłą *Coulomba*:

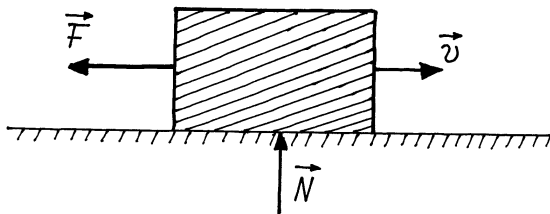
$$F \equiv |\vec{F}| = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (\text{II.12})$$

Tu ε_0 jest *pewną stałą*, a r jest odległością między punktami. Z porównania wzorów (II.11) i (II.12) widzimy, że siły te są podobne do siebie. Jednak w odróżnieniu od siły grawitacyjnej siła Coulomba może być dodatnią (siła przyciągania) jak i siłą ujemną (siła odpychania). Związane to jest z tym, że ładunki mogą być jak dodatnie, tak i ujemne. Masa ciała zawsze jest dodatnia.

3. *Siła sprężysta albo siła Hooke'a*: Na ciało (sprężynę) wydłużone o $\Delta \vec{r}$ działa siła Hooke'a

$$\vec{F} = -k \cdot \Delta \vec{r} . \quad (\text{II.13})$$

Tu stała k nazywa się współczynnikiem sprężystości. Siła sprężysta jest zawsze skierowana w stronę przeciwną niż wektor $\Delta \vec{r}$.



Rys.II.2. Siła tarcia.

4. *Siła tarcia*: Na ciało poruszające się po powierzchni innego ciała działa siła *tarcia*, która przeciwstawia się ruchowi ciała. Siła ta prawie nie zależy od wielkości powierzchni zetknięcia i jest proporcjonalna do siły normalnej działającej ze strony jednej powierzchni na drugą: Siła tarcia może być statyczna i dynamiczna.

Maksymalna siła tarcia *statycznego* jest równa najmniejszej sile, jaką musimy przyłożyć do ciała, aby to ciało ruszyło z miejsca.

$$F_s = |\vec{F}_s| = \mu_s N . \quad (\text{II.14})$$

Tu μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego, a N - wartość bezwzględna siły normalnej.

Siłę tarcia *dynamicznego* albo *kinetycznego* określa wzór podobny do wzoru (II.14):

$$F_k = |\vec{F}_k| = \mu_k N . \quad (\text{II.15})$$

Tu μ_k jest współczynnikiem tarcia kinetycznego. Zwykle $\mu_s > \mu_k$. Siła tarcia zawsze jest prostopadła do siły normalnej \vec{N} .

Trzecia zasada dynamiki

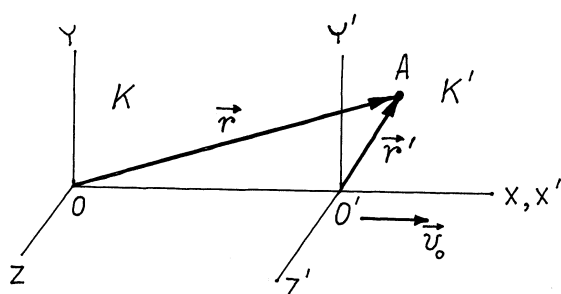
Trzecia zasada dynamiki albo zasada akcji i reakcji brzmi. *Siły, jakimi dwa punkty materialne działają jeden na drugi, są sobie równe co do wartości bezwzględnej; siły te skierowane są wzdłuż prostej łączącej dwa punkty i mają przeciwny zwrot:*

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} . \quad (\text{II.16})$$

Tu \vec{F}_{21} jest siłą, która działa ze strony drugiego punktu na pierwszy punkt. \vec{F}_{12} - siła działająca na drugi punkt, wywołana przez punkt pierwszy. Trzecia zasada Newtona dotyczy siły oddziaływania między dwoma punktami materialnymi, czyli dotyczy tylko sił rzeczywistych. Dla sił bezwładności ta zasada nie jest słuszna.

Zasada względności Galileusza.

Udowodnimy, że układ odniesienia będzie również układem inercyjnym, jeżeli porusza się on względem drugiego inercyjnego układu odniesienia bez przyspieszenia.



Rys.II.3. Przekształcenie Galileusza.

Niech w chwili t poruszający się punkt materialny znajduje się w przestrzeni w punkcie A . Z rys.II.3 wynika, że między wektorami wodzącymi punktu w układach odniesienia K i K' istnieje związek

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{OO'} = \vec{r}' + \vec{v}_0 \cdot t , \quad (\text{II.17})$$

W newtonowskiej (nierelatywistycznej) mechanice przyjmuje się, że czas nosi absolutny charakter i nie zależy od wybranego układu odniesienia, a zatem czas t we wzorze (II.17) możemy zamienić na czas t' (czas w układzie odniesienia K') i zapisać:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 \cdot t' , \quad (\text{II.18})$$

Prędkość punktu materialnego, z określenia, jest pochodną względem czasu od wektora wodzącego, a zatem biorąc pod uwagę wzór (II.18) otrzymujemy:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}' + \vec{v}_0 \cdot t')}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{v}_0 . \quad (\text{II.19})$$

Wzór (II.19) wyraża *prawo dodawania prędkości w mechanice Newtona*.

Przyspieszenie punktu materialnego, z określenia, jest pochodną względem czasu od wektora prędkości, a zatem biorąc pod uwagę wzór (II.19) znajdujemy:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{v}_0)}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt'} + 0 = \vec{a}' . \quad (\text{II.20})$$

Umówiliśmy, że układ odniesienia K jest inercjalnym układem, a zatem jeżeli w tym układzie odniesienia na punkt materialny nie działa żadna siła, przyspieszenie tego punktu $\vec{a} = 0$ a prędkość $\vec{v} = \text{const}$. Z drugiej strony ze wzorów (II.19) i (II.20) znajdujemy, że w układzie odniesienia K' ten sam punkt materialny ma też przyspieszenie $\vec{a}' = 0$ i prędkość $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 = \text{const}$. A więc układ K' również jest układem inercjalnym, ponieważ spełnia pierwszą zasadę Newtona.

Ze wzoru (II.20) oraz drugiej zasady Newtona (wzór(II.7)) wynika jeszcze jeden ważny wniosek: we wszystkich inercjalnych układach odniesienia siły rzeczywiste działające na punkt materialny są takie same:

$$\vec{F} = \frac{\vec{a}}{m} = \frac{\vec{a}'}{m} = \vec{F}' . \quad (\text{II.21})$$

Oznacza to, że postać równania ruchu będzie taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Ta identyczność równań ruchu względem przekształcenia (II.18) jest treścią *zasady względności Galileusza*. Transformacja (II.18) nosi nazwę *transformacji Galileusza*.

Zadanie 1: Wykażemy, że w mechanice Newtona kształty ciał w różnych inercjalnych układach są takie same.

Rozwiązanie: Rozważmy dwa dowolne punkty ciała A_1 i A_2 . Niech wektory wodzące tych dwóch punktów w inercjalnym układzie odniesienia K są \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . Zgodnie ze wzorem (II.18) w układzie inercjalnym K' poruszającym się względem układu K ze stałą prędkością \vec{v}_0 , wektory wodzące tych dwóch punktów wynoszą

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{v}_0 \cdot t , \quad (\text{II.22})$$

$$\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{v}_0 \cdot t , \quad (\text{II.23})$$

A zatem ze wzorów (II.22) i (II.23) otrzymujemy, że wektory, łączące dwa dowolne punkty w ciele są takie same w różnych układach inercjalnych

$$\vec{r}'_{12} = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 . \quad (\text{II.24})$$

Oznacza to, że w różnych inercjalnych układach odniesienia ciało ma ten sam kształt: orientację w przestrzeni i odległości między dowolnymi punktami.

Zadanie 2: Wykażemy, że w mechanice Newtona ładunki elektryczne cząstek (na przykład elektronów) nie zależą od prędkości cząstek.

Rozwiązanie: Rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia K i K' i niech w układzie inercjalnym K' poruszającym się względem układu K ze stałą prędkością \vec{v}_0 , dwa ładunki elektryczne q'_1 i q'_2 będą nieruchome. Zgodnie ze wzorem (II.21) siła Coulomba oddziaływania tych dwóch ładunków w różnych inercjalnych układach odniesienia jest taka sama

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = F' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1 q'_2}{(r'_{12})^2} . \quad (\text{II.25})$$

Biorąc pod uwagę wzór (II.24), otrzymujemy:

$$q_1 q_2 = q'_1 q'_2 ,$$

skąd wnioskujemy, że $q_1 = q'_1$ oraz $q_2 = q'_2$.

Literatura do Wykładu 2.

1. Robert Resnik, David Halliday: *Fizyka 1*, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str. 90 – 140.
2. Sz. Szczęniowski, *Fizyka doświadczalna, t.1*, PWN, Warszawa 1980, str. 54-71.

Zadania do Wykładu 2

1. Ciężarem ciała \vec{P} o masie m nazywamy siłę grawitacyjną, z jaką Ziemia przyciąga ciało

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} , \quad (\text{II.26})$$

Przyspieszenie grawitacyjne \vec{g} we wzorze (II.26) w różnych punktach na powierzchni Ziemi jest różne. Zakładając, że $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, obliczyć ciężar swojego ciała.

2. Za 1 kG ciężaru przyjmuje się wagę ciała o masie 1 kg w punkcie, w którym $g = 9,807 \text{ m/s}^2$. O ile lżejszy będzie człowiek w punkcie, w którym $g = 9,7 \text{ m/s}^2$?
3. Na Marsie $g = 3,8 \text{ m/s}^2$. Jak można wytłumaczyć mniejszą, w porównaniu z Ziemią, wartość g ? Ile wynosiłby ciężar twojego ciała na Marsie?
4. Klocek o masie m spoczywa na gładkiej (bez tarcia) drewnianej płaskiej belce, nachylonej pod kątem α do poziomu. Do klocka przywiązana jest linka, której drugi koniec jest przywiązany do gwoźdźca wbitego wyżej do belki. a) Narysować wszystkie siły działające na klocek. b) Znaleźć składowe wszystkich sił, działających na klocek.
5. Jeżeli linka w zadaniu 4 zostanie przecięta, to jak będzie zachowywał się klocek?
6. Dwie nierówne masy są połączone ze sobą za pomocą linki przerzuconej przez gładki (bez tarcia), nieważki krążek. a) Narysować siły, które działają na masy. b) Znaleźć wzór na naprężenie linki. c) Jak będą poruszały się masy, jeżeli 1) $m_1 = m_2$; 2) $m_1 \gg m_2$?
7. Balon o całkowitej masie m opada w dół ze stałym opóźnieniem a . Ile bagażu należy wyrzucić z kabiny, aby nadać balonowi przyspieszenie a skierowane do góry?
Odpowiedź: $2Ma/(g + a)$.
8. Winda porusza się pionowo z przyspieszeniem a . W windzie na linie o wytrzymałości W kG wisi ciało o wadze $P > W$. Ile musi wynosić przyspieszenie a , żeby linka nie została rozerwana? *Odpowiedź:* $a > \left(1 - \frac{W}{P}\right) \cdot g$.
9. Jedna osoba o masie 60 kg znajduje się na powierzchni Ziemi, a druga osoba o tej samej masie znajduje się w pociągu, poruszającym się ze stałą prędkością. Czy wagi tych dwóch osób będą takie same?