Wykład 15

Podstawy szczególnej teorii względności

Zasada względności i transformacji Galileusza

Z podstaw mechaniki wiemy , że gdy układ odniesienia porusza się ze stałą prędkością po linii prostej to każde przeprowadzone przez nas doświadczenie przebiega tak samo jakbyśmy się nie poruszali. Jednocześnie jakakolwiek zmiana prędkości układu natychmiast jest przez nas zauważana. To prawo przyrody znane jest jako *zasada względności* i było sformułowano jeszcze za czasów Galileusza:

Prawa przyrody (fizyki również) są takie same bez względu na to, czy obserwujemy je z układu inercjalnego nie poruszającego się, czy z ruchomego układu inercjalnego (czyli układu poruszającego się względem pierwszego układu bez przyśpieszenia).

Jeżeli rozważymy dwa inercjalne układy odniesienia K i $K^{/}$ i układ $K^{/}$ porusza się względem układu K ze stałą prędkością V wzdłuż osi Ox ($Oy = Oy^{/}, Oz = Oz^{/}$), to z mechaniki klasycznej wynika, że *wzory przekładające wyniki obserwacji jednego obserwatora na spostrzeżenia drugiego* mają postać

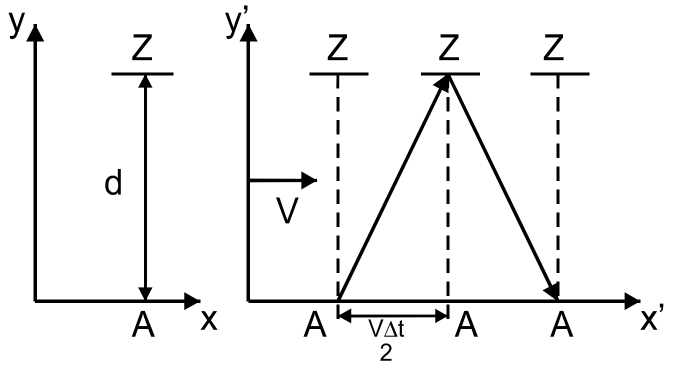
$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad . \qquad \text{(XV.1)}$$

Te równania noszą nazwę *transformacji Galileusza*.

Prawie do końca dziewiętnastego wieku uważano, że stosując powyższe wzory do opisu doświadczeń, otrzymamy takie same wyniki, niezależnie od układu inercjalnego w którym to doświadczenie opisujemy. Okazało się jednak, że nie jest to prawdą. Najpierw stwierdzono, że przekształcenia Galileusza zastosowane do równań Maxwella nie dają tych samych wyników dla różnych układów inercjalnych. W szczególności z praw Maxwella wynika, że *prędkość światła, określająca prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni, jest podstawową stałą przyrody i powinna być taka sama w każdym układzie odniesienia*. Oznacza to na przykład, że gdy impuls światła rozchodzący się w próżni w kierunku osi Ox jest obserwowany przez dwóch obserwatorów, to zarówno obserwator nieruchomy jak poruszający się z prędkością V (względem pierwszego) zmierzą identyczną prędkość impulsu c = $2.998 \cdot 10^8$ m/s. Tymczasem zgodnie z transformacją Galileusza i ze zdrowym rozsądkiem powinniśmy otrzymać wartość $(c - V)$. Wszystkie prowadzone doświadczenia, w których próbowano podważyć równania Maxwella, dały wynik negatywny i musimy uznać, że *prędkość światła w próżni jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.* Rozpatrzmy teraz niektóre wnioski wynikające ze stałości prędkości światła.

Dylatacja czasu

Załóżmy, że w rakiecie znajduje się przyrząd wysyłający impuls światła z punktu A, który następnie odbity przez lustro Z, odległe od A o d powraca do punktu A, gdzie jest rejestrowany (rys.XV.1). Czas $\Delta t^{/}$ jaki upływa między wysłaniem światła, a jego zarejestrowaniem przez obserwatora będącego w rakiecie jest oczywiście równy $\Delta t^{/} = 2d/c$ (patrz rys.XV.1 po lewej stronie). Teraz to samo zjawisko opisujemy z układu nieruchomego, względem którego rakieta porusza się w prawo z prędkością V. Chcemy, w tym układzie, znaleźć czas Δt przelotu światła z punktu A do zwierciadła i z powrotem do A. Jak widać na rysunku (po prawej stronie) światło przechodząc od punktu A do zwierciadła Z porusza się po linii o długości S:



Rys.XV.1

$$S = \sqrt{\left(V\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + d^2} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{V}{c}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{2d}{c}\right)^2} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{V}{c}\Delta t\right)^2 + \left(\Delta t^{/}\right)^2} \quad . \qquad \text{(XV.2)}$$

Zatem czas potrzebny na przebycie drogi AZA (tj. dwóch odcinków S) wynosi: $\Delta t = 2S/c$. Z uwzględnieniem (XV.2) znajdujemy:

$$\Delta t = \sqrt{\left(\frac{V}{c}\Delta t\right)^2 + \left(\Delta t^{/}\right)^2} \quad .$$

Skąd

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \,. \qquad \text{(XV.3)}$$

Ze wzoru (XV.3) wynika, że warunek stałości prędkości światła w różnych układach odniesienia może być spełniony tylko wtedy gdy, czas pomiędzy dwoma zdarzeniami obserwowanymi i mierzonymi z różnych układów odniesienia jest różny. A zatem, *każdy obserwator stwierdzi,* że *poruszający się zegar idzie wolniej niż identyczny zegar w spoczynku*. To zjawisko *dylatacji czasu* jest własnością samego czasu i dlatego spowolnieniu ulegają wszystkie procesy fizyczne gdy są w ruchu. Dotyczy to również reakcji chemicznych, więc i np. biologicznego starzenia się.

Transformacja Lorentza i skrócenie długości

Jeżeli rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia K i K' i układ K' porusza się względem układu K ze stałą prędkością V wzdłuż osi Ox ($Oy = Oy', Oz = Oz'$), to *wzory przekładające wyniki obserwacji jednego obserwatora na spostrzeżenia drugiego*, które uwzględniają stałość prędkości światła, mają postać

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \,. \qquad \text{(XV.4)}$$

Te równania noszą nazwę *transformacji Lorentza.* Łatwo sprawdzić, że jeżeli $(V/c) \to 0$ przekształcenia Lorentza przechodzą w przekształcenia Galileusza (XV.1).

Omówimy teraz niektóre wnioski wynikające z transformacji Lorentza. Jako przykład, rozważmy rakietę, poruszającą się z prędkością V, wzdłuż osi $Ox = Ox'$ i niech w tej rakiecie (układ K') leży pręt o długości L'. Długość pręta L' w układzie, w którym pręt spoczywa będziemy nazywali *własną długością pręta*. Znajdziemy, jaką długość tego pręta zaobserwuje obserwator w układzie nieruchomym K.

Załóżmy, że pomiar długości pręta polega na zarejestrowaniu dwóch zjawisk zachodzących równocześnie na końcach pręta (np. zapalenie się żarówek). Ponieważ żarówki zapalają się na końcach pręta to $\Delta x' = L'$. Ponadto żarówki zapalają się w tym samym czasie (dla obserwatora w układzie spoczywającym) to dodatkowo $\Delta t = 0$. Uwzględniając te warunki otrzymujemy na podstawie transformacji Lorentza

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Delta x \quad ,$$

gdzie Δx jest długością pręta L w układzie nieruchomym więc

$$\Delta x = L = L' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \ . \qquad \text{(XV.5)}$$

Okazuje się więc, że ruchomy pręt ma mniejszą długość czyli jest krótszy.

Czasoprzestrzeń Minkowskiego

Podstawą matematyczną szczególnej teorii względności jest tak zwana czasoprzestrzeń Minkowskiego.

Rozważmy w przestrzeni jakiś punktowe źródło fal świetlnych , które znajduje się w układzie odniesienia K w punkcie $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i w chwili t_0 emituje falę świetlną. W chwili $t_0 + dt$ powierzchnia czoła fali w układzie odniesienia K będzie kulą

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = c^2 (dt)^2 \ . \qquad \text{(XV.6)}$$

Tu $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$ i x, y, z są to współrzędne dowolnego punktu na powierzchni czoła fali w chwili $t_0 + dt$.

Zgodnie z niezależnością prędkości światła od wybranego układu odniesienia, w drugim inercjalnym układzie odniesienia K' czoło tej samej fali również będzie powierzchnią kuli

$$(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = c^2 (dt')^2 \ . \qquad \text{(XV.7)}$$

Z porównania wzorów (XV.6) i (XV.7) widzimy, że wielkość

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = 0 \qquad \text{(XV.8)}$$

nie zależy od wybranego układu odniesienia i jest równa zeru dla fal świetlnych.

Podstawowym założeniem teorii relatywistycznej jest założenie, że wielkość

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = const \qquad \text{(XV.9)}$$

jest wielkością inwariantną nie zależną od wybranego inercjalnego układu odniesienia.

Wielkość $(ds)^2$ nazywa się *przedziałem czasoprzestrzennym dwóch nieskończenie bliskich zdarzeń* i ma prostą interpretację, jeżeli wprowadzić *czterowymiarową przestrzeń*

Minkowskiego. W abstrakcyjnej przestrzeni Minkowskiego oprócz trzech przestrzennych kartezjańskich osi współrzędnych dodajemy jeszcze jedną oś czasową. Zakładamy, iż w przestrzeni Minkowskiego istnieją cztery jednostkowe wektory $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ takie, że

$$g_{\mu\nu} \equiv (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) = \begin{matrix} +1 & dla \;\; \mu = \nu = 0, \\ -1 & dla \;\; \mu = \nu = 1,2,3, \\ 0 & dla \;\; \mu \neq \nu . \end{matrix} \tag{XV.10}$$

Wielkości $g_{\mu\nu}$ noszą nazwę składowych *tensora metrycznego*.

Wektory $\vec{e}_\mu$, $\mu = 0,1,2,3$ oraz wybrany początek układu O tworzą bazę ortonormalną i położenie dowolnego punktu w przestrzeni Minkowskiego można przedstawić za pomocą czterowymiarowego wektora (*czterowektora*) wodzącego

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= ct \cdot \vec{e}_0 + x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \\ &\equiv x_0 \cdot \vec{e}_0 + x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} . \tag{XV.11}$$

Wzdłuż osi czasowej odkładamy (ct) dlatego, żeby wszystkie współrzędne miały wymiar długości. Ze wzorów (XV.10) i (XV.11) otrzymujemy, że jeżeli rozważymy oprócz czterowektora (XV.11) czterowektor

$$\vec{\rho} + d\vec{s} = c(t + dt) \cdot \vec{e}_0 + (x + dx) \cdot \vec{e}_1 + (y + dy) \cdot \vec{e}_2 + (z + dz) \cdot \vec{e}_3 \;, \tag{XV.12}$$

to kwadrat odległości między dwoma punktami albo iloczyn skalarny $(d\vec{s} \cdot d\vec{s})$ wynosi

$$(ds)^2 \equiv d\vec{s} \cdot d\vec{s} = c^2 t^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \;. \tag{XV.13}$$

Z porównania wzorów (XV.9) i (XV.13) widzimy, że przedziałem czasoprzestrzennym jest po prostu kwadrat odległości w przestrzeni Minkowskiego dwóch nieskończenie bliskich zdarzeń.

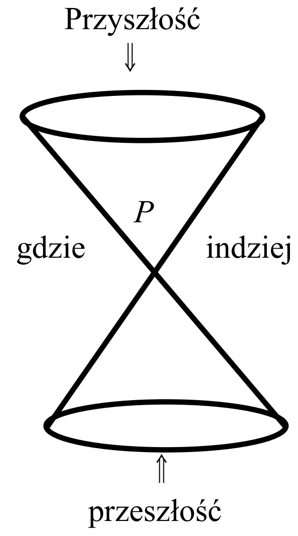
W odróżnieniu od zwykłej przestrzeni Euklidesa, dla której kwadrat długości wektora musi być zawsze dodatni, dla przestrzeni Minkowskiego kwadraty wektorów mogą mieć dowolny znak.

Ze względu na znak kwadratu długości czterowektory w przestrzeni Minkowskiego dzielimy na (rys.XV.2):

wektory czasowe ($(ds)^2 > 0$,

wektory zerowe ($(ds)^2 = 0$),

wektory przestrzenne ($(ds)^2 < 0$).



Rys.XV.2

Wektory zerowe znajdują się na powierzchni stożka, który nazywamy *stożkiem świetlnym pewnego zdarzenia P* (zdarzenie P znajduje się w początku stożka). Jeżeli w P znajduje się źródło światła, to promienie świetlne będą rozchodzić się w czasie wzdłuż powierzchni stożka świetlnego w przód (do góry, jeżeli oś czasowa jest skierowana do góry). Stożek świetlny dzieli wszystkie zdarzenia względem P na trzy obszary (patrz rysunek). Obszary dwóch składowych stożka (górny i dolny) dzielimy na *przyszłość* (górna cześć stożka) i *przeszłość* (dolna część stożka). Wszystkie zdarzenia rzeczywiste, czyli zdarzenia, dla których prędkość światła jest maksymalną prędkością, znajdują się wewnątrz stożka świetlnego. Dla wektorów czasowych: $c^2(dt)^2 > (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Zdarzenia znajdujące się poza stożkiem świetlnym zdarzenia P nazywamy zdarzeniami *przestrzennymi*. Zdarzenia przestrzenne nie są związane przyczynowo ze zdarzeniem P, ponieważ dla nich $c^2(dt)^2 < (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Obszar poza stożkiem nosi nazwę *gdzie indziej*.

Czas własny i efekt dylatacji czasu

Jeżeli jako układ $K^/$ rozważymy układ sztywny związany z poruszającą się cząstką, to zgodnie z (XV.9) mamy

$$c^2(dt)^2 - (dl)^2 = c^2(dt^/)^2 = (ds)^2 = const\ . \qquad \text{(XV.14)}$$

Tu $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Uwzględniając, iż $(dl)^2 = (\vec{v} \cdot dt)^2 = v^2 \cdot (dt)^2$, gdzie $\vec{v}$ jest prędkością cząstki w układzie odniesienia K, ze wzoru (XV.14) otrzymujemy, że

$$d \cdot [t^{/} - t \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}] = 0 \ . \qquad \text{(XV.15)}$$

Skąd

$$t^{/} = t \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = const \ , \qquad \text{(XV.16)}$$

gdzie

$$\beta = \frac{\upsilon}{c} \ . \qquad \text{(XV.17)}$$

Ze wzoru (XV.16) wynika, że czas $t^{/}$ ma wyróżnione znaczenie: ten czas obliczony według wzoru (XV.16) nie zależy od żadnego obserwatora inercjalnego, chociaż każdy z obserwatorów będzie miał swój czas t, a prędkość cząstki υ względem różnych układów będzie różna. Czas $t^{/}$ nazywamy *czasem własnym* i będziemy oznaczali ten czas literą τ . Ze wzoru (XV.16) wynika, że czas własny ruchomej cząstki „płynie" wolniej niż czas t mierzony w układzie odniesienia K. Efekt zmniejszenia tempa upływu czasu w układzie ruchomym nosi nazwę *dylatacji czasu*. Ze wzoru (XV.16) wynika, że dla światła $(\upsilon = c)$ czas „własny" w ogóle „nie płynie".

Relatywistyczne dodawanie prędkości

Znajdziemy teraz wzory łączące prędkości ruchomej cząstki w dwóch inercjalnych układach odniesienia. Niech znów układ $K^{/}$ porusza się względem układu K wzdłuż osi $\vec{e}_1$ z prędkością V. Ze wzorów (XV.4) mamy

$$dx_1 = \frac{dx_{1^{/}} + V dt^{/}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \ , \quad dx_2 = dx_{2^{/}} \ , \quad dx_3 = dx_{3^{/}} \ , \quad dt = \frac{dt^{/} + \frac{V}{c^2} dx_{1^{/}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \ . \qquad \text{(XV.18)}$$

Prędkości cząstki w układach K i $K^{/}$ określają wzory: $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$, $\vec{\upsilon}^{/} = d\vec{r}^{/}/dt^{/}$. A zatem dzieląc pierwsze trzy równości wzory (XV.18) przez czwartą otrzymujemy

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\upsilon_{1^{/}} + V}{1 + \frac{\upsilon_{1^{/}} V}{c^2}} \ , \quad \upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{\upsilon_{2^{/}} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{\upsilon_{1^{/}} V}{c^2}} \ , \quad \upsilon_3 = \frac{dx_3}{dt} = \frac{\upsilon_{3^{/}} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{\upsilon_{1^{/}} V}{c^2}} \ . \qquad \text{(XV.19)}$$

Wzory (XV.19) określają prawo składania prędkości w relatywistycznej mechanice. W przypadku, gdy $c \to \infty$ wzory te przechodzą we wzory mechaniki klasycznej: $\upsilon_1 = \upsilon_{1'} + V$, $\upsilon_2 = \upsilon_{2'}$, $\upsilon_3 = \upsilon_{3'}$.

Dynamika relatywistyczna. Czterowektory prędkości i pędu

Cechą charakterystyczną w mechanice Newtona jest absolutny charakter czasu, co oznacza, że czas nie zależy od wybranego inercjalnego układu odniesienia. W mechanice Newtona prędkość cząstki określa wektor styczny do trajektorii cząstki: $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$. Oznaczając wektor za pomocą strzałki, podkreślamy, że w mechanice klasycznej wektor możemy rozpatrywać jako obiekt geometryczny nie zależny od wyboru osi współrzędnych. Mówiąc o wektorze wyobrażamy sobie zorientowaną w przestrzeni strzałkę o określonej długości. Dowolny obrót układu osi współrzędnych nie zmienia kierunku i długości wektora. Od wybranego układu odniesienia zależą tylko składowe wektora.

W mechanice relatywistycznej trajektorię cząstki będziemy określali 4 - wymiarowym wektorem (*czterowektorem*) wodzącym $\vec{\rho}$. Przez współrzędne wektor wodzący $\vec{\rho}$ w wybranej bazie możemy zapisać w postaci

$$\vec{\rho} = x_0 \cdot \vec{e}_0 + x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 \ . \qquad \text{(XV.20)}$$

Podobnie jak w zwykłej przestrzeni Euklidesa, będziemy rozpatrywali dowolny wektor w przestrzeni Minkowskiego jako obiekt geometryczny. Kierunek i długość wektora wodzącego $\vec{\rho}$ jest inwariantny względem przekształceń Lorentza. Jednak czas w mechanice relatywistycznej w różnych inercjalnych układach odniesienia jest różny. Z tego powodu powstaje pytanie – jak określić wektor prędkości punktu materialnego, żeby ten wektor był niezależny od wybranego inercjalnego układu odniesienia. Wiemy, że niezależnym od układu odniesienia jest własny czas cząstki τ. A więc, jeżeli czterowektor prędkości $\vec{u}$ określimy jako

$$\vec{u} = \frac{d\vec{\rho}}{d\tau} \ , \qquad \text{(XV.21)}$$

to ten wektor będzie relatywistyczne inwariantnym. Współrzędne tego wektora zależą oczywiście od wybranego układu odniesienia. Uwzględniając, że $x_0 = ct$ i $d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ ze wzorów (XV.20) i (XV.21) otrzymujemy

$$u_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \tag{XV.22a}$$

$$u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \tag{XV.22b}$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \tag{XV.22c}$$

$$u_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{\upsilon_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{XV.22d}$$

Tu υ_1, υ_2, υ_3 są to składowe trójwymiarowego wektora prędkości $\vec{\upsilon}$ cząstki w wybranym inercjalnym układzie K.

Łatwo sprawdzić, że iloczyn skalarny

$$(\vec{u} \cdot \vec{u}) = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = c^2 \tag{XV.23}$$

jest relatywistycznym inwariantem.

W mechanice Newtona pęd punktu materialnego jest iloczynem trójwymiarowego wektora prędkości i jego masy m_0: $\vec{p} = m_0\dot{\vec{r}}$. W mechanice relatywistycznej uogólnia się pojęcie pędu i pęd jest iloczynem czterywektora prędkości $\vec{u}$ i jego masy m_0

$$\vec{p} = m_0\vec{u} \ . \tag{XV.24}$$

Korzystając ze wzorów (XV.22) składowe czterowektora pędu możemy zapisać w następujący sposób

$$p_0 = mc \ , \qquad p_i = m\upsilon_i \quad (i = 1,2,3) \, . \tag{XV.25}$$

Tu wielkość

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{XV.26}$$

nazywa się *masą relatywistyczną cząstki*. Masa m_0 nazywa się *masą spoczynkową cząstki*.

Korzystając ze wzoru (XV.10) natychmiast otrzymujemy, że

$$(\vec{p} \cdot \vec{p}) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m_0^2c^2 \tag{XV.27}$$

jest niezmiennikiem relatywistycznym.

Związek między masą i energią

Rozważmy teraz ruch relatywistyczny cząstki $(\upsilon \approx c)$ w pewnym układzie inercjalnym K. Można udowodnić, że dla zmiennych przestrzennych pędu równanie ruchu ma postać równania Newtona

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad . \quad (i = 1,2,3) \tag{XV.28}$$

Jednak, w mechanice relatywistycznej, zgodnie z (XV.25) i (XV.26)

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{XV.29}$$

Praca elementarna siły $\vec{F}$ dla małego przesunięcia punktu materialnego o $d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot dt$ wynosi

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot \vec{F}dt = \vec{\upsilon} \cdot d\vec{p} \quad . \tag{XV.30}$$

Oznaczając $x = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$ i korzystając ze wzoru $dx = -\frac{1}{2}(1-\beta^2)^{-3/2}(-2\beta\, d\beta\,)$ znajdujemy

$$d\vec{p} = d[\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}] = m_0 \cdot d(\vec{\upsilon} \cdot x) = m_0 \cdot \left(x \cdot d\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon} \cdot dx\right) =$$

$$= m_0 \cdot \left[\frac{d\vec{\upsilon}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \vec{\upsilon} \cdot \frac{\beta \cdot d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right] = m_0 \cdot \frac{(1-\beta^2)d\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}\beta\, d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \quad . \tag{XV.31}$$

Mnożąc (XV.31) skalarnie przez $\vec{\upsilon}$ i biorąc pod uwagę, że $\vec{\upsilon}\, d\vec{\upsilon} = \upsilon\, d\upsilon = d(\upsilon^2/2)$ otrzymujemy

$$dA = \vec{\upsilon} \cdot d\vec{p} = m_0 \cdot \frac{(1-\beta^2)(\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}) + (\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon})\beta\, d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} =$$

$$= m_0 \frac{\upsilon \cdot d\upsilon - \beta^2 d(\upsilon^2/2) + \upsilon^2 d(\beta^2/2)}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_0 \frac{\upsilon\, d\upsilon}{(1-\beta^2)^{3/2}} \quad . \tag{XV.32}$$

Oznaczając $y = \beta^2$ i korzystając ze wzoru $d\left(1-y\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1-y)^{-3/2}(-dy) = \frac{dy}{2(1-y)^{3/2}}$

znajdujemy ze wzoru (XV.32)

$$dA = m_0c^2 \frac{1}{2}\frac{d(y)}{(1-y)^{3/2}} = m_0c^2 \cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) . \qquad \text{(XV.33)}$$

Praca wykonana przez działający na punkt materialny siły $\vec{F}$ jest równa przyrostowi energii kinetycznej punktu, a zatem

$$dE \equiv dA = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) . \qquad \text{(XV.34)}$$

Wynika stąd słynny wzór Einsteina określający związek między masą i energią cząstki

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} . \qquad \text{(XV.35)}$$

W przypadku małych prędkości $(\beta = \upsilon/c << 1)$, korzystając z rozwinięcia $(1-\beta^2)^{-1/2} = 1+\beta^2/2+\cdots$ w szereg potęgowy względem υ/c, otrzymujemy

$$E = m_0c^2(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})^{-1/2} = m_0c^2(1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}+\cdots) \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0\upsilon^2 . \qquad \text{(XV.36)}$$

Ze wzoru (XV.36) wnioskujemy, że nawet nieruchoma cząstka $(\upsilon = 0)$ posiada energię $E_0 = m_0c^2$. Energia ta nazywa się *energią spoczynkową* cząstki.

Biorąc pod uwagę, że $p_0 = mc$ i korzystając ze wzorów (XV.27) i (XV.35) znajdziemy związek między energią a trójwymiarowym pędem

$$E^2 = m^2c^4 = p_0^2c^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2 , \qquad \text{(XV.37)}$$

gdzie $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Ze wzoru (XV.37) wynika, że jeżeli masa spoczynkowa cząstki (na przykład fotonu) jest równa zeru $(m_0 = 0)$, to energię i pęd cząstki określa związek

$$E = cp . \qquad \text{(XV.38)}$$

Dla fotonu $p = h/\lambda$, gdzie λ - długość fali świetlnej, h - stała Plancka, a zatem ze wzoru (XV.38) otrzymujemy słynny wzór Plancka - Einsteina określający związek między częstością ν i energią E fotonu

$$E = h\frac{c}{\lambda} \equiv h\nu . \qquad \text{(XV.39)}$$

Literatura do Wykładu 15

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.657-664.*
2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. 88-107.*

Zadania do Wykładu XV

1. W inercjalnym układzie odniesienia K, pręt porusza się w podłużnym kierunku z prędkością υ. Ile musi być równa prędkość υ, żeby długość pręta w układzie K zmniejszyła się o $\eta = 0,5\%$? *Odpowiedź*: $\upsilon = c\sqrt{\eta(2-\eta)} = 0,1\cdot c$, gdzie c - prędkość światła.
2. Znaleźć własną długość pręta, jeżeli pręt porusza się względem nieruchomego układu K z prędkością $\upsilon = c/2$, a jego długość względem układu K wynosi $L = 1$ m. Założyć, że kąt między prętem i kierunkiem jego ruchu jest równy 45^0.

   Odpowiedź: $L_0 = L\sqrt{(1-\beta^2\sin^2\theta)/(1-\beta^2)} = 1,08$ m.
3. Ile wynosiła prędkość zegara w nieruchomym układzie K, jeżeli za czas $t = 5,0$ s (w układzie K), zegar we własnym układzie wskazywał o $t = 5,0$ s mniejszy czas.

   Odpowiedź: $\upsilon = c\sqrt{(2-\Delta t/t)\Delta t/t} = 0,6\cdot 10^8$ m/s.
4. Czas własny życia pewnej nietrwałej cząstki jest równy $\Delta t_0 = 10$ ns. Ile wynosi droga tej cząstki w nieruchomym laboratoryjnym układzie K, w którym czas życia tej cząstki wynosi $\Delta t = 20$ ns. Odpowiedź: $s = c\Delta t\sqrt{1-(\Delta t_0/\Delta t)^2} = 5$ m.
5. Dwie cząstki poruszające się w nieruchomym laboratoryjnym układzie K wzdłuż jednej prostej z prędkością $\upsilon = 3c/4$ zderzają się z tarczą jedna po drugiej z interwałem czasowym $\Delta t = 50$ ns. Ile wynosiła odległość między cząstkami do zderzenia z tarczą? *Odpowiedź*: $L_0 = \upsilon\Delta t/\sqrt{1-\beta^2} = 17$ m.
6. W płaszczyźnie xOy nieruchomego laboratoryjnego układu K porusza się cząstka z prędkością $\vec{\upsilon}(\upsilon_x, \upsilon_y)$. Znaleźć prędkość $\upsilon^{/}$ tej cząstki w układzie odniesienia $K^{/}$,

który porusza się z prędkością V względem układu K w kierunku osi Ox.

Odpowiedź: $\upsilon' = \sqrt{(\upsilon_x - V)^2 + \upsilon_y^2(1 - V^2/c^2)}/(1 - \upsilon_x V/c^2)$.

7. Dwie cząstki w nieruchomym laboratoryjnym układzie K zbliżają się do siebie wzdłuż jednej prostej z prędkościami $\upsilon_1 = 0{,}5c$ i $\upsilon_2 = 0{,}75c$. Znaleźć: a) prędkość z którą zmniejsza się odległość między cząstkami w układzie K; b) względną prędkość cząstek. *Odpowiedź*: a) $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = 1{,}25c$; b) $\upsilon = (\upsilon_1 + \upsilon_2)/(1 + \upsilon_1\upsilon_2/c^2) = 0{,}91c$.
8. Dwie cząstki w nieruchomym laboratoryjnym układzie K zbliżają się do siebie pod kątem prostym z prędkościami υ_1 i υ_2. Znaleźć względną prędkość cząstek. *Odpowiedź*: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - (\upsilon_1\upsilon_2/c)^2}$.
9. Pęd poruszającego się protonu wynosi $p = 10$ GeV/c, gdzie c - prędkość światła. O ile procent różni się prędkość tego protonu od prędkości światła. *Odpowiedź*: $(c - \upsilon)/c = 1 - [1 + (mc/p)^2]^{-1/2} = 0{,}44\%$.
10. Ile musi wynosić prędkość cząstki, żeby jej relatywistyczny pęd był w $\eta = 2$ razy większy od pędu klasycznego („newtonowskiego”).

    Odpowiedź: $\upsilon = (c/\eta)\sqrt{\eta^2 - 1} = c\sqrt{3}/2$.