Wykład 12

Mechanika płynów

Z makroskopowego punktu widzenia powszechnie przyjęty jest podział materii na ciała stałe i płyny. Pod pojęciem substancji, która może płynąć, czyli może znacznie zmieniać swoje rozmiary i kształt, rozumiemy ciecze i gazy. Dla ciał sztywnych, mających określony rozmiar i kształt, sformułowaliśmy mechanikę ciał sztywnych. Do rozwiązywania zagadnień z mechaniki płynów musimy wprowadzić nowy formalizm, ponieważ płyny łatwo zmieniają kształt, a w przypadku gazów przyjmują objętość równą objętości naczynia.

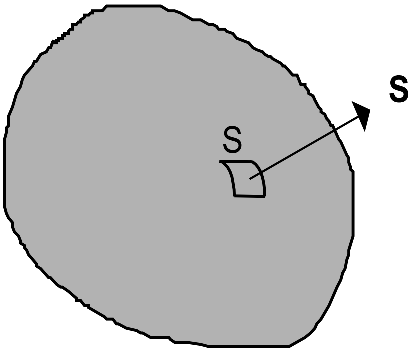
Statyka płynów. Ciśnienie i gęstość

Na powierzchnie dowolnego ciała (ciało stałe albo ciecz) istnieją tak zwane *siły powierzchniowe*. Siły te są związane z tym, że na granice ciało - próżnia (albo powietrze) atomy albo molekuły ciała oddziałują tylko z atomami (molekułami), które znajdują się wewnątrz ciała, wskutek czego powstaje wypadkowa siła na powierzchni ciała skierowana we wnętrz ciała. Różnica w działaniu siły powierzchniowej na płyn i na ciało stałe polega na tym, że dla cieczy, znajdującej się w stanie statycznym albo stanie równowagowym, siła powierzchniowa musi być zawsze prostopadła do powierzchni płynu, podczas gdy w ciele stałym może mieć dowolny kierunek. W płynie, który nie znajduje się w stanie równowagowym, styczniowa składowa siły powierzchniowej powoduje ślizganie się po siebie warstw płynu, wskutek czego płyn zmienia swój kształt, rozmiary i płynie. Stan równowagowy, statyczny powstaje wtedy, gdy styczniowa składowa siły powierzchniowej znika. Siłę działającą na jednostkę powierzchni prostopadłej do siły powierzchniowej nazywamy *ciśnieniem* i oznaczamy literą p. Ponieważ ciśnienie jest w stanie równowagi cieczy zawsze prostopadłe do jej powierzchni, ciśnienie w płynie jest wielkością skalarną.

W układzie SI jednostką ciśnienia jest (*pascal*), 1 Pa = 1 N/m^2. Innymi jednostkami są bar (1 bar = 10^5 Pa), atmosfera (1 atm = 101325 Pa), mm Hg (760 mm Hg = 1 atm).

Płyn znajdujący się pod ciśnieniem wywiera siłę na każdą powierzchnię będącą z nim w kontakcie. Rozważmy zamkniętą powierzchnię zawierającą płyn. Dowolny element powierzchni płynu S (rys.XII.1) może być reprezentowany przez wektor $\vec{S}$. Długość tego wektora wybieramy równą polu powierzchni, kierunek zaś wybieramy prostopadłym do powierzchni i mającym zwrot na zewnątrz. Wtedy siła $\vec{F}$ wywierana przez płyn na ten element powierzchni wynosi

$$\vec{F} = p \cdot \vec{S} \,. \qquad \text{(XII.1)}$$



Rys.XII.1. Wektor $\vec{S}$.

Do opisu płynów stosujemy pojęcie gęstości ρ :

$$\rho = \frac{m}{V} \,. \qquad \text{(XII.2)}$$

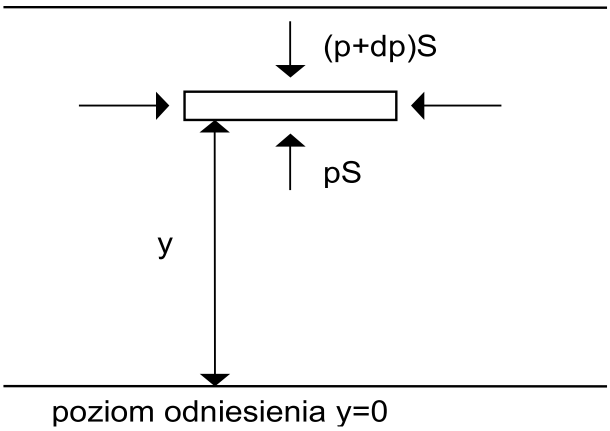
Tu m jest masą płynu, a V jej objętością. Gęstość zależy od wielu czynników takich jak temperatura, ciśnienie. W tabeli przedstawiony jest zakres wartości gęstości spotykanych w przyrodzie.

Materiał	ρ (kg/m^3)
przestrzeń międzygwiezdna	10^{-18} - 10^{-21}
najlepsza próżnia laboratoryjna	10^{-17}
powietrze (1 atm 0 °C)	1.3
powietrze (50 atm 0 °C)	6.5
Ziemia: wartość średnia	$5.52 \cdot 10^3$
Rdzeń	$9.5 \cdot 10^3$
Skorupa	$2.8 \cdot 10^3$
Białe karły	10^8 - 10^{15}
jądro uranu	10^{17}

Ciśnienia wewnątrz nieruchomego płynu, znajdującego w polu grawitacyjnym Ziemi

Gdy płyn znajduje się w równowadze (nie płynie) to jego każda część jest w równowadze. Rozpatrzmy element płynu w kształcie cienkiego dysku znajdującego się w odległości y od poziomu odniesienia (rys.XII.2). Grubość dysku wynosi dy, a powierzchnia każdej strony wynosi S. Masa takiego elementu jest równa $\rho \cdot dV = \rho \cdot Sdy$, a jego ciężar $\rho g \cdot Sdy$. Siły poziome działające na ten element, wywołane jedynie przez ciśnienie płynu, równoważą się. Siły pionowe są wywoływane nie tylko przez ciśnienie płynu, ale też przez jego ciężar. Rozważany element płynu nie jest przyspieszany, zatem wypadkowa siła działająca nań musi być zerem. Dla zachowania równowagi w pionie trzeba, więc aby:

$$pS = (p + dp)S + \rho g S dy \,, \qquad \text{(XII.3)}$$



Rys.XII.2. Ciśnienie wewnątrz płynu

a stąd

$$\frac{dp}{dy} = -\rho \cdot g < 0 \,. \qquad \text{(XII.4)}$$

Równanie (XII.4) pokazuje, że ciśnienie zmienia się ze zmianą wysokości dy. Gdy wysokość rośnie, tzn. $dy > 0$ wtedy, jak widać ze wzoru (XII.4), $dp < 0$, tzn. ciśnienie w płynie ze wzrostem wysokości maleje.

Z doświadczeń wynika, że *ciecze są praktycznie nieściśliwe*, czyli ρ jest stałe i nie zależy od y. A zatem jeśli różnice w wysokości nie są na tyle duże żeby uwzględniać zmiany przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi g, możemy dla jednorodnej cieczy zapisać rozwiązanie równania (XII.4) w postaci:

$$p = -\rho g \cdot y + C \,. \qquad \text{(XII.5)}$$

Tu stała C zależy od tego jak wybraliśmy poziom odniesienia $y = 0$. Jeżeli powierzchnia cieczy jest swobodna, właśnie ona stanowi naturalny poziom odniesienia. Wtedy ciśnienie $p(y = 0) = C$ na powierzchni cieczy jest równe ciśnieniu atmosferycznemu p_0 Teraz y we wzorze (XII.5) opisuje położenie (głębokość) pewnego poziomu w cieczy, a zatem $y < 0$. Oznaczając głębokość poniżej poziomu cieczy przez $h \equiv -y$, wzór (XII.5) możemy zapisać w postaci:

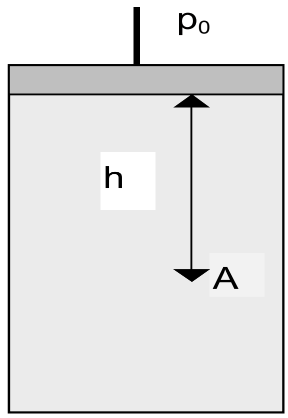
$$p = p_0 + \rho g \cdot h \,. \qquad \text{(XII.6)}$$

Związek (XII.6) nie tylko pokazuje, że ciśnienie rośnie wraz z głębokością ale też, że jest jednakowe dla punktów o tej samej głębokości.

Dla gazów ρ jest małe i różnica ciśnień w dwóch punktach jest zazwyczaj do pominięcia i dlatego można przyjmować, że ciśnienie gazu w naczyniu jest wszędzie jednakowe. Nie jest to jednak prawdziwe, gdy mamy do czynienia ze znaczną różnicą wysokości (gdy wznosimy się na przykład w atmosferze). Ciśnienie zmienia się wtedy znacznie, zmienia się też ρ. Np. na wysokości około 6 km ciśnienie wynosi 0.5 atm. Dla porównania na głębokości morza 6 km ciśnienie wynosi 600 atm.

Prawo Pascala i prawo Archimedesa

Rozważmy ciecz w naczyniu zamkniętym tłokiem, na który możemy działać ciśnieniem zewnętrznym p_0 (rys.XII.3).



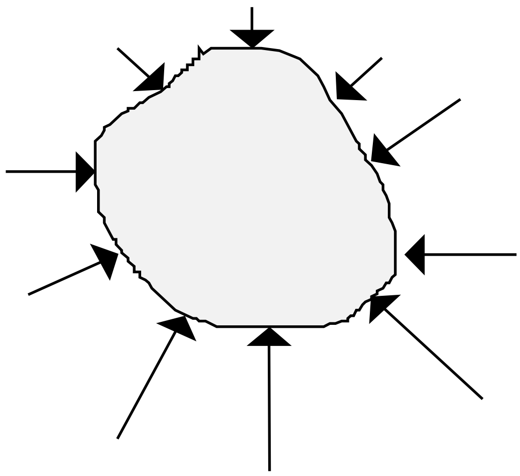
Rys.XII.3. Ściskanie płynu.

W każdym punkcie A znajdującym się na głębokości h od górnej powierzchni cieczy, ciśnienie jest określone wzorem (XII.6). Zwiększymy ciśnienie zewnętrzne o wartość Δp_0. Ponieważ, ciecze są nieściśliwe więc gęstość pozostaje praktycznie bez zmian i dlatego ciśnienie teraz wynosi

$$p = p_0 + \Delta p_0 + \rho g \cdot h \ . \qquad \text{(XII.7)}$$

Wynik (XII.7) został po raz pierwszy sformułowany przez Blaise Pascala i nazywa się *prawem Pascala*. Prawo to formułuje się następująco: *ciśnienie wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane niezmienione na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia*.

Prawo to jest konsekwencją praw mechaniki płynów podobnie jak *prawo Archimedesa*. Kiedy ciało jest zanurzone w całości lub częściowo w spoczywającym płynie (cieczy lub gazie) to płyn ten wywiera ciśnienie na każdą, będącą z nim w kontakcie, część powierzchni ciała (rys.XII.4). Wypadkowa siła jest skierowana ku górze i nazywa się *siłą wyporu*.



Rys.XII.4. Siły działające na zanurzone ciało.

Ponieważ ciśnienie wywierane na ciało nie zależy od materiału, z którego zrobiono ciało, więc zastąpmy w naszym rozumowaniu rozpatrywane ciało przez ten sam płyn, co płyn otoczenia. Na ten płyn będzie działało to samo ciśnienie, co na ciało, które zastąpił. Poza tym płyn będzie nieruchomy. Stąd działająca nań siła będzie równa ciężarowi płynu i skierowana ku górze tak, żeby ten ciężar zrównoważyć.

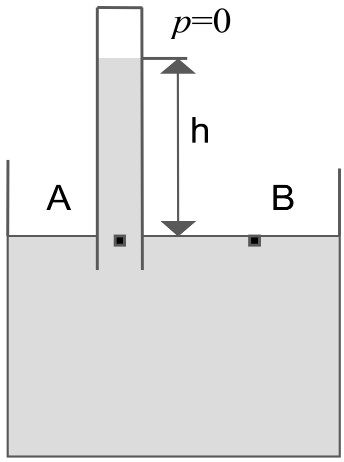
Otrzymujemy prawo Archimedesa: *ciało w całości lub częściowo zanurzone w płynie jest wypierane ku górze siłą równą ciężarowi wypartego przez to ciało płynu*. Tak, więc:

$$F_{wyporu} = m_{wypartego\ plynu} \cdot g = \rho V g \ , \qquad \text{(XII.8)}$$

gdzie ρ jest gęstością płynu, a V objętością części zanurzonej ciała.

Pomiar ciśnienia (barometr)

Evangelista Torricelli wynalazł w 1643 r barometr rtęciowy i tym samym podał sposób pomiaru ciśnienia atmosferycznego. Barometr Torricellego składa się z rurki wypełnionej rtęcią ($\rho = 13.6 \cdot 10^3$ kg/m^3), którą odwracamy nad naczyniem z rtęcią tak jak na rys.XII.5.



Rys.XII.5. Barometr

Ciśnienia w punktach A i B muszą być jednakowe bo punkty te są na jednakowej wysokości. Zgodnie z naszymi uprzednimi rozważaniami możemy zapisać

$$p_A = \rho g \cdot h \;, \qquad \text{(XII.9a)}$$

$$p_B = p_{atm} \;. \qquad \text{(XII.9b)}$$

Ponieważ $p_B = p_A$ ze wzorów (XII.9) mamy

$$h = \frac{p_{atm}}{\rho g} \;. \qquad \text{(XII.10)}$$

Jeżeli ciśnienie atmosferyczne jest $p_{atm} = 1 \;\; atm = 101325 \;\; Pa = 101325 \;\; kg \cdot m/s^2$, ze wzoru (XII.10) znajdujemy:

$$h = \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{101325}{13.6 \cdot 10^3 \cdot 9.8} = 0.76 \;\; mHg \;.$$

Więc mierząc wysokość słupa rtęci mierzymy wielkość ciśnienia atmosferycznego.

Dynamika płynów. Ogólny opis przepływu płynów

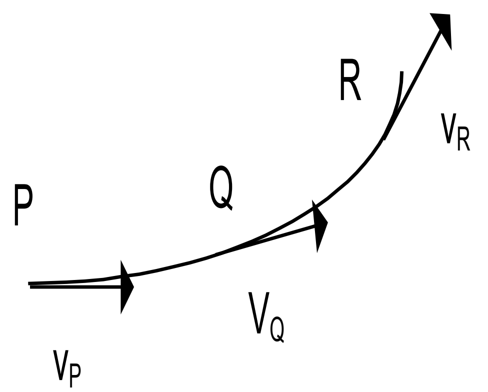
Znane są dwa podejścia do opisu ruchu płynu. Pierwsze wymaga "podzielenia" płynu na nieskończenie małe cząstki (elementy objętości) i śledzenie za ruchem tych elementów. Oznacza to, że dla każdej cząstki mamy współrzędne x, y, z i ich zależność od czasu. W ten sposób skonstruować można opis ruchu płynu (ten sposób wprowadził Joseph Louis Lagrange w końcu XVIII w). Drugie podejście zaproponowane przez Leonharda Eulera jest bardziej wygodne. Zamiast opisywać historię każdej z cząstek rozważamy gęstość płynu i jego prędkość w każdym punkcie przestrzeni i w każdej chwili czasu. Czyli podajemy $\rho\,(x, y, z, t)$ oraz $\vec{v}(x, y, z, t)$. Oznacza to, że koncentrujemy się tylko na zmianach z czasem w wybranym punkcie przestrzeni gęstości i prędkości płynu.

Na wstępie rozpatrzmy pewne ogólne właściwości charakteryzujące przepływ.

- Przepływ może być *ustalony* lub *nieustalony*. Ruch płynu jest ustalony, kiedy prędkość płynu $\vec{v}$ jest w dowolnie wybranym punkcie stała w czasie tzn. każda cząstka przechodząca przez dany punkt zachowuje się tak samo. Warunki takie osiąga się przy niskich prędkościach.
- Przepływ może być *wirowy* lub *bezwirowy*. Przepływ jest bezwirowy, gdy w żadnym punkcie cząstka nie ma wypadkowej prędkości kątowej względem tego punktu. Można sobie wyobrazić małe kółko z łopatkami zanurzone w przepływającym płynie. Jeżeli kółko nie obraca się to przepływ jest bezwirowy, w przeciwnym razie ruch jest wirowy.
- Przepływ może być *ściśliwy* lub *nieściśliwy*. Zazwyczaj przepływ cieczy jest nieściśliwy (stała ρ). Przepływ gazu też może być nieściśliwy tzn. zmiany gęstości są nieznaczne. Np. ruch powietrza względem skrzydeł samolotu podczas lotu z prędkością mniejszą od prędkości głosu jest przepływem nieściśliwym.
- Przepływ może być *lepki* lub *nielepki*. Lepkość w ruchu płynów jest odpowiednikiem tarcia w ruchu ciał stałych (lepkość smarów).

W naszych rozważaniach ograniczymy się do przepływów *ustalonych*, *bezwirowych*, *nieściśliwych* i *nielepkich*. To znacznie upraszcza matematykę.

Nasze rozważania rozpoczniemy od wprowadzenia pojęcia *linii prądu* (rys.XII.6).

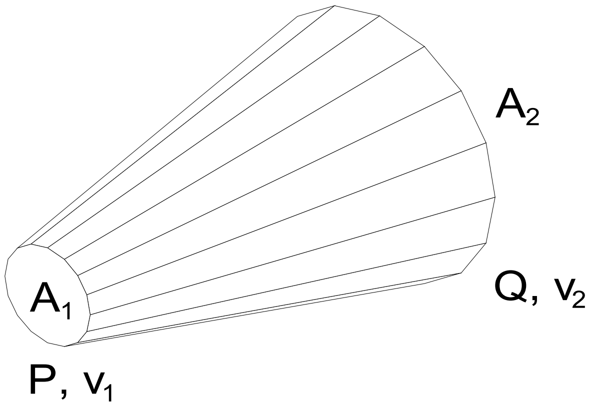


Rys.XII.6. Linia prądu

W przepływie ustalonym $\vec{v}$ jest stała w czasie w danym punkcie. Rozważmy punkt *P* wewnątrz płynu. Każda cząstka ma tam taką samą prędkość. To samo dla punktów *Q* i *R*. Jeżeli prześledzimy tor jednej cząstki to prześledziliśmy zarazem tor każdej cząstki przechodzącej przez *P*. Tor tej cząstki nazywamy linią prądu. Linia prądu jest równoległa do prędkości płynu.

Żadne linie prądu nie mogą się przecinać, bo istniałaby niejednoznaczność w wyborze drogi przez cząstkę (a przepływ jest ustalony). Jeżeli wybierzemy pewną skończoną liczbę linii prądu to taką wiązkę nazywamy *strugą prądu*. Brzegi składają się z linii prądu więc *płyn nie może przepływać przez brzegi strugi*. Płyn wchodzący jednym końcem strugi musi opuścić ją drugim.

Na rysunku XII.7 prędkość cząstek w punkcie P wynosi v_1 a pole przekroju strugi A_1. W punkcie Q odpowiednio v_2 i A_2. W czasie Δt element płynu przebywa odległość $v\Delta t$. Masa płynu przechodzącego przez A_1 w czasie Δt wynosi



Rys.XII.7. Struga pradu

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t,$$

ponieważ $A_1 v_1 \Delta t$ stanowi objętość elementu płynu. Wprowadzamy strumień masy jako $\Delta m/\Delta t$. Wtedy otrzymujemy dla punktów P i Q odpowiednio

$$\Delta m_1 / \Delta t = \rho_1 A_1 v_1 ,$$

oraz

$$\Delta m_2 / \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 .$$

Ponieważ nie ma po drodze (między punktami P i Q) żadnych "źródeł" ani "ścieków", więc strumienie mas muszą być sobie równe

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 .$$

Jeżeli płyn jest nieściśliwy to $\rho_1 = \rho_2$ i wtedy

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 ,$$

czyli

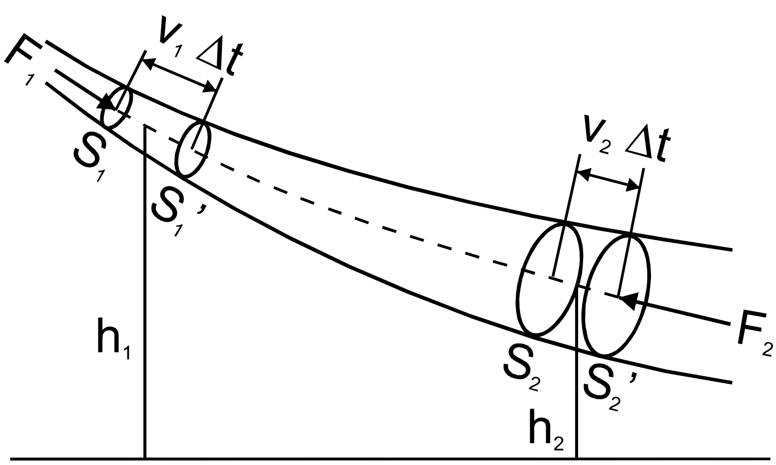
$$Av = const .$$

Z równania powyższego wynika, że prędkość płynu nieściśliwego przy ustalonym przepływie jest odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju. Linie prądu muszą się zagęszczać w węższej części, a rozrzedzać w szerszej. Tzn. rzadko rozmieszczone linie oznaczają obszary niskiej prędkości, linie rozmieszczone gęsto obszary wysokiej prędkości.

Ponadto warto zauważyć, że skoro cząstki zwalniają przepływając z P do Q ($v_1 > v_2$) to poruszają się ruchem jednostajnie opóźnionym. Opóźnienie to może być wywołane grawitacją lub różnicą ciśnień, ale wystarczy wziąć jako przykład strugę poziomą, w której grawitacja się nie zmienia, aby dojść do wniosku, że ciśnienie jest największe tam gdzie prędkość najmniejsza (w przepływie ustalonym).

Równanie Bernoulliego

Rozważmy ustalony, nieściśliwy przepływ płynu przez rurę (rys.XII.8). Ciecz na rysunku płynie w stronę prawą. W czasie Δt powierzchnia S_1 przemieszcza się o odcinek $\upsilon_1 \Delta t$ do położenia $S_1^{/}$. Analogicznie powierzchnia S_2 przemieszcza się o odcinek $\upsilon_2 \Delta t$ do położenia $S_2^{/}$. Na powierzchnię S_1 działa siła $F_1 = p_1 \cdot S_1$ a na powierzchnię S_2 siła $F_2 = p_2 \cdot S_2$. Zwróćmy uwagę, że efekt sumaryczny przepływu płynu przez rurkę polega na przeniesieniu pewnej objętości V płynu ograniczonej powierzchniami $S_1 S_1^{/}$ do położenia $S_2 S_2^{/}$.



Rys.IX.8 Nieściśliwy przepływ płynu przez rurę.

Twierdzenie o pracy i energii mówi, że praca wykonana przez wypadkową siłę jest równa zmianie energii układu. Siłami, które wykonują pracę są F_1 i F_2. Obliczamy, więc pracę tych sił

$$A = F_1 \upsilon_1 \Delta t - F_2 \upsilon_2 \Delta t = p_1 S_1 \upsilon_1 \Delta t - p_2 S_2 \upsilon_2 \Delta t = (p_1 - p_2) V \ ,$$

oraz zmianę energii strugi

$$\Delta E = \left(\frac{m \upsilon_2^2}{2} + mgh_2 \right) - \left(\frac{m \upsilon_1^2}{2} + mgh_1 \right) \ .$$

Ponieważ

$$A = \Delta E \ ,$$

to przy założeniu nieściśliwości płynu ($\rho = const$) otrzymujemy

$$(p_1 - p_2) \cdot V = \left(\frac{m \upsilon_2^2}{2} + mgh_2 \right) - \left(\frac{m \upsilon_1^2}{2} + mgh_1 \right) \ .$$

Biorąc pod uwagę, że $\rho = m/V$, związek ten można przekształcić do postaci

$$p_1 + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho \upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 \ ,$$

czyli

$$p + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho g y = \text{const.} \qquad \text{(XII.11)}$$

Równanie to nosi nazwę *równania Bernoulliego* dla przepływu ustalonego, nielepkiego i nieściśliwego. Jest to podstawowe równanie mechaniki płynów. Może być stosowane do wyznaczenia prędkości płynu na podstawie pomiarów ciśnienia (rurka Venturiego, rurka Pitota). Można też w oparciu o nie wyznaczyć dynamiczną siłę nośną.

Lepkość

W cieczach rzeczywistych ruchomych zawsze istnieje tarcie między sąsiednimi warstwami, które nazywamy *lepkością*. Pomiary prędkości przepływu cieczy w rurce wykazują, że prędkość przepływu jest maksymalna w środku rury, zmniejszając do zera około ścianek rury. Ciecz w takim przypadku składa się z małych cylindrycznych warstw między którymi, wskutek różnicy prędkości warstw, zachodzi tarcie. Przepływ cieczy w postaci takich warstw nazywamy *laminarnym*. Z doświadczeń wynika, że przy laminarnym przepływie moduł siły tarcia działającej na granice dwóch warstw na powierzchnię S warstwy cylindrycznej (czyli powierzchni równoległej do prędkości ruchu cieczy) wynosi

$$F = \eta \cdot \left|\frac{d\upsilon}{dr}\right| \cdot S \ . \qquad \text{(XII.12)}$$

Tu współczynnik η nazywa się lepkością cieczy, a $d\upsilon/dr$ określa zmiany prędkości przepływu cieczy w kierunku prostopadłym po powierzchni S. Siła tarcia (XII.12) miedzy dwoma warstwami ma kierunek zgodny lub przeciwny z kierunkiem ruchu cieczy i powoduję wyrównanie prędkości różnych warstw.

Przepływ laminarny jest przepływem ustalonym i obserwuje się w przypadku małych prędkości cieczy. Jeżeli będziemy zwiększały prędkość przepływu cieczy, to przy określonej wartości prędkości przepływ cieczy staje się niestacjonarny. W tym przypadku prędkości cząstek cieczy w każdym punkcie cieczy zmieniają się przypadkowo. Takie chaotyczne zachowanie się cieczy nosi nazwę *turbulencji*. Charakter przepływu cieczy - laminarny albo turbulentny, zależy od wartości bezwymiarowego parametru

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta} \,. \tag{XII.13}$$

Parametr (XII.13) nazywa się *liczbą Reynoldsa*. We wzorze (XII.13) ρ jest gęstość cieczy, v - średnia prędkość przepływu cieczy, l - promień poprzecznego przekroju rury.

Okazuje się, że jeżeli $\mathrm{Re} < 1000$, przepływ cieczy będzie laminarny. Warto podkreślić uniwersalny charakter tej liczby, co oznacza, że przepływ wszystkich cieczy (różne ρ i η) z różnymi prędkościami i w różnych rurach (różne l) będzie laminarny jeżeli $\mathrm{Re} < 1000$. Jednak jeżeli $\mathrm{Re} > 1000$ ruch cieczy staje się turbulentnym, chaotycznym.

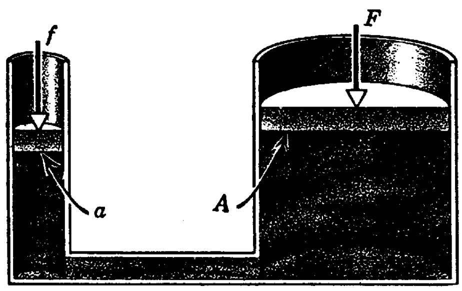
Literatura do Wykładu 12

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.425-464.*

2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. ????.*

Zadania do Wykładu XII

1. Znaleźć wzrost ciśnienia płynu w strzykawce, kiedy pielęgniarka działa na tłok strzykawki o promieniu 1 cm siłą 40 N. *Odpowiedź*: $1{,}3 \cdot 10^5$ Pa.
2. Oszacować hydrostatyczną różnice ciśnienia krwi w człowieku o wzroście 2 m, pomiędzy mózgiem a stopami. Założyć, że gęstość krwi wynosi $1{,}05 \cdot 10^3$ kg/m^3. *Odpowiedź*: $2{,}1 \cdot 10^4$ Pa.
3. Płuca ludzkie mogą wytrzymać różnice ciśnień nie większą niż jedna dwudziesta atmosfery standardowej ($0{,}5 \cdot 10^4$ Pa). Jak głęboko pod wodą może pływać nurek, jeżeli do oddychania używa wystarczającej nad powierzchnię rury? *Odpowiedź*: 0,5 m.
4. Prosta U-rurka zawiera rtęć. O ile wzniesie się poziom rtęci w lewym ramieniu w porównaniu ze stanem początkowym, jeżeli do prawego ramienia doleje się 27,2 cm wody? *Odpowiedź*: 1 cm.
5. Pras hydrauliczny jest zbudowany tak jak to jest pokazano na rysunku niżej



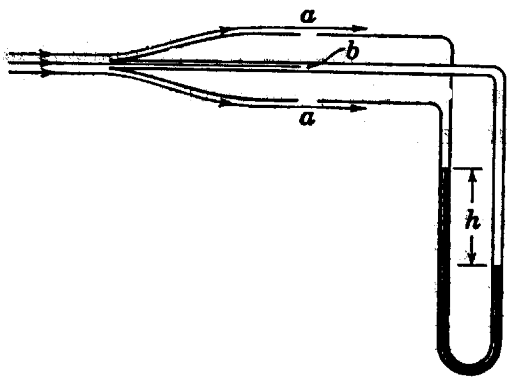
Na ciecz zamkniętą w prasie wywieramy za pomocą tłoka o małym przekroju a niewielką siłę f. Udowodnić, że do utrzymania dużego tłoku o dużym przekroju A jest potrzebna siła fA/a.

6. Klocek drewna pływa w wodzie zanurzony w dwóch piątych swojej objętości. Znaleźć gęstość drewna. *Odpowiedź*: $4 \cdot 10^2$ kg/m^3.

7. Pusta kulista powłoka żelazna pływa w wodzie zanurzona prawie w całości. Znaleźć wewnętrzną średnice powłoki, jeżeli średnica zewnętrzna wynosi 0,8 m, a gęstość względna żelaza 7,8. *Odpowiedź*: 0,78 m.

8. Z kranu o średnicy wewnętrznej d_0 płynie ciągłym strumieniem woda z prędkością początkową υ_0. Znaleźć zależność średnicy strumienia d od odległości h od wylotu. *Odpowiedź*: $d = d_0\left(\upsilon_0 / \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}\right)^{1/2}$.

9. Rurka Pitota, schemat przekroju której jest pokazany niżej, jest przyrządem używanym do mierzenia prędkości przepływu gazu.



Udowodnić, że wartość prędkości gazu określa wzór

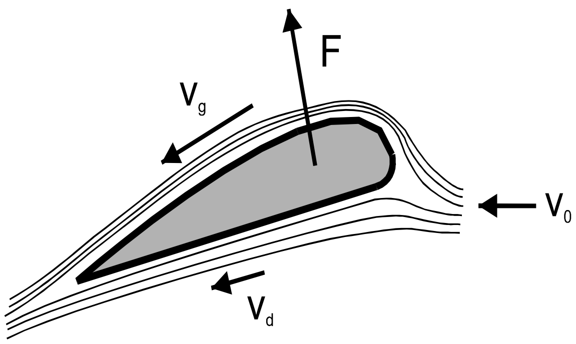
$$\upsilon = \sqrt{\frac{2gh\rho^{/}}{\rho}} ,$$

gdzie h jest różnicą wysokości cieczy w ramionach manometru, ρ - gęstość gazu, $\rho^{/}$ - gęstość gazu w manometrze.

10. *Dynamiczna siła nośna* jest to siła jaka działa na skrzydło samolotu, nartę wodną, śmigło helikoptera itd., i wywołana jest ruchem tych ciał w płynie w odróżnieniu od *statycznej siły nośnej*, którą jest siłą wyporu działającą na przykład na balon czy statek

zgodnie z prawem Archimedesa. Na rysunku poniżej pokazane są schematycznie linie prądu wokół skrzydła samolotu.

Udowodnić w oparciu o prawo Bernoulliego, że ciśnienie nad skrzydłem jest mniejsze od



ciśnienia pod skrzydłem a zatem wypadkowa siła nośna $\vec{F}$ jest skierowana ku górze.