# Wykład 11

## Dynamika ośrodków sprężystych

### Fale mechaniczne

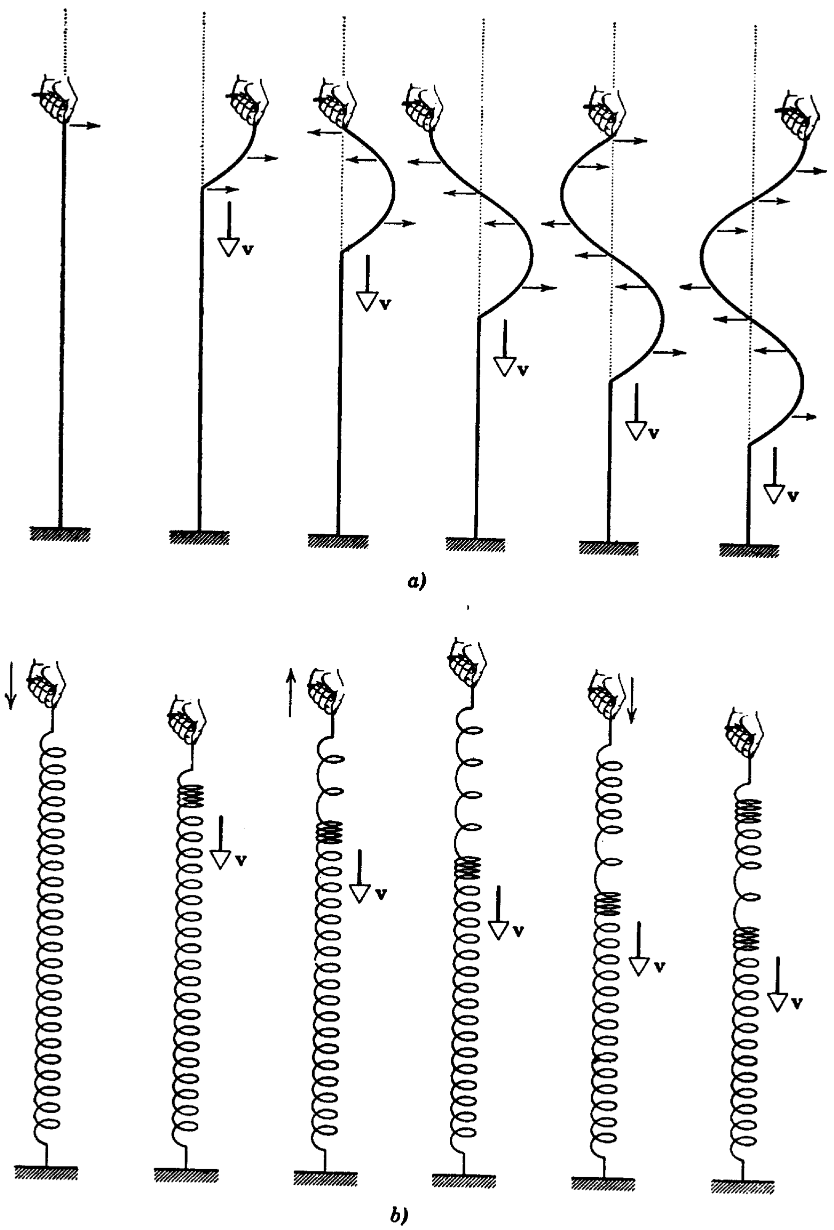
Fale powstające w ośrodkach sprężystych (np. fale dźwiękowe) nazywamy *falami mechanicznymi*. Powstają one w wyniku wychylenia jakiegoś fragmentu ośrodka z położenia równowagi, co w następstwie powoduje drgania fragmentu wokół tego położenia. Drgania te (dzięki właściwościom sprężystym ośrodka) są przekazywane na kolejne części ośrodka. Sam ośrodek nie przesuwa się, a jedynie jego elementy wykonują drgania w ograniczonych obszarach przestrzeni. Na przykładzie fal na powierzchni wody widzimy, że przedmioty pływające wykonują ruch drgający natomiast same fale poruszają się ruchem jednostajnym. Fala dobiegające do danego przedmiotu wprawiają go w ruch drgający przekazując mu energię. Można za pomocą fal przekazywać więc energię na duże odległości. Energia fal to energia kinetyczna i potencjalna cząstek ośrodka.

Cechą charakterystyczną fal jest to, że przenoszą one energię poprzez materię dzięki przesuwaniu się zaburzenia w materii a nie dzięki ruchowi postępowemu samej materii. Do rozchodzenia się fal mechanicznych potrzebny jest ośrodek. To właściwości sprężyste ośrodka decydują o prędkości rozchodzenia się fali. Ze względu na kierunek drgań cząstek względem kierunku rozchodzenia się fali, rozróżniamy

- *Fale poprzeczne*. Przykładem fali poprzecznej są drgania liny, w której zachodzą one w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali (rys.XI.1a). Fala na powierzchni wody też jest falą poprzeczną.
- *Fale podłużne.* Przykładem fali podłużnej jest fala, która powstaje w drgającej sprężynie (rys.XI.1b). Dla fali podłużnej drgania zachodzą w tym samym kierunku w którym rozchodzi się fala. Fale dźwiękowe, które emitujemy głosem też są falami podłużnymi.

Ze względu na czoło fali (czoło jest to powierzchnia łącząca punkty o jednakowych zaburzeniach w danej chwili) wyróżniamy

- fale płaskie (czoło fali jest płaszczyzną i fala rozchodzi się w kierunku, prostopadłym do tej płaszczyzny);
- fale kuliste (czoło fali jest kulą i fala rozchodzi się we wszystkich kierunkach).




Rys.XI.1.Fale poprzeczne (a) i podłużne (b)

**Fale rozchodzące się w przestrzeni**

Rozważmy długą strunę naciągniętą w kierunku $x$, wzdłuż którego biegnie fala poprzeczna. W dowolnej chwili na przykład $t = 0$ kształt struny można opisać funkcją $y(x) = f(x)$, gdzie $y$ – przemieszczenie cząsteczek struny wzdłuż osi $Oy$. Przypuśćmy, że w miarę upływu czasu fala biegnie wzdłuż struny bez zmiany kształtu w prawo, czyli w stronę wzrostu $x$. Wybierzemy w chwili $t = 0$ jakiś punkt $A$ fali, dla którego wychylenie struny w kierunku osi $Oy$ jest równe $y(x_A) = f(x_A)$. Wtedy, po czasie $t$ fala przesuwa się o $\upsilon t$ w prawo (gdzie $\upsilon$ - prędkość fali) i po czasie $t$ w punkcie $x = x_A + \upsilon t$ fali wychylenie struny w kierunku osi $Oy$ będzie równe $y(x) = y(x_A) \equiv f(x_A)$. Ponieważ $x_A = x - \upsilon t$ możemy zapisać

$$y(x,t) = f(x - \upsilon t) \ . \tag{XI.1}$$

Równanie (XI.1) jest więc równaniem fali rozchodzącej się w prawą stronę struny. Kształt fali określa funkcja $f(x - \upsilon t)$.

Fala rozchodząca się w lewą stronę struny, czyli w stronę mniejszych $x$ - ów, określa wzór

$$y(x,t) = f(x + \upsilon t) \ . \tag{XI.2}$$

Istotnie, ze wzoru (XI.2) wynika, że w chwili $t$ w punkcie $x = -\upsilon t$, kształt fali (wychylenie struny) jest taki sam jak w chwili $t = 0$ w punkcie $x = 0$.

Argument funkcji $f(x \pm \upsilon t)$, czyli

$$\varphi(x,t) = x \pm \upsilon \cdot t \ , \tag{XI.3}$$

nosi nazwę *fazy drgań*.

Przypuśćmy, że śledzimy wybraną część fali, dla której faza drgań $\varphi(x,t) = x - \upsilon \cdot t$ jest stała

$$x - \upsilon t = const \ . \tag{XI.4}$$

Różniczkując (XI.4) względem czasu otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon \ . \tag{XI.5}$$

A zatem, prędkość $\upsilon$ rzeczywiście określa prędkość, z którą punkt mający określone wychylenie (określoną fazę) porusza się wzdłuż struny. Jest to tak zwana *prędkość fazowa*. Zauważmy, że dla danego $t = t_0$ w funkcji fali $f(x \pm \upsilon t)$ czas jest stały i funkcja $f(x \pm x_0)$, gdzie $x_0 = \upsilon \cdot t_0$, zależy tylko od $x$ i określa kształt fali w chwili $t = t_0$. Jeżeli rozważymy jakiś określony punkt struny $x = x_A$, to w funkcji fali $f(x \pm \upsilon t)$ zmienna $x$ jest stała i funkcja $f(x_A \pm \upsilon \cdot t)$ zależy tylko od $t$ i określa drgania struny w punkcie $x = x_A$.

Rozważmy teraz falę o szczególnym kształcie. Załóżmy, że w chwili $t = 0$ kształt struny jest opisany funkcją

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \ , \tag{XI.6}$$

gdzie $A$ jest maksymalnym wychyleniem. Zauważmy, że wychylenie jest takie samo w punktach $x$, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, $x + 3\lambda$ itd., ponieważ $\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x) = \sin(\frac{2\pi}{\lambda}x + 2\pi) = \sin(\frac{2\pi}{\lambda} + 4\pi) =$ $\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x + 6\pi)$ itd. Wielkość $\lambda$ nazywamy *długością fali* (odległość między punktami o tej samej fazie). Jeżeli fala biegnie w prawo to

$$y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - \upsilon t) \ . \tag{XI.7}$$

Okres $T$ jest czasem, w którym fala przebiega odległość równą $\lambda$ więc:

$$\lambda = \upsilon \cdot T \ ,$$

stąd

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \ . \tag{XI.8}$$

Ze wzoru (XI.8) widać, że w określonej chwili $t$ taka sama faza jest w punktach $x$, $x+\lambda$, $x+ 2\lambda$, $x+3\lambda$ itd., ponieważ

$$\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = \sin[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + 2\pi] = \sin[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + 4\pi] = \sin[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + 6\pi] \ \text{itd.,}$$

oraz, że w danym miejscu faza powtarza się w chwilach $t$, $t + T$, $t + 2T$, itd., ponieważ

$$\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = \sin[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - 2\pi] = \sin[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - 4\pi] \ \text{itd.}$$

Często przy rozważaniu zjawisk falowych w fizyce wprowadza się dwie nowe wielkości: liczbę falową $k / 2\pi\lambda$ i częstość kątową $\omega = 2\pi / T$. Wówczas dla fal biegnących w prawo i lewo możemy zapisać

$$y = A\sin(kx - \omega t) \ \text{lub} \ y = A\sin(kx + \omega t)$$

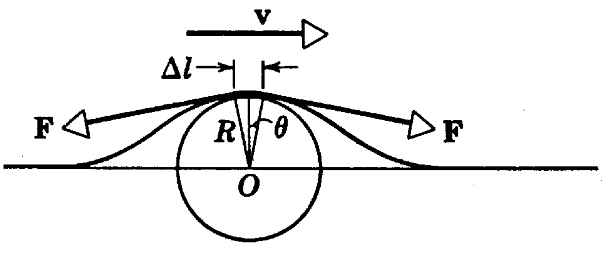
Widać, że prędkość fazowa fali $\upsilon$ jest dana wzorem

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k} \ .$$

## Rozchodzenie się fal, prędkość fal

Jeżeli chcemy zmierzyć prędkość fali $\upsilon$ to śledzimy jak przemieszcza się w czasie *wybrana część fali*, czyli *określona faza*.

Wiemy, że prędkość fali zależy od sprężystości ośrodka i jego bezwładności. Sprężystość dla struny jest określona poprzez napinającą ją siłę $F$ (na przykład im większa siła tym szybciej wychylone elementy struny wracają do położenia równowagi). Natomiast bezwładność jest związana z masą struny $m$ oraz jego długością $l$. Spróbujemy teraz wyprowadzić wzór na zależność prędkości $\upsilon$ fali od siły $F$ i od $\mu = m/l$, tj. masy przypadającej na jednostkę długości struny. W tym celu rozpatrzmy mały wycinek struny o długości d$x$ pokazany na rys.XI.2.




Rys.XI.2. Drgania struny.

Przypuśćmy, że w chwili $t$ mały fragment odkształconej struny o długości $\Delta l$ ma kształt łuku koła o promieniu $R$ (rys.XI.2). Natężenie $\vec{F}$ na obu końcach odcinka $\Delta l$ ma kierunek styczny do struny. Składowe poziome (wzdłuż osi $Ox$) znoszą się, a obie składowe pionowe (wzdłuż osi $Oy$) są równe $F\sin\theta$. Dla małych kątów $\theta$, mamy: $\sin(\theta) \approx \theta$. A zatem wypadkowa pionowa siła tj. siła skierowana ku punktowi $O$ wynosi

$$F_{wyp} = 2F\sin(\theta) = 2F\cdot\theta .$$

Jeżeli masa struny jest równa $m$, to masa rozważanego elementu $\Delta l$ wynosi $\Delta m = (m/l)\cdot\Delta l \equiv \mu\cdot\Delta l$. Tu $\mu = m/l$ - masa przypadająca na jednostkę długości struny, czyli tzw. gęstość liniowa.

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki siła wypadkowa jest równa iloczynowi masy wycinka $\Delta m$ i jego przyspieszenia. A zatem

$$F_{wyp} = 2F\cdot\theta = (\mu\,\Delta l)\frac{\partial \upsilon_y}{\partial t} = (\mu\,\Delta l)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} .$$

Oznaczając $\Delta l = 2x$, otrzymujemy

$$\theta = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot x .$$

Skąd

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \qquad \text{(XI.9)}$$

Uwzględniając, że $\theta = \partial y/\partial x$ znajdujemy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad . \tag{XI.10}$$

Podstawmy teraz do tego równania odpowiednie pochodne funkcji $y = f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t) \ ,$$

oraz

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \sin(kx - \omega t) \ .$$

W wyniku podstawienia otrzymujemy

$$k^2 = \frac{\mu}{F}\omega^2 \ ,$$

skąd możemy obliczyć prędkość fali

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad . \tag{XI.11}$$

Zwróćmy uwagę, że sinusoidalna fala może być przenoszona wzdłuż struny z prędkością niezależną od amplitudy i częstotliwości.

Jeżeli teraz przepiszemy równanie struny w postaci

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ , \tag{XI.12}$$

to otrzymamy *równanie falowe*, które stosuje się do wszystkich rodzajów rozchodzących się fal, takich jak fale dźwiękowe czy fale elektromagnetyczne.

## Interferencja fal

*Interferencją fal* nazywamy zjawisko nakładania się fal, wskutek czego zachodzi ich wzajemne wzmocnienie w jednych punktach przestrzeni oraz osłabienie w innych, w zależności od stosunków faz interferujących fal.

Rozważmy dwie fale o równych częstotliwościach i amplitudach, ale o fazach różniących się o $\delta$ . Równania tych fal są następujące

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t - \delta) \ ,$$

$$y_2 = A\sin(kx - \omega t) \ .$$

Znajdźmy teraz falę wypadkową jako sumę $y = y_1 + y_2$. Korzystając ze wzoru na sumę sinusów

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \ , \tag{XI.13}$$

otrzymujemy

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin(kx - \omega t - \delta/2) \ , \tag{XI.14}$$

co jest równaniem fali sinusoidalnej o amplitudzie $2A\cos(\delta/2)$.

Dla $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots 2n\pi$ mamy

$$2A\cos(\delta/2) = 2A\cos(n\pi) = (-1)^n \cdot 2A \ ,$$

a zatem fale wzmacniają się (amplituda wypadkowej fali wzrasta o 2 razy).

Dla $\delta = \pi, 3\pi, \ldots (2n+1)\pi$ mamy

$$2A\cos(\delta/2) = 2A\cos[(2n+1)\pi/2) = 0 \ ,$$

a zatem fale wygaszają się (amplituda wypadkowej fali jest zerowa).

## Fale stojące

Drugim przykładem interferencji (nakładania się) fal jest fala stojąca. Rozważmy dwa ciągi falowe biegnące w przeciwnych kierunkach tzn.

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \ ,$$

$$y_2 = A\sin(kx + \omega t) \ ,$$

na przykład falę padającą i odbitą.

Korzystając ze wzoru (XI.13) dla fali wypadkowej możemy zapisać

$$y = y_1 + y_2 = 2A\sin(kx)\cos(\omega t) \ . \tag{XI.15}$$

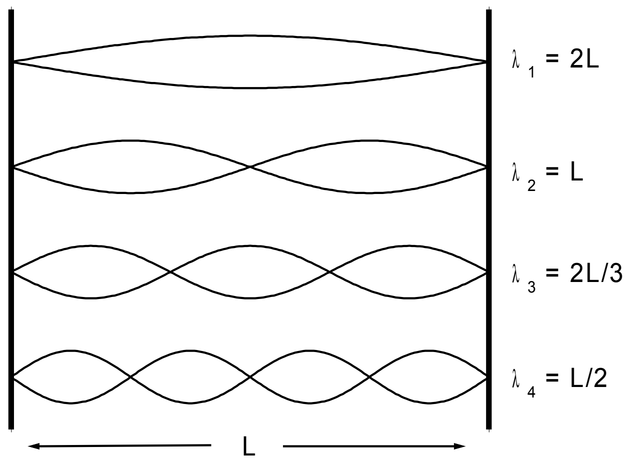
Jest to równanie tak zwanej *fali stojącej*. Zauważmy, że cząstki drgają ruchem harmonicznym prostym. Cząstki mają tę samą częstość, ale *różną amplitudę* zależną od położenia cząstki *x*. Punkty $kx = (2n+1)\pi/2$ (gdzie $n = 0,1,2,\ldots$), dla których $\sin(kx) = \pm 1$ mają maksymalną amplitudę i nazywają się *strzałkami*. Punkty $kx = n\pi$ (gdzie $n = 0,1,2,\ldots$), dla których $\sin(kx) = 0$ mają zerową amplitudę i nazywają się *węzłami*.

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną istotną różnicę. W przypadku fali stojącej, *energia nie jest przenoszona* wzdłuż struny (sznura), bo nie może ona przepłynąć przez węzły, jest na stałe zmagazynowana w poszczególnych elementach struny (sznura).

**Układy drgające, przykład**

Jeżeli struna zamocowana na obu końcach zostanie najpierw wygięta a następnie puszczona, to wzdłuż struny rozchodzą się drgania poprzeczne. Zaburzenia te odbijają się od zamocowanych końców i w wyniku interferencji powstaje fala stojąca. Zwróćmy uwagę, że drgania struny wytwarzają w otaczającym strunę powietrzu dźwiękowe fale podłużne (fale akustyczne). Ponieważ jedynym warunkiem, jaki musi być spełniony, jest nieruchomość obu końców struny, czyli istnienie węzłów fali stojącej na tych końcach, to mogą powstać w tej strunie fale stojące o różnej długości. Pierwsze cztery rodzaje drgań, jakie powstają w strunie o długości $L$ zamocowanej na końcach są pokazane na rys.XI.3. Takie fale stojące nazywamy *rezonansami*. Widzimy, że długości fal spełniają związek

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} . \qquad \text{(XI.16)}$$




Rys.XI.3. Rezonanse.

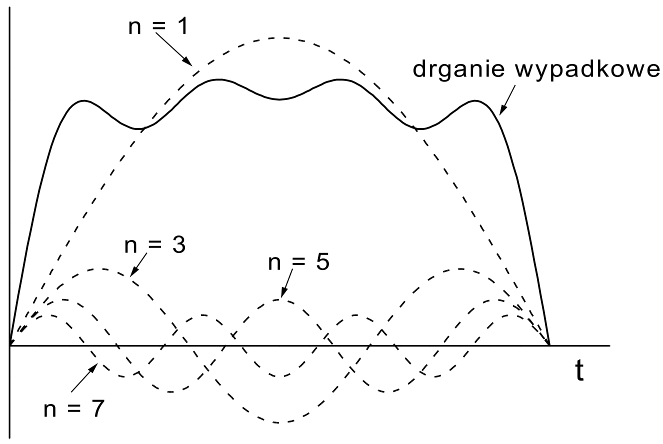
Korzystając z tego, że prędkość fali $\upsilon = \lambda/T = \lambda\nu$ oraz podstawiając wyrażenie (XI.11) możemy obliczyć częstotliwość rezonansów:

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\upsilon = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} . \qquad \text{(XI.17)}$$

Najniższą częstość nazywamy *częstością podstawową* a pozostałe *wyższymi harmonicznymi* czyli *alikwotami*.

Zazwyczaj w drganiach występują, oprócz drgania podstawowego, również drgania harmoniczne, a dźwięki, jakie odbieramy są wynikiem nakładania się tych drgań. O jakości instrumentu (jego barwie) decyduje właśnie to ile alikwotów jest zawarte w dźwięku i jakie są ich natężenia. Przykładowo, drganie wypadkowe struny będące złożeniem tonu podstawowego ($n$ = 1) i wyższych harmonicznych ($n$ = 3, 5, 7) o różnych amplitudach jest pokazane na rys. XI.4.

Zwróćmy uwagę, że wypadkowe drganie (chociaż okresowe) nie jest harmoniczne (nie daje się opisać funkcją sinus lub cosinus).




Rys.XI.4. Drganie wypadkowe struny będące złożeniem tonu podstawowego ($n$ = 1) i wyższych harmonicznych ($n$ = 3, 5, 7) o różnych amplitudach.

**Dudnienia - modulacja amplitudy**

Mówiliśmy już o superpozycji fal, *interferencji w przestrzeni* (dodawanie fal o tej samej częstości). Rozpatrzmy teraz przypadek *interferencji w czasie*. Pojawia się ona, gdy przez dany punkt w przestrzeni przebiegają w tym samym kierunku fale o trochę różnych częstotliwościach. Wychylenie wywołane przez jedną i drugą falę mają postać

$$y_1 = A\sin(\omega_1 t) \ ,$$

$$y_2 = A\sin(\omega_2 t) \ ,$$

więc, korzystając ze wzoru (XI.13), otrzymujemy

$$y = y_1 + y_2 = \left[2A\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)\right]\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \ . \qquad \text{(XI.18)}$$

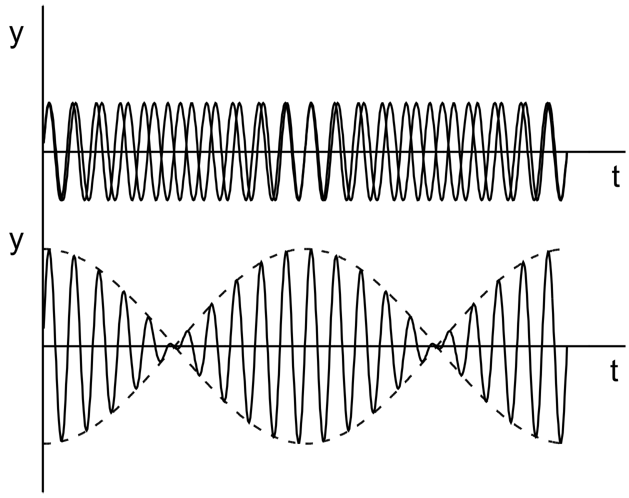
Drgania wypadkowe można więc uważać za drgania o częstości

$$\omega_{srednie} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \ ,$$

która jest średnią częstością dwóch fal, i o amplitudzie (wyrażenie w nawiasie kwadratowym) zmieniającej się w czasie z częstością

$$\omega_{ampl} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} .$$

Jeżeli częstotliwości $\omega_1$ i $\omega_2$ są bliskie siebie to amplituda zmienia się powoli. Mówimy, że mamy do czynienia z modulacją amplitudy AM (stosowana np. w odbiornikach radiowych). Dla fal dźwiękowych AM przejawia się jako zmiana głośności (dźwięk to wzrasta, to gaśnie) i nazywa się *dudnieniami* (rys.XI.5).



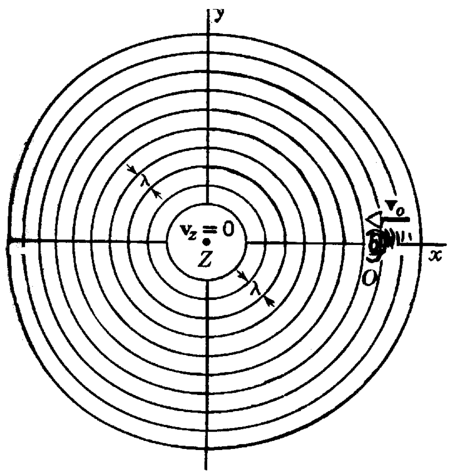

Rys.XI.5. Dudnienia.

**Zjawisko Dopplera**

Austriak, Christian Doppler w pracy z 1842 r zwrócił uwagę, że barwa świecącego ciała (częstotliwość) musi się zmieniać z powodu ruchu względnego obserwatora lub źródła. Zjawisko Dopplera występuje dla wszystkich fal (dźwiękowych, świetlnych itd.). Obecnie rozważymy je dla fal dźwiękowych. Zajmiemy się przypadkiem ruchu źródła i obserwatora wzdłuż łączącej ich prostej.

Wybierzmy układ odniesienia nieruchomy względem ośrodka (na przykład powietrza), w którym biegną fale. Rozważmy przypadek, dla którego źródło dźwięku $Z$ spoczywa w wybranym układzie odniesienia, a obserwator na przykład w samochodzie porusza się z prędkością $\upsilon_0$ w kierunku źródła dźwięku. Okręgi na rys.XI.6 oznaczają czoła fal oddalonych od siebie o jedną długość fali $\lambda$ .

Gdyby obserwator był nieruchomy, a odległość źródła dźwięku od obserwatora wynosiłaby $l$, to obserwator odbierałby $l/\lambda = \upsilon t/\lambda$ fal w czasie $t$ i częstość słyszana przez obserwatora wynosiłaby $\nu = \upsilon t / \lambda t = \upsilon / \lambda$ . Tu $\upsilon$ - prędkość fal.




Rys.XI.6

Gdy obserwator porusza się z prędkością $v_0$ w kierunku źródła dźwięku, odległość obserwatora od źródła dźwięku zmniejsza się i w tym samym czasie $t$ obserwator odbierze $v_0 t/\lambda$ dodatkowych fal. Częstość słyszana przez obserwatora wynosi

$$\nu' = \frac{\frac{v t}{\lambda} + \frac{v_O t}{\lambda}}{t} = \frac{v + v_O}{\lambda} = \frac{v + v_O}{\frac{v}{\nu}} .$$

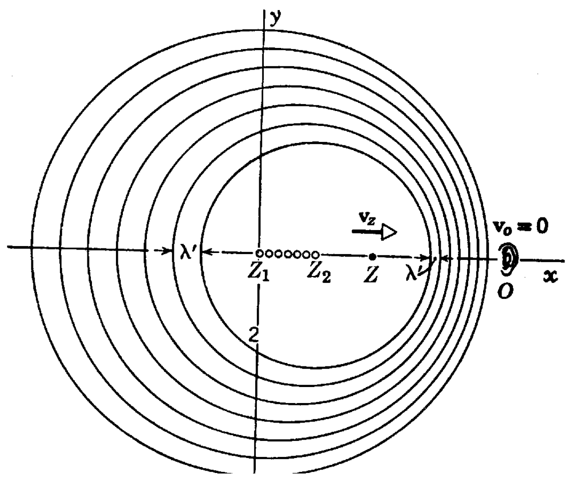
Skąd

$$\nu' = \nu \frac{v + v_O}{v} = \nu \cdot \left(1 + \frac{v_0}{v}\right) . \qquad \text{(XI.19)}$$

A zatem częstość dźwięku słyszana przez obserwatora ulega zwiększeniu.

Kiedy obserwator *oddala się* od nieruchomego źródła dźwięku częstość dźwięku słyszana przez obserwatora zmniejsza się i wynosi

$$\nu' = \nu \frac{v - v_O}{v} = \nu \cdot \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) . \qquad \text{(XI.20)}$$




Rys.XI.7

W przypadku, gdy obserwator spoczywa, a źródło dźwięku porusza się z prędkością $v_Z$ (rys.XI.7) częstość dźwięku słyszaną przez obserwatora określa wzór

$$\nu' = = \nu \cdot \left(\frac{v}{v \mp v_Z}\right) . \qquad \text{(XI.21)}$$

Tu znak *minus* odnosi się do ruchu źródła w kierunku obserwatora, a znak *plus* dla ruchu od obserwatora.

*Literatura do Wykładu 11*

1. *Robert Resnik, David Halliday: Fizyka 1, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.465-522.*
2. *Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t.1, PWN, Warszawa 1980, str. 533-541; str.558-564.*

*Zadania do Wykładu XI*

1. Wzdłuż sznura biegnie fala. Przy założeniu, że czas jaki upływa pomiędzy momentem maksymalnego i zerowego wychylenia w ustalonym punkcie sznura wynosi 0,25 s, znaleźć: a) częstość; b) prędkość rozchodzenia się fali jeżeli jej długość wynosi 4 m. *Odpowiedź*: a) 1 Hz; b) 1 m/s.
2. Gęstość liniowa drgającego sznura wynosi 1,5 $10^{-4}$ kg/m. W sznurze rozchodzi się fala poprzeczna opisana równaniem $y = 0{,}05\sin(2x + 200t)$, gdzie $x$ i $y$ są wyrażone w $m$, a czas w sekundach. Ile wynosi naprężenie nici? *Odpowiedź*: 1,5 N.
3. Ze źródła punktowego wychodzi izotropowo we wszystkich kierunkach fala. Uzasadnić następujące wyrażenie dla wychylenia $y$ cząstki w dowolnej odległości $r$ od źródła

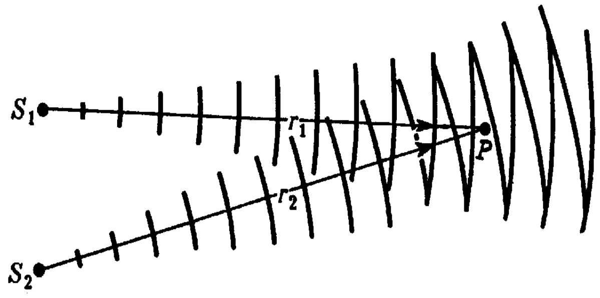
$$y(r,t) = \frac{Y}{r}\cos[k(r - \upsilon \cdot t)] \ .$$

4. Obliczyć amplitudę ruchu wypadkowego wynikającego z nałożenia dwóch prostych fal harmonicznych o takim samym kierunku rozchodzenia się i takiej samej częstości, jeżeli amplitudy składowych wynoszą 3,0 cm i 4,0 cm, a drgania różnią się w fazie o $\pi/2$ radiana. *Odpowiedź*: 5 cm.
5. Trzy nakładające się fale sinusoidalne mają ten sam okres, natomiast ich amplitudy mają się do siebie jak 1:1/2:1/4, a stałe fazowe są równe $0, \pi/2, \pi$. Narysować kształt fali wypadkowej i przedyskutować jej charakter.
6. Drgania sznura są opisane równaniem

$$y = 0{,}5\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos(40\pi t) \ ,$$

gdzie $x$ i $y$ są wyrażone w cm, a $t$ w s. a) Jaka jest amplituda i prędkość fal składowych, których superpozycja może dawać takie drgania? b) Jaka jest odległość między węzłami? c) Jaka jest prędkość cząstki w punkcie $x = 1{,}5$ cm w chwili $t = 9/8$ s? *Odpowiedź*: a) 0,25 cm, 120 cm/s. b) 3,0 cm. c) Zero.

7. Dwa źródła $S_1$ i $S_2$ emitują fale o tej samej częstości i amplitudzie. Fazy początkowe tych fal są takie same.




Pokazać, że superpozycja tych dwóch fal daje falę, której amplituda zmienia się ze zmianą położenia punktu $P$ zgodnie (w przybliżeniu) z wyrażeniem

$$\frac{4Y}{r_1 + r_2}\cos\left[\frac{k}{2}(r_2 - r_1)\right] .$$

8. W leczeniu i niszczeniu nowotworów tkanki miękkiej używa się fal ultradźwiękowych o dużym natężeniu i częstości 10 MHz. Jaka jest długość tej fali w tkance, jeżeli szybkość rozchodzenia się dźwięku w tkance wynosi 1500 m/s? *Odpowiedź*: 1,5 mm.
9. Udowodnić wzór (XI.20).
10. Udowodnić wzór (XI.21).