

## Wykład 10

### Ruch w układach nieinercjalnych

Prawa Newtona są słuszne jedynie w układach inercjalnych. Ściśle mówiąc *układami inercjalnymi nazywamy takie układy odniesienia, które albo spoczywają, albo poruszają się ze stałą prędkością względem średnich pozycji gwiazd stałych*. Wybór układu odniesienia należy do nas i dotychczas rozważaliśmy ruch tylko w układach inercjalnych. W praktyce jednak często spotykamy się również z układami nieinercjalnymi. Nieinercjalnym układem jest na przykład układ odniesienia połączony z kabiną spadającej windy, albo układ odniesienia obracający się względem gwiazd stałych (na przykład układ związany z Ziemią). Dlatego żeby otrzymać równania ruchu w nieinercjalnych układach odniesienia musimy zbadać, jak przekształcają się współrzędne, prędkości i przyspieszenia przy przejściu od układu odniesienia inercjalnego do drugiego układu nieinercjalnego.

#### Siły bezwładności

Rozważmy dwa układy odniesienia: inercjalny układ  $K$  i nieinercjalny układ  $K'$ , który porusza się względem układu  $K$  z przyspieszeniem  $\vec{a}_0$ . Niech położenie punktu materialnego o masie  $m$  określa w układzie  $K'$  wektor wodzący  $\vec{r}'$ , a położenie tego samego punktu materialnego w układzie  $K$  określa wektor wodzący  $\vec{r}$  (rys.X.1). Wtedy możemy zapisać

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' , \quad (\text{X.1})$$

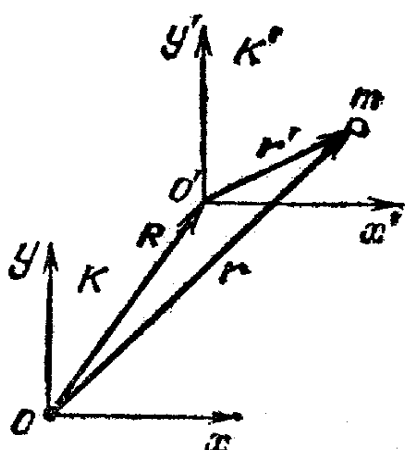
gdzie wektor  $\vec{R}$  określa położenie początku układu  $K'$  względem układu  $K$ .

Ze wzoru (X.1) znajdujemy, że przyspieszenia punktu materialnego w układzie  $K$  oraz w układzie  $K'$  są związane ze sobą

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' . \quad (\text{X.2})$$

Mnożąc równanie (X.2) przez masę punktu materialnego  $m$  otrzymujemy

$$m\vec{a} = m\vec{a}_0 + m\vec{a}' . \quad (\text{X.3})$$



Rys.X.1

Względem układu inercjalnego  $K$  ruch punktu materialnego dany jest równaniem

$$m\vec{a} = \vec{F} . \quad (\text{X.4})$$

Tu  $\vec{F}$  jest siłą rzeczywistą, która działa na punkt materialny w inercyjnym układzie  $K$ .

Podstawiając do (X.4) zamiast  $m\vec{a}$  wyrażenie (X.3) otrzymujemy

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 . \quad (\text{X.5})$$

Równanie (X.5) jest to równanie ruchu punktu materialnego poruszającego się względem nieinercyjnego układu odniesienia  $K'$ . Ze wzoru (X.5) wynika, że przyspieszenie punktu  $\vec{a}'$  względem układu nieinercyjnego  $K'$  powstaje jak w wyniku działania siły rzeczywistej  $\vec{F}$  pochodzącej od innych ciał fizycznych (albo pól fizycznych), a także w wyniku ruchu z przyspieszeniem układu  $K'$  względem układu  $K$ . Przyspieszenie punktu, związane z przyspieszeniem układu  $K'$  względem układu  $K$ , możemy traktować jako wynik działania siły pozornej

$$\vec{F}' = -m\vec{a}_0 , \quad (\text{X.6})$$

dla której nie możemy wskazać źródła fizycznego w postaci ciała, albo pola.

Z uwzględnieniem (X.6) równanie ruchu punktu materialnego w układzie nieinercyjnym  $K'$  możemy zapisać w postaci

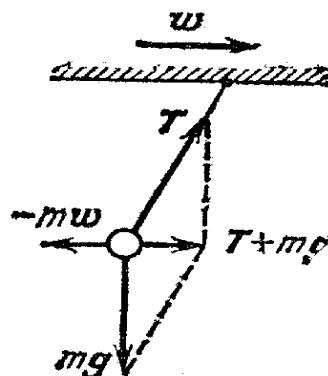
$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}' . \quad (\text{X.7})$$

Równanie (X.7) jest podobne do równania Newtona (X.4) a zatem mechanikę klasyczną Newtona możemy stosować do nieinercyjnych układów odniesienia *pod warunkiem, że wprowadzimy siły nienewtonowskie (pозorne), które nazywamy siłami bezwładności*. Siła bezwładności nie ma odpowiadającej jej siły reakcji, ponieważ nie jest związana z oddziaływaniem dwóch ciał. Inaczej mówiąc, siły bezwładności, w przeciwieństwie do sił oddziaływania rzeczywistych, nie spełniają trzeciej zasady Newtona. Jednak wprowadzenie sił pozornych daje nam możliwość na stosowanie mechaniki klasycznej do opisu zdarzeń, które chcemy rozważać w układach poruszających się z przyspieszeniem.

Zadanie 1. W wagonie pociągu stojącego na stacji wisi na nici kulka o masie  $m$ . W pewnej chwili pociąg zaczyna ruch z przyspieszeniem  $\vec{w}$ . Rozważyć, co się dzieje z kulką z punktu widzenia obserwatora znajdującego się w wagonie i z punktu widzenia obserwatora znajdującego się na powierzchni Ziemi.

Rozwiązanie: Gdy pociąg stoi na stacji obaj obserwatorzy widzą to samo: kulka wisi pionowo na nici. W tym przypadku na kulkę działa siła grawitacyjna  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  skierowana w dół, którą równoważy siła naprężenia nici skierowana do góry.

Gdy pociąg zaczyna ruch, koniec górny nici zaczyna poruszać się razem z wagonem, wskutek czego nić zostaje odchylona od położenia pionowego (rys.X.2). To powoduje, że wektor siły naprężenia  $\vec{T}$  nici nie będzie równoważył siły grawitacyjnej  $\vec{F}_g$  a wypadkowa rzeczywista siła  $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$  będzie skierowana w kierunku ruchu wagonu.



Rys.X.2

Wskutek działania siły  $\vec{F}$  kulka zacznie poruszać się w kierunku ruchu pociągu. Odchylenie nici od pionowego położenia zatrzyma się, gdy wartość bezwzględna tej siły wypadkowej będzie wynosiła  $|\vec{F}| = mw$ . A zatem z punktu widzenia obserwatora znajdującego się na powierzchni Ziemi kulka porusza się w kierunku ruchu pociągu z przyspieszeniem  $\vec{w}$ .

Wagon jest układem nieinercyjnym, a zatem w wagonie na kulkę oprócz siły rzeczywistej  $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{w}$  działa siła pozorna  $\vec{F}_{in} = -m\vec{w}$ . Siła pozorna  $\vec{F}_{in} = -m\vec{w}$  równoważy siłę rzeczywistą  $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{w}$ . A zatem z punktu widzenia obserwatora znajdującego się w wagonie kulka pozostaje w spoczynku, ale nić zostaje odchylona od położenia pionowego.

### Odśrodkowa siła bezwładności

Rozważmy teraz obracającą się ze stałą prędkością kątową  $\vec{\omega}$  karuzelę, na której do osi obrotu karuzeli jest przymocowana sprężyna z kulką na końcu (rys.X.3). Jeżeli karuzela jest nieruchoma, sprężyna pozostaje w stanie nie zdeformowanym i ma długość  $l_0$ . Obserwator stojący na Ziemi zauważy, że gdy karuzela zaczyna obracać się dookoła swojej osi, kulka rozciąga sprężynę do jakiejś długości  $R$  (rys.X.3) i potem kulka zaczyna poruszać się ze stałą prędkością kątową  $\vec{\omega}$ . W stanie rozciągniętym sprężyny na kulkę działa siła sprężystości skierowana ku osi obrotu karuzeli (rys.X.3)

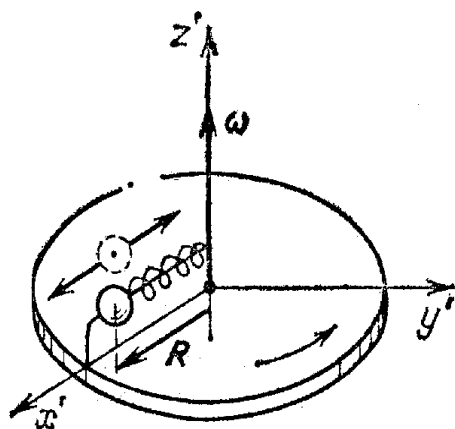
$$\vec{F}_{spr} = -k\left(1 - \frac{l_0}{R}\right) \cdot \vec{R} . \quad (X.8)$$

Z rozważań dotyczących ruchu obrotowego przeprowadzonych na Wykładzie 6 wiemy, że ruch obrotowy po okręgu o promieniu  $R$  jest ruchem z przyspieszeniem dośrodkowym (patrz wzór (VI.15))

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \cdot \vec{R} = -\left(\frac{v}{R}\right)^2 \cdot \vec{R} . \quad (X.9)$$

A zatem, zgodnie z drugą zasadą Newtona przyspieszenie dośrodkowe  $\vec{a}_r$  jest spowodowane tym, że na kulkę działa siła sprężystości (X.8)

$$\vec{F}_{spr} = m\vec{a}_r = -m\omega^2 \cdot \vec{R} . \quad (X.10)$$



Rys.X.3

Obserwator znajdujący się na karuzeli, czyli znajdujący się w nieinercyjnym układzie odniesienia stwierdzi, że kulka względem niego jest nieruchoma. Jeżeli ten obserwator studiował drugie prawo Newtona, to powie, że kuleczka znajduje się w spoczynku, bo działają na nią dwie równoważące siły: siła sprężystości oraz równoważąca ją *siła odśrodkowa*

$$\vec{F}_{ods} = m\omega^2 \cdot \vec{R} . \quad (X.11)$$

Obserwator stojący na Ziemi nie zauważy działania żadnej siły odśrodkowej i rzeczywiście z jego punktu widzenia ta siła nie istnieje. A zatem siła odśrodkowa jest siłą pozorną i powstaje w układzie odniesienia  $K'$  tylko wskutek tego, że ten układ jest układem nieinercyjnym. Siła pozorna tak samo jak siła rzeczywista może wykonywać pracę i jeżeli nie byłoby sprężyny ( $\vec{F}_{spr} = 0$ ), to siła odśrodkowa spowodowałaby, że kuleczka poruszałaby się w stronę krawędzi karuzeli.

W postaci wektorowej siłę odśrodkową (X.11) możemy zapisać wzorem

$$\vec{F}_{ods} = m[\omega \times [\omega \times \vec{R}]] = m[\omega \times \vec{v}] . \quad (X.12)$$

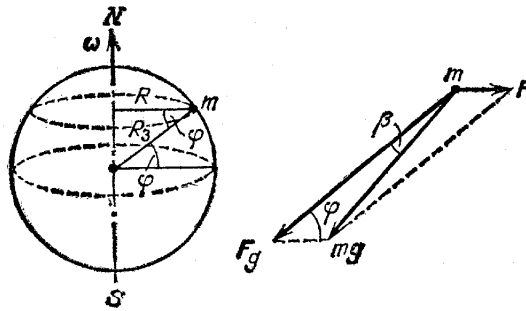
Istotnie, biorąc pod uwagę, że wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{R}$  znajdujemy, że wektor  $[\omega \times \vec{v}]$  ma wartość bezwzględną  $m\omega^2 \cdot R$  i zwrot zgodny ze zwrotem wektora  $\vec{R}$ .

Siła odśrodkowa działająca w nieinercyjnym układzie odniesienia  $K'$  nie zależy od prędkości ciała w tym układzie (patrz wzór (X.11), a zatem siła odśrodkowa działa tak samo na ciała nieruchome jak i ruchome w układzie  $K'$ .

### Siła ciężkości i ciężar ciała

Wskutek rotacji Ziemi dookoła swej osi, na powierzchni Ziemi na dowolne ciało o masie  $m$  oprócz siły grawitacyjnej  $\vec{F}_g$  skierowanej ku środkowi Ziemi, działa siła odśrodkowa (na rys.\_X.4 ta siła oznaczona jest jako  $F$ ). Z rys.\_X.4 widać, że wartość bezwzględna siły odśrodkowej jest równa

$$F_{ods} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_Z \cdot \cos\varphi \quad . \quad (X.13)$$



Rys.X.4

Wypadkowa siła, która działa na ciało o masie  $m$  będzie równa sumie wektorowej siły grawitacyjnej  $\vec{F}_g$  i siły odśrodkowej (rys.X.4). Właśnie tą siłę nazywamy ciężarem ciała i oznaczamy jako  $m\vec{g}$ . Z prawego rysunku X.4 widać, że

$$mg \cdot \sin\beta = F \cdot \sin\varphi \quad . \quad (X.14)$$

Skąd

$$\sin\beta = \frac{F \cdot \sin\varphi}{mg} \quad . \quad (X.15)$$

Po podstawieniu do (X.15) wzoru (X.13) ostatecznie mamy

$$\sin\beta = \frac{m\omega^2 R_Z \cdot \cos\varphi \sin\varphi}{mg} = \frac{\omega^2 R_Z}{2g} \cdot \sin 2\varphi \quad . \quad (X.16)$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru  $\sin 2\varphi = 2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi$ .

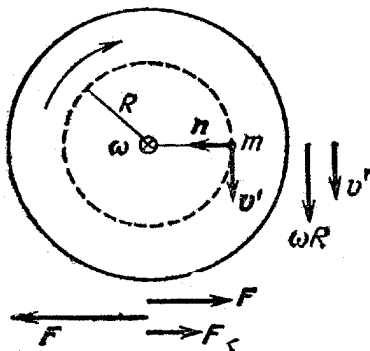
Po podstawieniu do (X.16)  $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ ,  $R_z = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  otrzymujemy

$$\sin \beta = 0.0018 \cdot \sin 2\varphi \quad . \quad (\text{X.17})$$

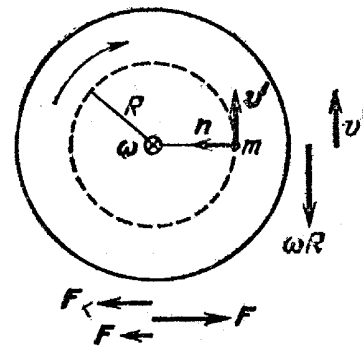
Z tego wzoru wynika, że siła ciężkości pokrywa się z siłą przyciągania ziemskiego tylko na biegunach Ziemi, gdy siła odśrodkowa znika. Na równiku różnica między siłą ciężkości i siłą grawitacyjną jest największa, ponieważ tutaj te siły mają przeciwny zwrot. Ta różnica wynosi  $mg - m\omega^2 R = mg(1 - \omega^2 R/g) = mg(1 - 0.36 \cdot 10^{-2})$ . A więc nawet na równiku siła ciężkości różni się od siły przyciągania ziemskiego tylko o 0.35 %.

### Siłą Coriolisa

Jeżeli w układzie nieinercyjnym  $K'$  ciało o masie  $m$  porusza się z prędkością  $\vec{v}'$ , to na ciało zaczyna działać dodatkowa siła pozorna (siła bezwładności), która nazywa się *siłą Coriolisa*. Dlatego, żeby wyprowadzić wzór na siłę Coriolisa rozważmy układ nieinercyjny  $K'$  obracający się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  dookoła osi  $Oz$  układu inercyjnego  $K$  i niech w tym układzie znajduje się karuzela poruszająca się ze stałą prędkością kątową  $\omega'$  (względem układu  $K'$ ) dookoła osi  $Oz' // Oz$ . Układ odniesienia związany z karuzelą będziemy oznaczali jako układ  $K''$ .



Rys.X.5a



Rys.X.5b

Jeżeli w układzie  $K''$  znajduje się ciało o masie  $m$ , to z punktu widzenia obserwatora znajdującego się w układzie  $K'$  na ciało działa siła dośrodkowa

$$\vec{F}'_{dos} = m\vec{a}' \quad . \quad (\text{X.18})$$

gdzie  $\vec{a}' = -\omega'^2 \vec{R}$  jest przyspieszeniem ciała w układzie  $K'$ , które pokrywa się z przyspieszeniem dośrodkowym.

Natomiast obserwator znajdujący się w inercyjnym układzie  $K$  widzi, że ciało o masie  $m$  obraca się dookoła osi  $Oz$  ze stałą prędkością kątową  $(\omega + \omega')$ , a zatem ten obserwator stwierdzi, że na ciało musi działać siła dośrodkowa

$$\vec{F}_{dos} = -m(\omega + \omega')^2 \cdot \vec{R} = -m\omega^2 \vec{R} - m\omega'^2 \vec{R} - 2m\omega\omega' \vec{R}. \quad (X.19)$$

Wprowadzając jednostkowy wektor  $\vec{n} = -\vec{R}/R$  i uwzględniając iż  $v' = \omega' R$  zapiszmy wzór (X.19) w postaci

$$\vec{F}_{dos} = -m\omega^2 \vec{R} - m\omega'^2 \vec{R} + 2m\omega v' \cdot \vec{n}. \quad (X.20)$$

Biorąc pod uwagę wzór (X.18), wzór (X.20) możemy zapisać w postaci

$$\vec{F}_{dos} = -m\omega^2 \vec{R} + m\vec{a}' + 2m\omega v' \cdot \vec{n}. \quad (X.21)$$

W układzie inercyjnym  $K$  istnieją tylko siły rzeczywiste, a zatem dla siły dośrodkowej (X.21) musi być źródło realne. W przypadku kulki na sprężynie źródłem tej siły jest sprężyna.

Oznaczając tą siłę realną jako  $\vec{F} \equiv \vec{F}_{dos}$  ze wzoru (X.21) otrzymujemy

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2 \vec{R} - 2m\omega v' \cdot \vec{n}. \quad (X.22)$$

Równanie (X.22) jest równaniem ruchu ciała o masie  $m$  w nieinercyjnym układzie odniesienia  $K'$  w przypadku gdy ciało porusza się z prędkością  $v'$ . W tym równaniu, oprócz siły rzeczywistej  $\vec{F}$  występują jeszcze dwie dodatkowe pozorne siły bezwładności skierowane wzdłuż wektora  $\vec{R}$ .

Porównując drugi człon w (X.22) ze wzorem (X.11) widzimy, że ten człon opisuje siłę odśrodkową, działanie której zauważy obserwator w układzie  $K'$ . Ten człon nie zależy od prędkości ciała  $v'$  w układzie  $K'$ . Trzeci człon w (X.22) nosi nazwę *siły Coriolisa* i ta pozorna siła działa w układzie  $K'$  tylko na ruchome ciała. W postaci wektorowej siła Coriolisa może być zapisana jako

$$\vec{F}_C = 2m \cdot [\vec{v}' \times \vec{\omega}]. \quad (X.23)$$

Istotnie, wartość bezwzględna iloczynu wektorowego jest równa  $|\vec{v}' \times \vec{\omega}| = v' \omega$ , a zwrot zależy od tego jak skierowany jest wektor  $\vec{v}'$  względem wektora  $\vec{\omega}$ . Jeżeli wektor prędkości  $\vec{v}'$  ma zwrot pokazany na rys.X.5a, to siła Coriolisa jest skierowana wzdłuż wektora  $\vec{R}$ .

Jeżeli wektor prędkości  $\vec{v}'$  ma zwrot przeciwny, to siła Coriolisa jest skierowana ku osi obrotu układu  $K'$ , czyli wzdłuż wektora  $\vec{n}$ .

Wzór (X.23) na siłę Coriolisa otrzymaliśmy zakładając, że wektor  $\vec{v}'$  jest prostopadły do wektora  $\vec{\omega}$ . Okazuje się, że ten wzór jest słuszny też w ogólnym przypadku, kiedy wzajemna orientacja wektorów  $\vec{v}'$  i  $\vec{\omega}$  jest dowolna.

Ze wzoru (X.23) wynika, że siła Coriolisa znika w trzech przypadkach:

- gdy punkt materialny jest sztywno związany z układem  $K'$  ( $\vec{v}' = 0$ );
- gdy układ  $K'$  porusza się ruchem postępowym względem układu  $K$  ( $\omega = 0$ );
- gdy punkt materialny porusza się w układzie  $K'$  z prędkością  $\vec{v}'$  równoległą do prędkości kątowej  $\vec{\omega}$  ( $\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$ ).

W 1851 r. Foucault po raz pierwszy wykazał, że jeżeli obserwować drgania wahadła w wybranym na powierzchni Ziemi nieruchomym układzie odniesienia, to płaszczyzna, w której zachodzą drgania wahadła obraca się względem tego nieruchomego układu odniesienia. W ten sposób można doświadczalnie udowodnić, znajdując się na powierzchni Ziemi, że Ziemia obraca się wokół swojej osi.

Podsumowując możemy powiedzieć, że przy rozwiązywaniu zagadnień mechanicznych istnieją dwa możliwe sposoby: (1) możemy wybrać inercjalny układ odniesienia i rozważyć jedynie siły rzeczywiste działające na ciało, tzn. siły wywierane przez konkretne ciało albo pole fizyczne (grawitacyjne, elektromagnetyczne itd.) lub (2) możemy przejść do nieinercjalnego układu odniesienia i rozważyć nie tylko siły rzeczywiste, lecz również odpowiednio zdefiniowane pozorne siły bezwładności, tzn. siły, które nie są związane z żadnym z ciał (albo z polem) znajdującym się w jego otoczeniu. Siły pozorne powstające w układzie nieinercjalnym wydają się obserwatorowi znajdującemu się w tym układzie zupełnie realne, mimo, że nie potrafi on wskazać żadnego źródła fizycznego (ciała albo pola) tej siły. W układzie inercjalnym siły pozorne znikają. Wybór jednej z możliwości rozważania zagadnień mechanicznych i w ogóle zagadnień fizycznych jest jedynie kwestią wygody.

#### *Literatura do Wykładu 10*

1. Robert Resnik, David Halliday: *Fizyka 1*, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994, str.130-131; 646-649.
2. Sz. Szczęniowski, *Fizyka doświadczalna, t.1*, PWN, Warszawa 1980, str. 189-211.



*Zadania do Wykładu X*

1. W początkowej chwili winda znajduje się w spoczynku. Na suficie windy na nieważkiej linie jest przymocowana na sprężynie kulka o masie  $m$ . W chwili  $t$  winda zaczyna poruszać się w górę z przyspieszeniem  $\vec{a}$ . Zakładając, że współczynnik sprężystości sprężyny wynosi  $k$  rozważyc ruch kulki. *Odpowiedź:* sprężyna zostaje dodatkowo rozciągnięta o  $ma/k$ .
2. Samochód jadący z prędkością 100 km/h gwałtownie hamuje w ciągu 1 s. Ile wynosi siła bezwładności, która działa na kierowcę samochodu o masie 72 kg? *Odpowiedź:* około 200 Kg.
3. Na krawędzi obracającej się bez tarcia, z prędkością kątową 1 obr/s platformie o średnicy 2 m stoi człowiek o masie 60 kg. Ile wynosi siła odśrodkowa działająca na człowieka? *Odpowiedź:* 240 Kg.
4. Na zakręt drogi, który możemy opisać jako łuk okręgu o promieniu 72 m, wjeżdża samochód z prędkością 60 km/h. Ile będzie wynosić siła odśrodkowa działająca na kierowcę samochodu o masie 72 kg? *Odpowiedź:* około 30 Kg.
5. Ile wynosi siła odśrodkowa działająca na ciało o masie 50 kg znajdujące się na równiku Ziemi? *Odpowiedź:* 1,6 N
6. Na równiku Ziemi ciało o masie  $m$  zaczyna spadać z wysokości  $h$ . W jaką stronę (na wschód albo na zachód) będzie spadało ciało? *Odpowiedź:* na wschód.
7. Rzeka Odra płynie na północ. W jaką stronę jest skierowana siła Coriolisa działająca na wodę Odry? Jakie skutki powoduje działanie tej siły Coriolisa? *Odpowiedź:* na wschód.
8. Na równiku Ziemi poruszają się dwa samochody o jednakowej masie z prędkością  $v$  km/h. Jeden samochód jedzie na wschód, a drugi na zachód. Ile wynosi suma wektorowa sił Coriolisa działających na te samochody? *Odpowiedź:* zero.
9. Na obracającej się bez tarcia, z prędkością kątową 1 obr/s platformie około osi obrotu platformy stoi człowiek o masie 60 kg. W jakiej chwili człowiek zaczyna iść wprost do krawędzi platformy z prędkością 3 km/h. Ile wynosi siła Coriolisa działająca na człowieka? *Odpowiedź:* około 63 Kg.
10. Udowodnić, że na równiku płaszczyzna, w której zachodzą drgania wahadła Foucaulta nie obraca się.