

## Wykład 29

---

### Podstawy szczególnej teorii względności

---

#### Zasada względności i transformacji Galileusza

Z podstaw mechaniki wiemy, że gdy układ odniesienia porusza się ze stałą prędkością po linii prostej to każde przeprowadzone przez nas doświadczenie przebiega tak samo jakbyśmy się nie poruszali. Jednocześnie jakakolwiek zmiana prędkości układu natychmiast jest przez nas zauważana. To prawo przyrody znane jest jako *zasada względności* i było sformułowane jeszcze za czasów Galileusza:

*Prawa przyrody (fizyki również) są takie same bez względu na to, czy obserwujemy je z układu inercyjnego nie poruszającego się, czy z ruchomego układu inercyjnego (czyli układu poruszającego się względem pierwszego układu bez przyspieszenia).*

Jeżeli rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia  $K$  i  $K'$  i układ  $K'$  porusza się względem układu  $K$  ze stałą prędkością  $V$  wzdłuż osi  $Ox$  ( $Oy = Oy'$ ,  $Oz = Oz'$ ), to z mechaniki klasycznej wynika, że *wzory przekładające wyniki obserwacji jednego obserwatora na spostrzeżenia drugiego mają postać*

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (29.1)$$

Te równania noszą nazwę *transformacji Galileusza*.

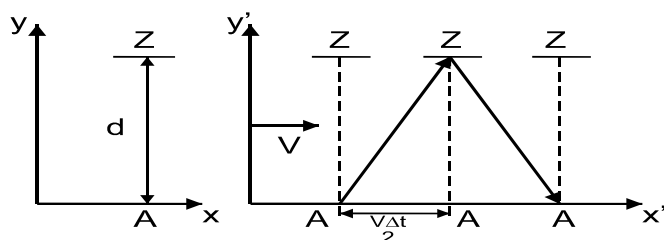
Prawie do końca 19 - wieku uważano, że stosując powyższe wzory do opisu doświadczeń, otrzymamy takie same wyniki, niezależnie od układu inercyjnego w którym to doświadczenie opisujemy. Okazało się jednak, że nie jest to prawdą. Najpierw było stwierdzono, że przekształcenia Galileusza zastosowane do równań Maxwella nie dają tych samych wyników dla różnych układów inercjalnych. W szczególności z praw Maxwella wynika, że *prędkość światła, określająca prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni, jest podstawową stałą przyrody i powinna być taka sama w każdym układzie odniesienia*. Oznacza to na przykład, że gdy impuls światła rozchodzący się w próżni w kierunku osi  $Ox$  jest obserwowany przez dwóch obserwatorów, to zarówno obserwator nieruchomy jak poruszający się z prędkością  $V$  (względem pierwszego) zmierzą identyczną prędkość impulsu  $c = 2.998 \cdot 10^8$  m/s. Tymczasem zgodnie z transformacją Galileusza i ze zdrowym rozsądkiem powinniśmy otrzymać wartość  $(c - V)$ . Wszystkie prowadzone doświadczenia, w których próbowano podważyć równania Maxwella, dały wynik negatywny i

musimy uznać, że prędkość światła w próżni jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Rozpatrzmy teraz niektóre wnioski wynikające ze stałości prędkości światła, odkładając ściśle rozważanie tego zagadnienia do następnego wykładu.

### Dylatacja czasu

Załóżmy, że w rakiecie znajduje się przyrząd wysyłający impuls światła z punktu  $A$ , który następnie odbity przez lustro  $Z$ , odległe od  $A$  o  $d$  powraca do punktu  $A$ , gdzie jest rejestrowany. Czas  $\Delta t'$  jaki upływa między wysłaniem światła, a jego zarejestrowaniem przez obserwatora będącego w rakiecie jest oczywiście równy  $\Delta t' = 2d/c$  (patrz rysunek po lewej stronie). Teraz to samo zjawisko opisujemy z układu nieruchomego, względem którego rakietę porusza się w prawo z prędkością  $V$ . Chcemy, w tym układzie, znaleźć czas  $\Delta t$  przelotu światła z punktu  $A$  do zwierciadła i z powrotem do  $A$ . Jak widać na rysunku (po prawej stronie) światło przechodząc od punktu  $A$  do zwierciadła  $Z$  porusza się po linii o długości  $S$ :



$$S = \sqrt{\left(V \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + d^2} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{V}{c} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{2d}{c}\right)^2} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{V}{c} \Delta t\right)^2 + (\Delta t')^2} . \quad (29.2)$$

Zatem czas potrzebny na przebycie drogi  $AZA$  (tj. dwóch odcinków  $S$ ) wynosi:  $\Delta t = 2S/c$ . Z uwzględnieniem (29.2) znajdujemy:

$$\Delta t = \sqrt{\left(\frac{V}{c} \Delta t\right)^2 + (\Delta t')^2} .$$

Skąd

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (29.3)$$

Ze wzoru (29.3) wynika, że warunek stałości prędkości światła w różnych układach odniesienia może być spełniony tylko wtedy gdy, czas pomiędzy dwoma zdarzeniami obserwowanymi i mierzonymi z różnych układów odniesienia jest różny. A zatem, *każdy obserwator stwierdzi, że poruszający się zegar idzie wolniej niż identyczny zegar w spoczynku*. To zjawisko *dylatacji czasu* jest własnością samego czasu i dlatego spowolnieniu ulegają wszystkie procesy fizyczne gdy są w ruchu. Dotyczy to również reakcji chemicznych, więc i np. biologicznego starzenia się.

### Transformacja Lorentza i skrócenie długości

Jeżeli rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia  $K$  i  $K'$  i układ  $K'$  porusza się względem układu  $K$  ze stałą prędkością  $V$  wzdłuż osi  $Ox$  ( $Oy = Oy'$ ,  $Oz = Oz'$ ), to *wzory przekładające wyniki obserwacji jednego obserwatora na spostrzeżenia drugiego*, które uwzględniają stałość prędkości światła, mają postać

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (29.4)$$

Te równania noszą nazwę *transformacji Lorentza*. Łatwo sprawdzić, że jeżeli  $(V/c) \rightarrow 0$  przekształcenia Lorentza przechodzą w przekształcenia Galileusza (29.1).

Omówimy teraz niektóre wnioski wynikające z transformacji Lorentza. Jako przykład, rozważmy raketę, poruszającą się z prędkością  $V$ , wzdłuż osi  $Ox'$  i niech w tej rakiecie leży

pręt o długości  $L'$ . Znajdziemy jaką długość tego pręta zaobserwuje obserwator w układzie nieruchomym.

Załóżmy, że pomiar długości pręta polega na zarejestrowaniu dwóch zjawisk zachodzących równocześnie na końcach pręta (np. zapalenie się żarówek). Ponieważ żarówki zapalają się na końcach pręta to  $\Delta x = L'$ . Ponadto żarówki zapalają się w tym samym czasie (dla obserwatora w układzie spoczywającym) to dodatkowo  $\Delta t = 0$ . Uwzględniając te warunki otrzymujemy na podstawie transformacji Lorentza

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta x,$$

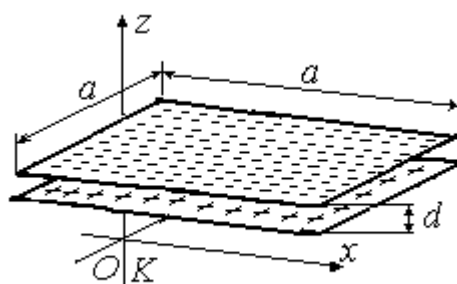
$\Delta x$  jest długością pręta  $L$  w układzie nieruchomym więc

$$\Delta x = L = L' \sqrt{1-\beta^2}. \quad (29.5)$$

Okazuje się więc, że ruchomy pręt ma mniejszą długość czyli jest krótszy.

### Pole elektromagnetyczne w różnych układach odniesienia

Omówimy teraz niektóre zjawiska elektromagnetyczne w różnych układach inercjalnych. Z doświadczeń z ruchomymi ładunkami elektrycznymi wynika, że ładunek elektryczny jest wielkością *inwariantną relatywistycznie*. Oznacza to, że wartość ładunku elektrycznego nie zależy od prędkości ładunku. Ta właściwość ładunku elektrycznego pociąga za sobą określone reguły przekształcenia pól elektromagnetycznych przy przejściu od jednego układu odniesienia do drugiego.



Rozważmy w nieruchomym układzie odniesienia  $K$  płaski kondensator, którego okładki są prostopadłe do osi  $Oz$ . Jeżeli wymiary liniowe płytek są duże w porównaniu z

odległością między okładkami kondensatora ( $a \gg d$ ), to pole elektrostatyczne między płytkami wynosi:

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \quad (29.6)$$

Tu  $\sigma$  jest gęstością powierzchniową ładunku na okładkach kondensatora.

Rozważmy teraz drugi układ odniesienia  $K'$ , poruszający się względem pierwszego układu z prędkością  $V$  wzdłuż osi  $Ox$ . W tym układzie odniesienia strony płytek kondensatora wzdłuż osi  $Ox$  będą zmniejszone, zgodnie z (29.5) do wielkości

$$a' = a \cdot \sqrt{1 - V^2 / c^2} .$$

Ponieważ całkowity ładunek okładek kondensatora nie zmienia się (zasada zachowania ładunku elektrycznego), dla gęstości powierzchniowej ładunku na okładkach kondensatora w układzie odniesienia  $K'$  otrzymujemy

$$\sigma' = \sigma / \sqrt{1 - V^2 / c^2} .$$

A zatem w układzie odniesienia  $K'$  gęstość powierzchniowa ładunku zwiększy się.

Stosując prawo Gaussa obserwator w układzie odniesienia  $K'$  otrzymuje, że

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \sqrt{1 - V^2 / c^2}} = \frac{E_z}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} . \quad (29.7)$$

Jeżeli rozważmy teraz układ odniesienia  $K''$ , poruszający się względem nieruchomego układu  $K$  z prędkością  $V$  wzdłuż osi  $Oz$ , to w układzie odniesienia  $K''$  gęstość powierzchniowa ładunku pozostaje nie zmienionej. Ponieważ natężenie pola elektrycznego między okładkami kondensatora nie zależy od  $d$ , skrócenie odległości między okładkami kondensatora nie powoduje zmiany natężenia pola kondensatora, a zatem

$$E''_z = \frac{\sigma''}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_z . \quad (29.8)$$

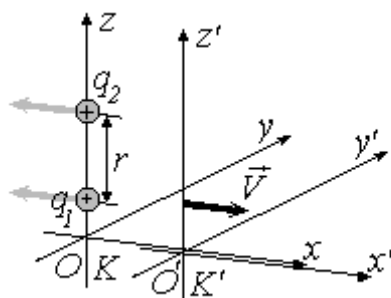
Ze wzorów (29.6) - (29.8) wynika, że wartość natężenia pola elektrycznego płaskiego kondensatora zależy od kierunku i wartości prędkości układu odniesienia w którym mierzymy pole elektryczne.

Rozważmy następny przykład. W inercyjnym układzie odniesienia  $K$  znajdują się dwa nieruchomych dodatnich ładunki  $q_1$  i  $q_2$ . W tym układzie między ładunkami działa zwykła siła Culomba. Siła z której pierwszy ładunek działa na drugi ładunek ma składowe:

$$\begin{aligned} F_{2x} = F_{2y} &= 0, \\ F_{2z} &= k \frac{q_1 q_2}{r^2} \equiv q_2 E_{1z} \end{aligned} \quad (29.9)$$

где  $E_{1z}$  jest natężeniem pola elektrycznego, które wytwarza pierwszy ładunek w miejscu gdy znajduje się drugi ładunek.

Przejdźmy teraz do układu inercyjnego  $K'$ , który porusza się względem układu  $K$  ze stałą prędkością  $\vec{V}$  wzdłuż osi  $Ox$ . W ruchomym inercyjnym układzie  $K'$  ładunki  $q_1$  i  $q_2$  poruszają się ze stałą prędkością  $-\vec{V}$ . Z kursu elektromagnetyzmu wiemy, że ruchomy ładunek  $q_1$  wytwarza pole magnetyczne o indukcji



$$\vec{B} = k' q_1 \frac{[(-\vec{V}) \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (29.10)$$

Tu wektor  $\vec{r}$  określa położenie ładunku  $q_2$  względem ładunku  $q_1$ .

Ponieważ  $\vec{r} \perp \vec{V}$  łatwo znaleźć, że pole magnetyczne będzie skierowane wzdłuż osi  $-Oy$  ( $B_x = B_z = 0$ ,  $B_y = -k' q_1 V / r^2$ ). Istnienie w układzie  $K'$  pola magnetycznego powoduje, że w tym układzie na ładunek  $q_2$  działa siła Lorentza

$$\vec{F}_L = q_2 \vec{E} + q_2 [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (29.11)$$

Tu  $\vec{v} = -\vec{V}$  jest prędkością ładunku w układzie odniesienia  $K'$ .

Łatwo wyliczyć, że drugi składnik we wzorze (29.11), czyli składowa magnetyczna siły Lorentza, ma kierunek przeciwny do pola kulombowskiego  $E$  i

$$F' \equiv |\vec{F}'_L| = q_2 E - q_2 V B = k \frac{q_1 q_2}{r^2} - k' \frac{q_1 q_2}{r^2} V^2. \quad (29.12)$$

Biorąc pod uwagę, iż  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , a  $k' = \mu_0/4\pi$  znajdujemy

$$k'/k = \mu_0\epsilon_0 = 1/c^2.$$

A zatem ze wzoru (29.12) otrzymujemy

$$F' \equiv |\vec{F}'_L| = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \quad (29.13)$$

Ze wzoru (29.13) wynika, że przy obecności ruchu ładunków siła wzajemnego ich oddziaływania maleje i przy  $V = c$  znika.

Z omówionych przykładów wynika, że wartości liczbowe natężenia pola elektrycznego i indukcji pola magnetycznego są różne w różnych inercjalnych układach odniesienia i w rzeczywistości oni są składowymi jednego pola - pola elektromagnetycznego.

Jeżeli rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia  $K$  i  $K'$  i układ  $K'$  porusza się względem układu  $K$  ze stałą prędkością  $\vec{V}$ , to transformacji składowych pola elektromagnetycznego, które są zgodne z przekształceniami Lorentza (29.4), określają zależności

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{V} \times \vec{B}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & \vec{B}'_{\perp} &= \frac{\vec{B}_{\perp} - [\vec{V} \times \vec{E}]/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (29.14)$$

We wzorach (29.14) znaki  $\parallel$  i  $\perp$  oznaczają równoległość lub prostopadłość danego wektora względem wektora prędkości  $\vec{V}$ .

Ze wzorów (29.14) natychmiast otrzymujemy bardzo interesujący wniosek - *pole magnetyczne jest skutkiem tego, że prędkość światła ma skończoną wartość*. Istotnie, rozważmy układ odniesienia  $K$  w którym ładunek elektryczny spoczywa. W tym układzie

odniesienia istnieje tylko pole elektrostatyczne Coulomba, a pole magnetyczne  $\vec{B} = 0$ . Wtedy w dowolnym ruchomym inercyjnym układzie odniesienia  $K'$ , jeżeliby prędkość światła  $c \rightarrow \infty$ , ze wzorów (29.14) znajdujemy, że  $\vec{B}' = 0$ .

Łatwo udowodnić, że przekształcenia (29.14) nie zmieniają dwie wielkości:

$$(\vec{E} \cdot \vec{B}) = \text{inv} , \quad (29.15)$$

$$E^2 - c^2 B^2 = \text{inv} . \quad (29.16)$$

### Czasoprzestrzeń Minkowskiego

Podstawą matematyczną szczególnej teorii względności jest tak zwana czasoprzestrzeń Minkowskiego.

Rozważmy w przestrzeni jakiś punktowe źródło fal świetlnych, które znajduje się w układzie odniesienia  $K$  w punkcie  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  i w chwili  $t_0$  emituje falę świetlną. W chwili  $t_0 + dt$  powierzchnia czoła fali w układzie odniesienia  $K$  będzie kulą

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = c^2 (dt)^2 . \quad (29.17)$$

Tu  $dx = x - x_0$ ,  $dy = y - y_0$ ,  $dz = z - z_0$  i  $x, y, z$  są współrzędne dowolnego punktu na powierzchni czoła fali w chwili  $t_0 + dt$ .

Zgodnie z niezależnością prędkości światła od wybranego układu odniesienia, w drugim inercyjnym układzie odniesienia  $K'$  czoła tej samej fali również będzie powierzchnią kuli

$$(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = c^2 (dt')^2 . \quad (29.18)$$

Z porównania wzorów (29.17) i (29.18) widzimy, że wielkość

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = 0 \quad (29.19)$$

nie zależy od wybranego układu odniesienia i jest równa zero dla fal świetlnych.

Podstawowym założeniem teorii relatywistycznej jest założenie, że wielkość

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \text{const} \quad (29.20)$$

jest wielkością inwariantną nie zależną od wybranego inercyjnego układu odniesienia.



Wielkość  $(ds)^2$  nazywa się *przedziałem czasoprzestrzennym dwóch nieskończenie bliskich zdarzeń* i ma prostą interpretację, jeżeli wprowadzić *czterowymiarową przestrzeń Minkowskiego*. W abstrakcyjnej przestrzeni Minkowskiego oprócz trzech przestrzennych kartezjańskich osi współrzędnych dodajemy jeszcze jedną oś czasową. Zakładamy, iż w przestrzeni Minkowskiego istnieją cztery jednostkowy wektory  $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  takie, że

$$g_{\mu\nu} \equiv (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) = \begin{cases} +1 & \text{dla } \mu = \nu = 0, \\ -1 & \text{dla } \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{dla } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (29.21)$$

Wielkości  $g_{\mu\nu}$  noszą nazwę składowych *tensora metrycznego*.

Wektory  $\vec{e}_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  oraz wybrany początek układu  $O$  tworzą bazę ortonormalną i położenie dowolnego punktu w przestrzeni Minkowskiego można przedstawić za pomocą czterowymiarowego wektora (*czterowektora*) wodzącego

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= ct \cdot \vec{e}_0 + x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \\ &\equiv x_0 \cdot \vec{e}_0 + x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (29.22)$$

Wzdłuż osi czasowej odkładamy  $(ct)$  dla tego, żeby wszystkie współrzędne miały wymiar długości. Ze wzorów (29.21) i (29.22) otrzymujemy, że jeżeli rozważmy oprócz czterowektora (29.22) czterowektor

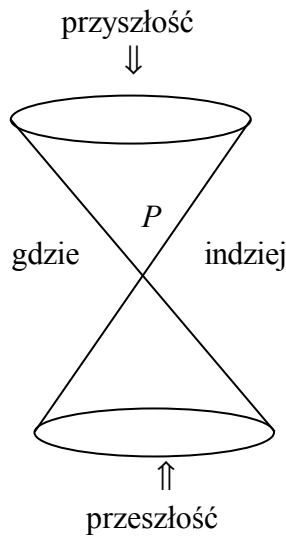
$$\vec{\rho} + d\vec{s} = c(t + dt) \cdot \vec{e}_0 + (x + dx) \cdot \vec{e}_1 + (y + dy) \cdot \vec{e}_2 + (z + dz) \cdot \vec{e}_3, \quad (29.23)$$

to kwadrat odległości między dwoma punktami albo iloczyn skalarny  $(d\vec{s} \cdot d\vec{s})$  wynosi

$$\begin{aligned} (ds)^2 &\equiv d\vec{s} \cdot d\vec{s} = dx_\mu g_{\mu\nu} dx_\nu \\ &= c^2 dt^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \end{aligned} \quad (29.24)$$

Z porównania wzorów (29.20) i (29.24) widzimy, że przedział czasoprzestrzenny jest po prostu kwadrat odległości w przestrzeni Minkowskiego dwóch nieskończenie bliskich zdarzeń.

W odróżnieniu od zwykłej przestrzeni Euklidesa, dla której kwadrat długości wektora musi być zawsze dodatni, dla przestrzeni Minkowskiego kwadraty wektorów mogą mieć dowolny znak.



Ze względu na znak kwadratu długości czterowektory w przestrzeni Minkowskiego dzielimy na:

wektory czasowe ( $(ds)^2 > 0$ ),

wektory zerowe ( $(ds)^2 = 0$ ),

wektory przestrzenne ( $(ds)^2 < 0$ ).

Wektory zerowe znajdują się na powierzchni stożka, który nazywamy *stożkiem świetlnym pewnego zdarzenia P* (zdarzenie *P* znajduje się w początku stożka). Jeżeli w *P* znajduje się źródło światła, to promieni świetlne będą rozchodzić się w czasie wzdłuż powierzchni stożka świetlnego w przód (do góry, jeżeli oś czasowa jest skierowana do góry). Stożek świetlny dzieli wszystkie zdarzenia względem *P* na trzy obszary (patrz rysunek). Obszary dwóch składowych stożka (górny i dolny) dzielimy na *przyszłość* (górną część stożka) i *przeszłość* (dolną część stożka). Wszystkie zdarzenia rzeczywiste, czyli zdarzenia dla których prędkość światła jest maksymalną prędkością, znajdują się wewnątrz stożka świetlnego. Dla wektorów czasowych:  $c^2(dt)^2 > (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ . Zdarzenia znajdujące się poza stożkiem świetlnym zdarzenia *P* nazywamy zdarzeniami *przestrzennymi*. Zdarzenia przestrzenne nie są związane przyczynowo ze zdarzeniem *P*, ponieważ dla nich  $c^2(dt)^2 < (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ . Obszar poza stożkiem nosi nazwę *gdzie indziej*.

### Czas własny i efekt dylatacji czasu

Jeżeli jako układ  $K'$  rozważmy układ sztywne związany z poruszającą się cząstką, to zgodnie z (29.20) mamy

$$c^2(dt)^2 - (dl)^2 = c^2(dt')^2 = (ds)^2 = const . \quad (29.25)$$

Tu  $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ . Uwzględniając, iż  $(dl)^2 = (\bar{v} \cdot dt)^2 = v^2 \cdot (dt)^2$ , gdzie  $\bar{v}$  jest prędkością cząstki w układzie odniesienia  $K$ , ze wzoru (29.25) otrzymujemy, że

$$t' = \frac{1}{c} \int ds = const \quad (29.26)$$

oraz

$$t' = t \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = const , \quad (29.27)$$

gdzie

$$\beta = \frac{v}{c} . \quad (29.28)$$

Ze wzoru (29.27) wynika, że czas  $t'$  ma wyróżnione znaczenie: ten czas obliczony według wzoru (29.27) nie zależy od żadnego obserwatora inercyjnego, chociaż każdy z obserwatorów będzie miał swój czas  $t$ , a prędkość cząstki  $v$  względem różnych układów będzie różna. Czas  $t'$  nazywamy *czasem własnym* i będziemy oznaczali ten czas literą  $\tau$ . Ze wzoru (29.27) wynika, że czas własny ruchomej cząstki „płynie” wolniej niż czas  $t$  mierzony w układzie odniesienia  $K$ . Efekt zmniejszenia tempa upływu czasu w układzie ruchomym nosi nazwę *dylatacji czasu*. Ze wzoru (29.27) wynika, że dla światła ( $v = c$ ) czas „własny” w ogóle „nie płynie”.

### Przekształcenia Poincarégo i Lorentza

Wektory  $\vec{e}_\mu$ ,  $\mu = 0,1,2,3$  w przestrzeni Minkowskiego możemy wybrać w dowolny sposób, tak samo jak dowolny jest wybór osi współrzędnych w przestrzeni Euklidesa. Rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia  $K$  (baza  $(O; \{\vec{e}_\mu\})$ ) i układ odniesienia  $K'$  (baza  $(O'; \{\vec{e}'_\mu\})$ ). Niech czterowektory wodzące pewnego zdarzenia  $P$  w przestrzeni

Minkowskiego mają w układzie odniesienia  $K$  współrzędne  $x_\mu$  i współrzędne  $x_{\mu'}$  w układzie odniesienia  $K'$ . Korzystając z reguły dodawania wektorów, możemy napisać

$$\vec{\rho} = \vec{o} + \vec{\rho}' , \quad (29.29)$$

gdzie  $\vec{\rho}$  i  $\vec{\rho}'$  są to czterowektory wodzące punktu  $P$  w układach odniesienia  $K$  i  $K'$ . Wektor  $\vec{o}$  jest czterowektorem wodzącym początku układu  $O'$  w układzie odniesienia  $K$ . Wektory drugiej bazy zawsze możemy wyrazić przez wektory pierwszej bazy

$$\vec{e}_{\mu'} = L_{0\mu'} \cdot \vec{e}_0 + L_{1\mu'} \cdot \vec{e}_1 + L_{2\mu'} \cdot \vec{e}_2 + L_{3\mu'} \cdot \vec{e}_3 \equiv L_{\alpha\mu'} \cdot \vec{e}_\alpha . \quad (29.30)$$

Tu i dalej dla prostoty zapisu będziemy stosować umowę Einsteina o sumowaniu.

Korzystając ze wzorów (29.29) i (29.30) mamy

$$x_\beta \cdot \vec{e}_\beta = o_\beta \cdot \vec{e}_\beta + L_{\alpha\mu'} x_{\mu'} \cdot \vec{e}_\alpha .$$

Skąd

$$x_\beta = o_\beta + L_{\beta\mu'} x_{\mu'} . \quad (29.31)$$

Wzór (29.31) określa transformację współrzędnych  $x_\beta$  i  $x_{\mu'}$  przy przejściu od jednego układu odniesienia do innego układu. To przekształcenie nazywa się *przekształceniem Poincarégo*. Jeżeli  $o_\beta = 0$  (co ma miejsce gdy  $O = O'$ ) przekształcenie (29.31) nazywa się *przekształceniem Lorentza*. Dla przekształcenia Lorentza składowe 4 – wymiarowego wektora wodzącego spełniają równanie

$$x_\beta = L_{\beta\mu'} x_{\mu'} . \quad (29.32)$$

Rozważmy teraz spośród przekształceń Lorentza takie przekształcenia które zachowują długości przedziału czasoprzestrzennego

$$(d\vec{s} \cdot d\vec{s}) = (d\vec{s}' \cdot d\vec{s}') . \quad (29.33)$$

Korzystając ze wzorów (29.24) i (29.32), wzór (29.33) możemy zapisać w postaci

$$g_{\mu'\nu'} dx_{\mu'} dx_{\nu'} = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = (g_{\mu\nu} L_{\mu\mu'} L_{\nu\nu'}) dx_{\mu'} dx_{\nu'} . \quad (29.34)$$

Skąd mamy

$$g_{\mu'v'} = g_{\mu\nu} L_{\mu\mu'} L_{\nu\nu'} . \quad (29.35)$$

Ze wzoru (29.35) wynika, że nie wszystkie elementy macierzy przekształcenia  $L_{\mu\mu'}$  są niezależne. Istotnie w jawnej postaci warunek (29.35) oznacza, iż

$$(L_{00'})^2 - (L_{10'})^2 - (L_{20'})^2 - (L_{30'})^2 = 1, \quad \mu' = \nu' = 0 , \quad (29.36a)$$

$$(L_{0\mu'})^2 - (L_{1\mu'})^2 - (L_{2\mu'})^2 - (L_{3\mu'})^2 = -1, \quad \mu' = \nu' = 1,2,3 , \quad (29.36b)$$

$$L_{\mu\mu'} g_{\mu\nu} L_{\nu\nu'} = 0, \quad \mu' \neq \nu' . \quad (29.36c)$$

Korzystając z twierdzenia, iż wyznacznik z iloczynu macierzy jest równy iloczynowi wyznaczników, ze wzoru (29.35) otrzymujemy

$$\det(g_{\mu'v'}) = \det(g_{\mu\nu}) \cdot [\det(L_{\mu\mu'})]^2 . \quad (29.37)$$

Jednak, zgodnie z (29.21)

$$\det(g_{\mu'v'}) = \det(g_{\mu\nu}) = -1 ,$$

a zatem ze wzoru (29.37) otrzymujemy, iż

$$\det(L_{\mu\mu'}) = \pm 1 . \quad (29.38)$$

W zależności od znaku wyznacznika  $\det(L_{\mu\mu'})$  przekształcenia Lorentza dzielimy na dwa podzbiory. Przekształcenia dla których  $\det(L_{\mu\mu'}) = +1$  nazywamy *właściwymi przekształceniami Lorentza*. Właściwe przekształcenia zachowują orientację w wektorowej przestrzeni Minkowskiego. Przekształcenia dla których  $\det(L_{\mu\mu'}) = -1$  nazywamy *niewłaściwymi przekształceniami Lorentza*.

Ze wzoru (29.37a) wynika, że  $(L_{00'})^2 \geq 1$ . A więc mogą zaistnieć dwa przypadki:  $L_{00'} \geq 1$  lub  $L_{00'} \leq -1$ . Jeżeli  $L_{00'} \geq 1$ , to przekształcenie Lorentza zachowuje orientację czasową wektorów: wektory skierowane ku przyszłości (czasowe i zerowe) po przekształceniu Lorentza pozostają wektorami skierowanymi ku przyszłości. Natomiast wektory skierowane ku przeszłości po przekształceniu pozostają skierowane ku przeszłości.

Jeżeli  $L_{00'} \leq -1$ , to przekształcenie Lorentza „łączy” wektory skierowane ku przyszłości (albo przeszłości) z wektorami skierowanymi ku przeszłości (albo przyszłości).

Zatem w zależności od znaku  $L_{00'}$ , oraz znaku  $\det(L_{\mu\mu'})$ , przekształcenia Lorentza nazywamy:

1) *właściwym, zachowującym kierunek czasu* –

$$L_{00'} \geq 1, \det(L_{\mu\mu'}) = 1;$$

2) *właściwym, niezachowującym kierunek czasu (odbiciem zupełnym)* –

$$L_{00'} \leq -1, \det(L_{\mu\mu'}) = 1;$$

3) *niewłaściwym, niezachowującym kierunek czasu (odbiciem czasowym)* –

$$L_{00'} \leq -1, \det(L_{\mu\mu'}) = -1;$$

4) *niewłaściwym, zachowującym kierunek czasu (odbiciem przestrzennym)* –

$$L_{00'} \geq 1, \det(L_{\mu\mu'}) = -1.$$