Wykład 8

Dynamika ośrodków sprężystych

Fale mechaniczne

Fale powstające w ośrodkach sprężystych (np. fale dźwiękowe) nazywamy *falami mechanicznymi*. Powstają one w wyniku wychylenia jakiegoś fragmentu ośrodka z położenia równowagi, co w następstwie powoduje drgania fragmentu wokół tego położenia. Drgania te (dzięki właściwościom sprężystym ośrodka) są przekazywane na kolejne części ośrodka. Sam ośrodek nie przesuwa się, a jedynie jego elementy wykonują drgania w ograniczonych obszarach przestrzeni. Np. fale na powierzchni wody: przedmioty pływające wykonują ruch drgający natomiast same fale poruszają się ruchem jednostajnym. Fala dobiegające do danego przedmiotu wprawiają go w ruch drgający przekazując mu energię. Można za pomocą fal przekazywać więc energię na duże odległości. Energia fal to energia kinetyczna i potencjalna cząstek ośrodka.

Cechą charakterystyczną fal jest to, że przenoszą oni energię poprzez materię dzięki przesuwaniu się zaburzenia w materii a nie dzięki ruchowi postępowemu samej materii. Do rozchodzenia się fal mechanicznych potrzebny jest ośrodek. To właściwości sprężyste ośrodka decydują o prędkości rozchodzenia się fali. Ze względu na kierunek drgań cząstek względem kierunku rozchodzenia się fali, rozróżniamy

- fale poprzeczne (np. lina);
- fale podłużne (np. sprężyna, głos).

Ze względu na czoło fali (powierzchnia łącząca punkty o jednakowych zaburzeniach w danej chwili) wyróżniamy

- fale płaskie (w jednym kierunku);
- fale kuliste.

Fale rozchodzące się w przestrzeni

Rozważmy długi sznur naciągnięty w kierunku *x*, wzdłuż którego biegnie fala poprzeczna. W dowolnej chwili np. $t = 0$ kształt sznura można opisać funkcją $y(x) = f(x)$, gdzie y – przemieszczenie cząsteczek sznura wzdłuż osi Oy. Przypuśćmy, że w miarę upływu czasu fala biegnie wzdłuż sznura bez zmiany kształtu w prawo, czyli w stronę wzrostu x. Wtedy, po czasie t fala przesuwa się o υt w prawo (gdzie υ - prędkość fali) i po czasie t równanie krzywej ma postać

$$y(x) = f(x - \upsilon t) \; . \tag{8.1}$$

Oznacza to, że w chwili t w punkcie $x = \upsilon t$, kształt fali jest taki sam jak w chwili t = 0 w punkcie x = 0. Równanie (8.1) jest więc równaniem fali rozchodzącej się w prawą stronę sznura. Kształt fali określa funkcja $f(x - \upsilon t)$.

Fala rozchodząca się w lewą stronę, czyli w stronę mniejszych x - ów, określa wzór

$$y(x) = f(x + \upsilon t) \; . \tag{8.2}$$

Istotnie. ze wzoru (8.2) wynika, że w chwili t w punkcie $x = -\upsilon t$, kształt fali jest taki sam jak w chwili t = 0 w punkcie x = 0.

Przypuśćmy, że śledzimy wybraną część fali, czyli określoną fazę fali, dla której argument funkcji $f(x - \upsilon t)$ jest stały

$$x - \upsilon t = const \; . \tag{8.3}$$

Różniczkując (8.3) względem czasu otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon \; . \tag{8.4}$$

Prędkość υ określa, więc prędkość, z którą punkt mający określone wychylenie (określoną fazę) porusza się wzdłuż sznura. Jest to tak zwana *prędkość fazowa*. Zauważmy, że dla danego t równanie fali określa funkcja $f(x)$, a dla danego miejsca sznura x równanie też fali określa funkcja $f(t)$.

Rozważmy teraz fale o szczególnym kształcie. Załóżmy, że w chwili t = 0 kształt sznura jest opisany funkcją

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \; , \tag{8.5}$$

gdzie A jest maksymalnym wychyleniem. Zauważmy, że wychylenie jest takie samo w punktach x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, $x + 3\lambda$ itd. Wielkość λ nazywamy *długością fali* (odległość między punktami o tej samej fazie). Jeżeli fala biegnie w prawo to po czasie t

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - \upsilon t) \; . \tag{8.6}$$

Okres T jest czasem, w którym fala przebiega odległość równą λ więc:

$$\lambda = \upsilon \cdot T \ ,$$

stąd

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) . \tag{8.7}$$

Ze wzoru (8.7) widać, że w danej chwili taka sama faza jest w punktach x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, $x + 3\lambda$ itd., oraz, że w danym miejscu faza powtarza się w chwilach t, $t + T$, $t + 2T$, itd.

Często przy rozważaniu zjawisk falowych w fizyce wprowadza się dwie nowe wielkości: liczbę falową $k = 2\pi/\lambda$ i częstość kątową $\omega = 2\pi/T$. Wówczas $y = A\sin(kx - \omega t)$ lub $y = A\sin(kx + \omega t)$ dla fal biegnących w prawo i lewo.

Widać, że prędkość fazowa fali v jest dana wzorem

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k} \ . \tag{8.8}$$

Rozchodzenie się fal, prędkość fal

Jeżeli chcemy zmierzyć prędkość fali υ to śledzimy jak przemieszcza się w czasie *wybrana część fali*, czyli *określona faza*.

Wiemy, że prędkość fali zależy od sprężystości ośrodka i jego bezwładności. Sprężystość dla struny jest określona poprzez napinającą go siłę F (np. im większa siła tym szybciej wychylone elementy struny wracają do położenia równowagi). Natomiast bezwładność jest związana z masą struny m oraz jego długością l. Spróbujemy teraz wyprowadzić wzór na zależność prędkości υ fali od siły F i od $\mu = m/l$, tj. masy przypadającej na jednostkę długości struny. W tym celu rozpatrzmy mały wycinek struny o długości dx pokazany na rys.8.1. Końce wycinka struny tworzą z osią x małe kąty θ_1 i θ_2. Dla małych kątów $\theta \cong \sin\theta \cong$ dy/dx. Wypadkowa pionowa siła tj. siła wychylająca sznur w kierunku osi y wynosi

$$F_{wyp} = F \sin\theta_2 - F \sin\theta_1 = F\theta_2 - F\theta_1$$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki siła wypadkowa jest równa iloczynowi masy wycinka d$m = \mu \cdot$dx i jego przyspieszenia.

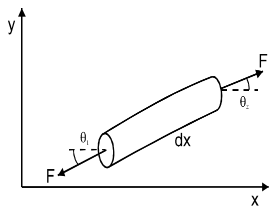
Stąd

$$F_{wyp} = F\theta_2 - F\theta_1 = (\mu dx) \frac{\partial \upsilon_y}{\partial t} = (\mu dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

lub

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad . \tag{8.9}$$

(Uwaga: w równaniach piszemy pochodne cząstkowe oznaczane symbolem ∂y bo wychylenie y jest funkcją dwóch zmiennych $y = f(x,t)$ i liczymy pochodne zarówno względem zmiennej x jak i zmiennej t).



Rys.8.1. Drgania struny.

Uwzględniając, że $\theta = \partial y/\partial x$ otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad . \tag{8.10}$$

Jest to *równanie falowe* dla struny (sznura). Podstawmy teraz do tego równania odpowiednie pochodne funkcji $y = f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t) \ ,$$

oraz

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \sin(kx - \omega t) \ .$$

W wyniku podstawienia otrzymujemy

$$k^2 = \frac{\mu}{F}\omega^2 \ ,$$

skąd możemy obliczyć prędkość fali

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ . \tag{8.11}$$

Zwróćmy uwagę, że sinusoidalna fala może być przenoszona wzdłuż struny z prędkością niezależną od amplitudy i częstotliwości.

Jeżeli teraz przepiszemy równanie struny w postaci

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ , \tag{8.12}$$

to otrzymamy *równanie falowe*, które stosuje się do wszystkich rodzajów rozchodzących się fal, takich jak fale dźwiękowe czy elektromagnetyczne.

Przenoszenie energii przez fale

Szybkość przenoszenia energii wyznaczymy obliczając pracę siły F, jaka działa na koniec struny (siła ta porusza struną w górę i w dół w kierunku y). W tym celu posłużymy się zależnością na moc

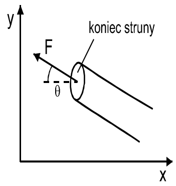
$$P = F_y \cdot \upsilon_y \ . \tag{8.13}$$

Jak widać z rysunku prędkość poprzeczna równa jest $\upsilon_y = \partial y / dt$, a składowa siły F w kierunku y wynosi $F\sin\theta$. Podstawiając to do równania (8.13) otrzymujemy

$$P = F\frac{\partial y}{\partial t}\sin\theta \ . \tag{8.14}$$

Dla małych kątów θ możemy przyjąć, że $\sin\theta \cong -\partial y/\partial x$ (znak minus wynika z ujemnego nachylenia struny). Stąd

$$P = -F\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x} \ . \tag{8.15}$$



Rys. 8.2. Energia przenoszona przez fale

Obliczamy teraz pochodne funkcji $y = f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak\cos(kx - \omega t).$$

Po podstawieniu tych wzorów do (8.15) znajdujemy

$$P = FA^2 k\omega\cos^2(kx - \omega t) \ . \qquad (8.16)$$

Zauważmy, że moc, czyli szybkość przepływu energii oscyluje w czasie. Korzystając z tego, że $k = \omega/\upsilon$, $\omega = 2\pi\nu$ oraz, że $\upsilon = \sqrt{F/\mu}$ otrzymujemy

$$P = 4\pi^2 A^2 \nu^2 \mu\upsilon\cos^2(kx - \omega t) \ . \qquad (8.17)$$

Widzimy, że szybkość przepływu energii jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy i kwadratu częstotliwości. Ta zależność jest prawdziwa dla wszystkich typów fal.

Interferencja fal

Rozważmy dwie fale o równych częstotliwościach i amplitudach, ale o fazach różniących się o φ. Równania tych fal są następujące

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t - \varphi) \ ,$$

$$y_2 = A\sin(kx - \omega t) \ .$$

Znajdźmy teraz falę wypadkową jako sumę $y = y_1 + y_2$. Korzystając ze wzoru na sumę sinusów ($\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$) otrzymujemy

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin(kx - \omega t - \varphi/2) \ , \qquad (8.18)$$

co jest równaniem fali sinusoidalnej o amplitudzie $2A\cos(\varphi/2)$. Dla $\varphi = 0$ fale spotykają się zgodnie w fazie (wzmacniają), a dla $\varphi = 180$ wygaszają.

Fale stojące

Rozważmy teraz dwa ciągi falowe biegnące w przeciwnych kierunkach tzn.

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \ ,$$

$$y_2 = A\sin(kx + \omega t) \ ,$$

np. falę padającą i odbitą.

Falę wypadkową można zapisać jako

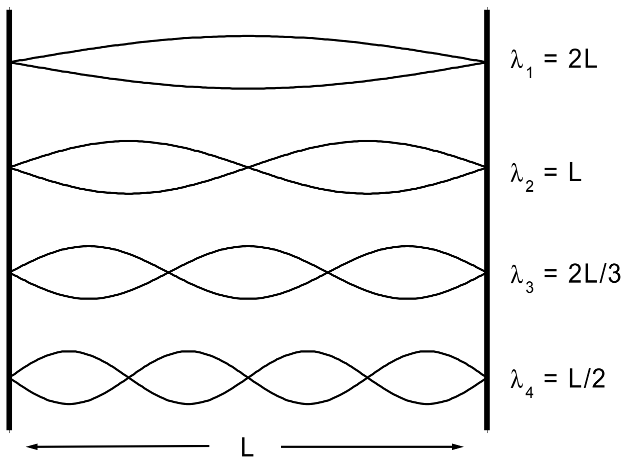
$$y = y_1 + y_2 = 2A\sin(kx)\cos(\omega t) \ . \qquad (8.19)$$

To jest równanie tak zwanej *fali stojącej*. Zauważmy, że cząstki drgają ruchem harmonicznym prostym. Cząstki mają tę samą częstość, ale *różną amplitudę* zależną od położenia cząstki x. Punkty $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$, itd., czyli $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4$ itd. mające maksymalną amplitudę nazywamy *strzałkami*, a punkty $kx = \pi, 2\pi, 3\pi$ itd. czyli $x = \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2$ itd. mające zerową amplitudę nazywamy *węzłami*.

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną istotną różnicę. W przypadku fali stojącej, *energia nie jest przenoszona* wzdłuż struny (sznura), bo nie może ona przepłynąć przez węzły, jest na stałe zmagazynowana w poszczególnych elementach struny (sznura).

Układy drgające, przykład

Jeżeli struna zamocowana na obu końcach zostanie najpierw wygięta a następnie puszczona, to wzdłuż struny rozchodzą się drgania poprzeczne. Zaburzenia te odbijają się od zamocowanych końców i w wyniku interferencji powstaje fala stojąca. Zwróćmy uwagę, że drgania struny wytwarzają w otaczającym strunę powietrzu dźwiękowe fale podłużne (fale akustyczne). Ponieważ jedynym warunkiem, jaki musi być spełniony, jest nieruchomość obu końców struny, czyli istnienie węzłów fali stojącej na tych końcach, to mogą powstać w tej strunie fale stojące o różnej długości. Pierwsze cztery rodzaje drgań, jakie powstają w strunie o długości L zamocowanej na końcach są pokazane na rys.8.3. Takie fale stojące nazywamy *rezonansami*.



Rys.8.3. Rezonanse

Widzimy, że długości fal spełniają związek

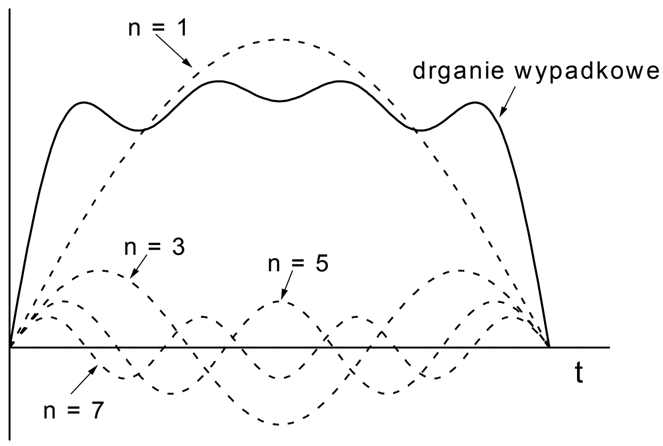
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad . \tag{8.20}$$

Korzystając z tego, że prędkość fali $\upsilon = \lambda/T = \lambda\nu$ oraz podstawiając wyrażenie (8.11) możemy obliczyć częstotliwość rezonansów:

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\upsilon = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad . \tag{8.21}$$

Najniższą częstość nazywamy *częstością podstawową* a pozostałe *wyższymi harmonicznymi* czyli *alikwotami*.

Zazwyczaj w drganiach występują, oprócz drgania podstawowego, również drgania harmoniczne, a dźwięki, jakie odbieramy są wynikiem nakładania się tych drgań. O jakości instrumentu (jego barwie) decyduje właśnie to ile alikwotów jest zawarte w dźwięku i jakie są ich natężenia.

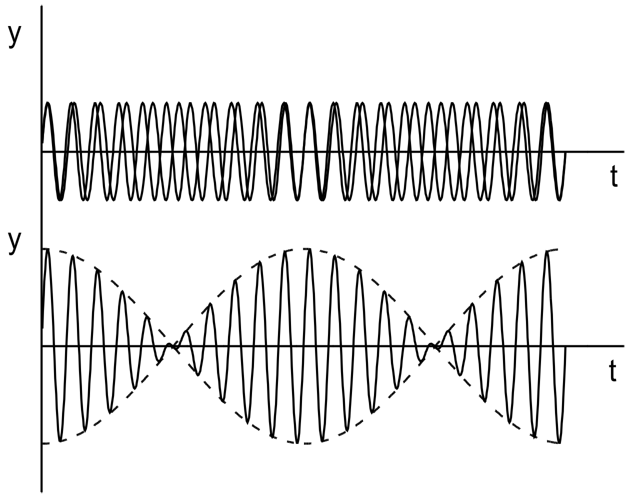


Rys.8.4. Drganie wypadkowe struny będące złożeniem tonu podstawowego (n = 1) i wyższych harmonicznych (n = 3, 5, 7) o różnych amplitudach.

Przykładowo, drganie wypadkowe struny będące złożeniem tonu podstawowego (n = 1) i wyższych harmonicznych (n = 3, 5, 7) o różnych amplitudach jest pokazane na rys. 8.4. Zwróćmy uwagę, że wypadkowe drganie (chociaż okresowe) nie jest harmoniczne (nie daje się opisać funkcją sinus lub cosinus).

Dudnienia - modulacja amplitudy

Mówiliśmy już o superpozycji fal, *interferencji w przestrzeni* (dodawanie fal o tej samej częstości). Rozpatrzmy teraz przypadek *interferencji w czasie*. Pojawia się ona, gdy przez dany punkt w przestrzeni przebiegają w tym samym kierunku fale o trochę różnych częstotliwościach. Wychylenie wywołane przez jedną falę ma postać



Rys.8.5. Dudnienia.

$$y_1 = A\cos(\omega_1 t) \ ,$$

$$y_2 = A\cos(\omega_2 t) \ ,$$

więc

$$y = y_1 + y_2 = \left[2A\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)\right]\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t \ . \tag{8.22}$$

Drgania wypadkowe można więc uważać za drgania o częstości

$$\omega_{srednie} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \ ,$$

która jest średnią dwóch fal, i o amplitudzie (wyrażenie w nawiasie kwadratowym) zmieniającej się w czasie z częstością

$$\omega_{ampl} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad .$$

Jeżeli częstotliwości ω_1 i ω_2 są bliskie siebie to amplituda zmienia się powoli. Mówimy, że mamy do czynienia z modulacją amplitudy AM (stosowana np. w odbiornikach radiowych). Dla fal dźwiękowych AM przejawia się jako zmiana głośności nazywana *dudnieniami* (rys.8.5).

Zjawisko Dopplera

Austriak, Christian Doppler w pracy z 1842 r zwrócił uwagę, że barwa świecącego ciała (częstotliwość) musi się zmieniać z powodu ruchu względnego obserwatora lub źródła. Zjawisko Dopplera występuje dla wszystkich fal. Obecnie rozważymy je dla fal dźwiękowych. Zajmiemy się przypadkiem ruchu źródła i obserwatora wzdłuż łączącej ich prostej.

Źródło dźwięku spoczywa, a obserwator porusza się w kierunku źródła z prędkością υ_O. Nieruchomy obserwator odbierał by $\upsilon t/\lambda$ fal w czasie *t*. Teraz odbiera jeszcze dodatkowo $\upsilon_O t/\lambda$ fal. Częstość słyszana przez obserwatora wynosi

$$v' = \frac{\frac{\upsilon t}{\lambda} + \frac{\upsilon_O t}{\lambda}}{t} = \frac{\upsilon + \upsilon_O}{\lambda} = \frac{\upsilon + \upsilon_O}{\frac{\upsilon}{v}} \quad .$$

Skąd

$$v' = v\frac{\upsilon + \upsilon_O}{\upsilon} \quad . \tag{8.23}$$

Rozważając pozostałe przypadki otrzymujemy ogólną zależność

$$v' = v\left(\frac{\upsilon \pm \upsilon_O}{\upsilon \mp \upsilon_z}\right), \tag{8.24}$$

gdzie v' - częstość odbierana przez obserwatora, v - częstość źródła, υ - prędkość fali, υ_0 - prędkość obserwatora, υ_z - prędkość źródła.

Znaki "górne" w liczniku i mianowniku odpowiadają zbliżaniu się, a znaki dolne oddalaniu się obserwatora i źródła.