Wykład 7

Ruch w układach nieinercjalnych

Prawa Newtona są słuszne jedynie w układach inercjalnych. W praktyce jednak często spotykamy się również z układami nieinercjalnymi. Dlatego żeby otrzymać równania ruchu w nieinercjalnym układzie musimy przyjąć za punkt wyjścia równania Newtona, które zawierają masy i przyspieszenia punktów materialnych, jak również siły, które działają na punkty w inercjalnym układzie. Masy punktów i czas w mechanice nierelatywistycznej są niezmiennicze przy przejściu z jednego układu współrzędnych do drugiego. Natomiast siły, oraz przyspieszenia zależą od układu współrzędnych. Tak, więc aby wyprowadzić równania ruchu w nieinercjalnych układach odniesienia musimy przede wszystkim zbadać, jak przekształcają się współrzędne, prędkości i przyspieszenia przy przejściu od jednego układu odniesienia do drugiego.

Położenie, prędkość i przyspieszenie punktu materialnego względem różnych układów odniesienia

Rozważmy dwa układy odniesienia K i $K^{/}$ i niech układ K będzie nieruchomym układem, a układ $K^{/}$ porusza się względem nieruchomego układu K. Oznaczmy przez $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ bazę układu K, a przez $\vec{e}_1^{/}$, $\vec{e}_2^{/}$, $\vec{e}_3^{/}$ - jednostkowe wektory wzdłuż osi współrzędnych kartezjańskiego ruchomego układu $K^{/}$. Jeżeli położenie dowolnego punktu P w przestrzeni określa w układzie $K^{/}$ wektor $\vec{r}^{/}$, a w układzie K - wektor $\vec{r}$, to

$$\vec{r} = \vec{R}_{0^{/}} + \vec{r}^{/} \ , \tag{7.1}$$

gdzie wektor $\vec{R}_{O^{/}}$ określa położenie początku $O^{/}$ układu $K^{/}$ względem układu K. Jeżeli w kolejnych chwilach czasu układ $K^{/}$ zmienia swoje położenie względem układu K w sposób zupełnie dowolny, to pochodne, względem czasu będą się w obu układach różnić, mimo, że czas płynie w tych układach identycznie. Istotnie, różnica polega na tym, iż przy obliczeniu na przykład prędkości punktu P w układzie K musimy obliczyć

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3 \ , \tag{7.2}$$

przy stałych (nie zależnych od czasu) wektorach jednostkowych $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Natomiast przy obliczeniu prędkości tego samego punktu P w ruchomym układzie K' musimy obliczyć

$$\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt} = \frac{d'x'}{dt}\vec{e}_1' + \frac{d'y'}{dt}\vec{e}_2' + \frac{d'z'}{dt}\vec{e}_3' \ , \tag{7.3}$$

przy stałych „primowanych" wektorach jednostkowych $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$.

Dla tego, żeby podkreślić różnicę między różniczkowaniem w układzie K' od różniczkowania w układzie K będziemy oznaczali symbolem (d'/dt) - różniczkowanie w K' i (d/dt) - różniczkowanie w K.

Znajdziemy teraz związek między $\vec{v}$ i $\vec{v}'$. Korzystając ze wzoru (7.1) otrzymujemy

$$\vec{v} = \vec{V}_{0'} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \ , \tag{7.4}$$

gdzie

$$\vec{V}_{0'} = \frac{d\vec{R}_{0'}}{dt}$$

jest to prędkość początku układu K' względem układu K.

Dla drugiego wyrazu w (7.4), biorąc pod uwagę, że $\vec{r}' = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + z'\vec{e}_3'$, znajdujemy

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = [\frac{dx'}{dt}\vec{e}_1' + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_2' + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_3'] + [x'\frac{d\vec{e}_1'}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_2'}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_3'}{dt}] \ . \tag{7.5}$$

Pierwszy wyraz w nawiasie w (7.5) oblicza się przy stałych „primowanych" wektorach jednostkowych $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$, a więc zgodnie z umową jest to po prostu $\vec{v}'$, tj. prędkość punktu w układzie K'. Dla obliczenia drugiego wyrazu w (7.5) skorzystamy z tego, że baza $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ jest ortonormalna, czyli

$$(\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j') = \delta_{ij} \ , \tag{7.6}$$

gdzie δ_{ij} - symbol Kroneckera.

Różniczkując (7.6) względem czasu w układzie nieruchomym K otrzymujemy

$$(\vec{e}_i^{\,/} \cdot \frac{d\vec{e}_j^{\,/}}{dt}) + (\frac{d\vec{e}_i^{\,/}}{dt} \cdot \vec{e}_j^{\,/}) = 0 \quad . \tag{7.7}$$

Zapiszmy teraz wektor $d\vec{e}_i^{\,/} / dt$ jako kombinację wektorów $\vec{e}_1^{\,/}$, $\vec{e}_2^{\,/}$, $\vec{e}_3^{\,/}$

$$\frac{d\vec{e}_i^{\,/}}{dt} = b_{i1}\vec{e}_1^{\,/} + b_{i2}\vec{e}_2^{\,/} + b_{i3}\vec{e}_3^{\,/} \quad . \tag{7.8}$$

Korzystając ze wzoru (7.8) łatwo znaleźć, że

$$b_{ij} = (\frac{d\vec{e}_i^{\,/}}{dt} \cdot \vec{e}_j^{\,/}) \quad . \tag{7.9}$$

Po podstawieniu (7.9) do (7.7) znajdujemy

$$b_{ji} = -b_{ij} \quad . \tag{7.10}$$

Uwzględniając wzory (7.8) i (7.10) otrzymujemy

$$\frac{d\vec{e}_1^{\,/}}{dt} = b_{12}\vec{e}_2^{\,/} + b_{13}\vec{e}_3^{\,/} \quad , \tag{7.11a}$$

$$\frac{d\vec{e}_2^{\,/}}{dt} = -b_{12}\vec{e}_1^{\,/} + b_{23}\vec{e}_3^{\,/} \quad , \tag{7.11b}$$

$$\frac{d\vec{e}_3^{\,/}}{dt} = -b_{13}\vec{e}_1^{\,/} - b_{23}\vec{e}_2^{\,/} \quad . \tag{7.11c}$$

Ze wzorów (7.11) wynika, że wektor $d\vec{e}_1^{\,/} / dt$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\vec{e}_1^{\,/}$; wektor $d\vec{e}_2^{\,/} / dt$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{e}_2^{\,/}$, a wektor $d\vec{e}_3^{\,/} / dt$ - w płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\vec{e}_3^{\,/}$. Wykażemy teraz, że wektor $d\vec{e}_i^{\,/} / dt$ można zapisać w postaci

$$\frac{d\vec{e}_i^{\,/}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{e}_i^{\,/}] \quad . \tag{7.12}$$

Rozważmy jako przykład wektor $d\vec{e}_1^{\,/} / dt$. Zapiszmy (7.11a) w postaci

$$\frac{d\vec{e}_1^{\,/}}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{e}_1^{\,/}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1^{\,/} & \vec{e}_2^{\,/} & \vec{e}_3^{\,/} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_3\vec{e}_2^{\,/} - \omega_2\vec{e}_3^{\,/} \ . \tag{7.13}$$

Z porównania (7.11a) i (7.13) znajdziemy

$$b_{12} = -b_{21} = \omega_3 \ , \tag{7.14a}$$

$$b_{13} = -b_{31} = -\omega_2 \ . \tag{7.14b}$$

W podobny sposób, z porównania (7.11b) i $\frac{d\vec{e}_2^{\,/}}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{e}_2^{\,/}] = -\omega_3\vec{e}_2^{\,/} + \omega_1\vec{e}_3^{\,/}$ otrzymujemy

$$b_{23} = -b_{32} = \omega_1 \ . \tag{7.14c}$$

Wzór (7.12) nosi nazwę *wzoru Poissona*.
Wektor $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = b_{23}\vec{e}_1^{\,/} + b_{31}\vec{e}_2^{\,/} + b_{12}\vec{e}_3^{\,/} \tag{7.15}$$

określa prędkość kątową z jaką układ $K^/$ obraca się względem układu nieruchomego K.

Z uwzględnieniem wzoru Poissona (7.12), drugi wyraz w (7.5) możemy zapisać w postaci

$$x^/ \frac{d\vec{e}_1^{\,/}}{dt} + y^/ \frac{d\vec{e}_2^{\,/}}{dt} + z^/ \frac{d\vec{e}_3^{\,/}}{dt} = [\vec{\omega}\times(x^/\vec{e}_1^{\,/} + y^/\vec{e}_2^{\,/} + z^/\vec{e}_3^{\,/}] = [\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,/}] \ , \tag{7.16}$$

a zatem ostatecznie ze wzoru (7.4) mamy

$$\vec{\upsilon} = \vec{V}_{0^/} + \vec{\upsilon}^{\,/} + [\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,/}] \ . \tag{7.17}$$

We wzorze (7.17) prędkość

$$\vec{\upsilon}_h = \vec{V}_{0^/} + [\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,/}] \tag{7.18}$$

określa prędkość punktu sztywno związanego z ruchomym układem $K^/$ (dla tego punktu $\vec{\upsilon}^{\,/} = 0$). Prędkość $\vec{\upsilon}_h$ nosi nazwę *prędkości unoszenia punktu.*

W przypadku, gdy $\vec{\omega}=0$ mówimy, że układ $K^{/}$ porusza się względem układu K ruchem postępowym (translacyjnym). Z kolei, gdy $\vec{V}_{0^{/}}=0$ mówimy, że układ $K^{/}$ porusza się względem układu K ruchem obrotowym (rotacyjnym) wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez początek układu i mającej kierunek i zwrot wyznaczony przez wektor $\vec{\omega}$.

Rozważmy teraz zależność pomiędzy przyspieszeniami $\vec{a}$ i $\vec{a}^{/}$ jakie poruszające się punkt materialny ma względem układów K i $K^{/}$. Zauważmy przede wszystkim, że dla dowolnego wektora $\vec{b}^{/}$ w układzie ruchomym $K^{/}$ jest słuszny wzór

$$\frac{d\vec{b}^{/}}{dt}=\frac{d^{/}\vec{b}^{/}}{dt}+[\vec{\omega}\times\vec{b}^{/}] \ . \tag{7.19}$$

Zróżniczkujemy teraz względem układu K wzór (7.17)

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\vec{V}_{O^{/}}}{dt}+\frac{d\vec{\upsilon}^{/}}{dt}+[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}^{/}]+[\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}^{/}}{dt}] \ . \tag{7.20}$$

Korzystając teraz ze wzoru (7.19) otrzymujemy

$$\frac{d\vec{\upsilon}^{/}}{dt}=\frac{d^{/}\vec{\upsilon}^{/}}{dt}+[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}^{/}]=\vec{a}^{/}+[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}^{/}] \ , \tag{7.21a}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d^{/}\vec{\omega}}{dt}+[\vec{\omega}\times\vec{\omega}]=\frac{d^{/}\vec{\omega}}{dt} \ , \tag{7.21b}$$

$$\frac{d\vec{r}^{/}}{dt}=\vec{\upsilon}^{/}+[\vec{\omega}\times\vec{r}^{/}] \ . \tag{7.21c}$$

Podstawiając (7.21) do (7.20) i oznaczając przez $\vec{a}_{O^{/}}=d\vec{V}_{O^{/}}\big/dt$ ($\vec{a}_{O^{/}}$ jest to przyspieszenie początku układu $K^{/}$) otrzymujemy

$$\vec{a}=\vec{a}_{O^{/}}+\vec{a}^{/}+2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}^{/}]+[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{/}]+[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}^{/}]] \ . \tag{7.22}$$

Wzór (7.22) nosi nazwę *twierdzenia Coriolisa* i wiąże on ze sobą przyspieszenia punktu materialnego mierzone w dwu dowolnie poruszających się względem siebie układach odniesienia K i $K^{/}$.

Jeżeli rozpatrzmy w układzie $K^{/}$ punkt sztywno związany z układem, to dla takiego punktu ze wzoru (7.22) ($\vec{\upsilon}^{/}=0$, $\vec{a}^{/}=0$) mamy

$$\vec{a}_h=\vec{a}_{O^{/}}+[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{/}]+[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}^{/}]] \ . \tag{7.23}$$

Przyspieszenie $\vec{a}_h$ nazywamy *przyspieszeniem unoszenia punktu*. Przez $\vec{a}_h$ wzór (7.22) możemy zapisać w postaci

$$\vec{a}=\vec{a}_h+\vec{a}^{/}+2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}^{/}] \ . \tag{7.24}$$

Ze wzoru (7.24) wynika, że przyspieszenie $\vec{a}_C=2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}^{/}]$ powstaje wskutek zarówno zmiany orientacji układu $K^{/}$ względem układu K, jak i ruchu punktu względem układu $K^{/}$. Przyspieszenie to nosi nazwę *przyspieszenia Coriolisa* i ono znika w trzech przypadkach:

- gdy punkt materialny jest sztywno związany z układem $K^{/}$ ($\vec{\upsilon}^{/}=0$);
- gdy układ $K^{/}$ porusza się ruchem postępowym względem układu K ($\omega=0$);
- gdy punkt materialny porusza się w układzie $K^{/}$ z prędkością $\vec{\upsilon}^{/}$ równoległą do prędkości kątowej $\vec{\omega}$ ($\vec{\upsilon}^{/}\parallel\vec{\omega}$).

Równanie ruchu punktu materialnego względem układu nieinercjalnego. Siły bezwładności

Rozważmy znów dwa układy odniesienia: inercjalny układ K i pewien nieinercjalny układ $K^{/}$, który porusza się względem układu K ruchem dowolnym, lecz znanym. Względem układu inercjalnego K ruch punktu materialnego dany jest równaniem

$$m\vec{a}=\vec{F} \ . \tag{7.25}$$

Podstawiając do (7.25) zamiast przyspieszenia $\vec{a}$ wyrażenie (7.24) otrzymujemy

$$m\vec{a}^{/}+m\vec{a}_h+m\vec{a}_C=\vec{F} \ , \tag{7.26}$$

gdzie $\vec{a}^{/}$ – przyspieszenie punktu w układzie nieinercjalnym $K^{/}$; $\vec{a}_h$ – przyspieszenie unoszenia punktu (7.23); $\vec{a}_C$ – przyspieszenie Coriolisa.

Oznaczając przez

$$\vec{F}_h=-m\vec{a}_h=-m\{\vec{a}_0+[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{/}]+[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}^{/}]]\} \ , \tag{7.27}$$

$$\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega}\times\vec{v}^{/}] \ , \qquad (7.28)$$

ze wzoru (7.26) znajdujemy

$$m\vec{a}^{/} = \vec{F} + \vec{F}_h + \vec{F}_C \ . \qquad (7.29)$$

Wektory $\vec{F}_h$ i $\vec{F}_C$ nazywamy *siłą unoszenia* i *siłą Coriolisa*. Składową siły unoszenia ($-m[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}^{/}]]$) nazywamy *siłą odśrodkową.*

Równanie (7.29) jest to równanie ruchu punktu materialnego poruszającego się względem nieinercjalnego układu odniesienia $K^{/}$. Ze wzoru (7.29) wynika, że przyspieszenie punktu $\vec{a}^{/}$ względem układu nieinercjalnego $K^{/}$ powstaje jak w wyniku działania siły rzeczywistej $\vec{F}$ pochodzącej od innych ciał fizycznych (albo pól fizycznych), a także w wyniku ruchu z przyspieszeniem układu $K^{/}$ względem układu K. Przyspieszenie punktu, związane z przyspieszeniem układu $K^{/}$ względem układu K, możemy traktować jako wynik sił pozornych, dla których nie możemy wskazać źródła fizycznego w postaci ciała, albo pola. Te siły pozorne nazywamy *siłami bezwładności* Siła bezwładności nie ma odpowiadającej jej siły reakcji, ponieważ nie jest związana z oddziaływaniem dwóch ciał. Inaczej mówiąc, siły bezwładności, w przeciwieństwie do sił oddziaływania, nie spełniają III-go prawa Newtona.

Siła ciężkości i ciężar ciała

Wskutek rotacji Ziemi dookoła swej osi na powierzchni Ziemi na dowolne ciało o masie m oprócz siły grawitacyjnej działa siła odśrodkowa ($\vec{F}_O = -m[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}^{/}]]$). Z rys.7.1 widać, że długość wektora $\left|\vec{\omega}\times\vec{r}^{/}\right|$, prostopadłego do wektora $\vec{\omega}$, wynosi $\omega\cdot r^{/}\cdot\sin(90^0-\varphi) = \omega\cdot r^{/}\cos\varphi$. A zatem wartość siły odśrodkowej jest równa:

$$F_O = m\omega^2 r^{/}\cos\varphi \ . \qquad (7.30)$$

Siłą ciężkości ciała nazywamy siłę $\vec{P} = m\vec{g}$, która jest równa sumie geometrycznej siły grawitacyjnej i siły odśrodkowej:

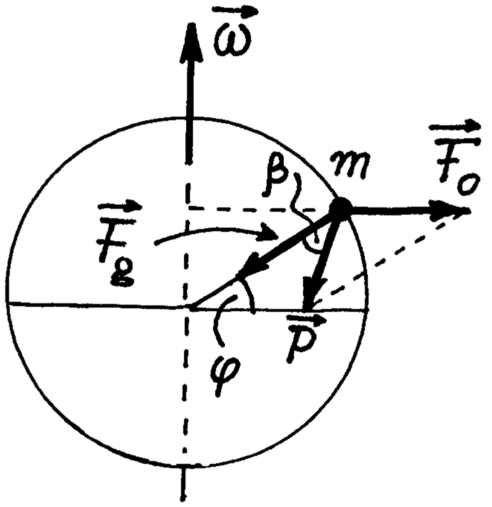
$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_O \ . \qquad (7.31)$$

Z rys.7.1 wynika, że

$$mg\cdot\sin\beta = F_O\cdot\sin\varphi \ ,$$

skąd, z uwzględnieniem (7.30) znajdujemy

$$\sin\beta = \frac{\omega^2 r^{/}}{2g}\sin 2\varphi \ . \tag{7.32}$$



Rys.7.1. Siła ciężkości ciała

Po podstawieniu do (7.32) $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5}$ *rad/s*, $r^{/}$ = 6.38 · 10^6 *m*, *g* = 9.81 *m/s*^{2} otrzymujemy

$$\sin\beta = 0.0018 \cdot \sin 2\varphi \ . \tag{7.33}$$

Z tego wzoru wynika, że siła ciężkości pokrywa się z siłą przyciągania ziemskiego tylko na biegunach Ziemi, gdy siła odśrodkowa znika. Na równiku różnica między siła ciężkości i siłą grawitacyjnej jest największa, ponieważ tutaj te siły mają przeciwny zwrot. Ta różnica wynosi $mg - m\omega^2 r^{/} = mg(1-\omega^2 r^{/}/g) = mg(1-0.36\cdot 10^{-2})$. A więc nawet na równiku siła ciężkości różni się od siły przyciągania ziemskiego tylko o 0.35 %.

Ciężarem ciała nazywamy siłę, z jaką ono działa na podłogę lub miejsce zawieszenia, uniemożliwiające jego spadek swobodny. W układzie odniesienia związanym z Ziemią ciężar ciała jest równy sile ciężkości ciała. Ciężar ciała w układzie odniesienia związanym z ciałem (windą, rakietą), która spada z przyspieszeniem $\vec{a}$ jest równy $\vec{P} - m\vec{a}$. Jeżeli $\vec{a} = \vec{g}$ ciężar ciała znika i mówimy iż ciało znajduje się w stanie *nieważkości*.

Wahadło Foucaulta

Foucault po raz pierwszy wykazał, że jeżeli obserwować drgania wahadła w wybranym na powierzchni Ziemi nieruchomym układzie odniesienia, to płaszczyzna, w której zachodzą drgania wahadła obraca się względem nieruchomego układu odniesienia. W ten sposób można doświadczalne udowodnić, znajdując na powierzchni Ziemi, że Ziemia obraca się wokół swojej osi. Udowodnimy twierdzenie Foucalta.

Wybierzemy oś Oz na powierzchni Ziemi pionowo ku górze, oś Ox na południe, a oś Oy - na wschód (rys.7.2a). Początek układu wybierzemy w punkcie zaczepienia wahadła o długości l i masie m. W tym układzie wektor prędkości kątowej obrotu Ziemi ma składowe ($-\omega\cos\psi,\ 0,\ \omega\sin\psi$).

Równanie ruchu przy powierzchni Ziemi opisuje wzór

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}] + \vec{F}_r, \tag{7.34}$$

gdzie $\vec{F}_r$ jest to siła reakcji nici.

Obliczmy najpierw z- składową momentu siły, działającej na masę m, biorąc pod uwagę, że wektor $[\vec{r}\times m\vec{g}]$ jest skierowany wzdłuż wektora $\vec{e}_\varphi$ (rys.7.2b), a siła reakcji nici $\vec{F}_r$ ma ten sam kierunek, co i $\vec{r}$ tylko przeciwny zwrot ($[\vec{r}\times\vec{F}_r] = 0$)

$$\begin{aligned} M_z &= [\vec{r}\times(m\vec{g} - 2m[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}] + \vec{F}_r)]_z = -2m[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}]]_z \\ &= -2m\{\omega_z(\vec{r}\cdot\vec{\upsilon}) - \upsilon_z(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\} = 2m(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\dot{r}_z \\ &= 2m\dot{r}_z\cdot r_z\omega(\sin\psi - \frac{r_x}{r_z}\cos\psi) \end{aligned} . \tag{7.35}$$

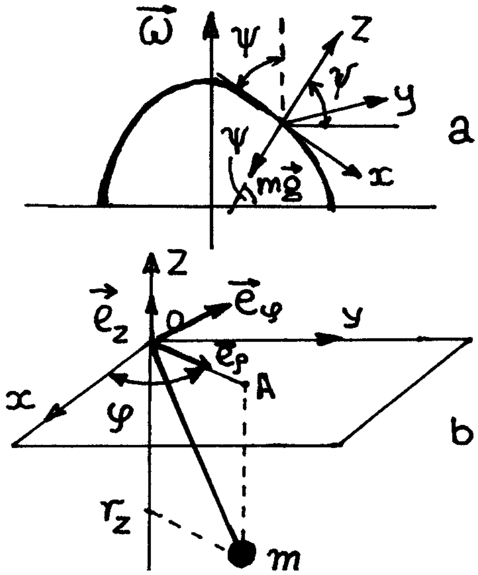
Uprościmy wzór (7.35), korzystając z tożsamości

$$r_z^2 + r_\rho^2 = r^2 \ . \tag{7.36}$$

Różniczkując (7.36) względem t i biorąc pod uwagę, iż $r^2 = l^2 = const$, otrzymujemy

$$r_z\cdot\dot{r}_z = -r_\rho\cdot\dot{r}_\rho \ . \tag{7.37}$$

Jeżeli amplituda drgań wahadła jest mała, to $r_x / r_z \approx 0$, $r_z \approx -l$ i wzór (7.35) możemy zapisać w postaci



Rys.7.2. Wahadło Foucaulta

$$M_z = -2m\omega \sin\psi \cdot \rho \cdot \dot{\rho} = -\frac{d}{dt}(m\omega \sin\psi \cdot \rho^2) \ . \qquad (7.38)$$

Tu zamieniliśmy r_ρ przez ρ, oraz $\dot{r}_\rho$ przez $\dot{\rho}$.

z - składowa momentu sił (7.38) określa zmianę w czasie z - składowej momentu pędu cząstki, która wynosi: $L_z = m\rho^2\dot{\varphi}$. A zatem

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = M_z = -\frac{d}{dt}(m\omega \sin\psi \cdot \rho^2) \ . \qquad (7.39)$$

Ze wzoru (7.39) wynika , że wielkość

$$\rho^2(\dot{\varphi} + \omega \sin\psi \cdot) = C_1 \ . \qquad (7.40)$$

jest stałą (całką ruchu).

Skorzystamy teraz z zasady zachowania energii:

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + mgz \ . \qquad (7.41)$$

Uprościmy wzór (7.41), korzystając najpierw ze wzoru (7.37). Jeżeli amplituda drgań jest mała, z tego wzoru otrzymujemy, że $\dot{z} = (\rho/l)\dot{\rho} << \dot{\rho}$, a więc wyraz ($m\dot{z}^2/2$) w (7.41) możemy pominąć i dla energii kinetycznej możemy zapisać

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) \ . \qquad (7.42)$$

Dalej, ze wzoru (7.36) mamy

$$z = -\sqrt{l^2 - \rho^2} = -l\sqrt{1-(\rho/l)^2} \approx -l(1-\rho^2/2l^2),$$

a więc dla energii potencjalnej możemy zapisać

$$U = mgz = -mgl + \frac{1}{2}mg\frac{\rho^2}{l} \ . \qquad (7.43)$$

Po podstawieniu (7.42) i (7.43) do (7.41) otrzymujemy drugą całkę ruchu

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\rho^2 = C_2 \equiv 2\frac{E+mgl}{m} \ , \qquad (7.44)$$

Energia jak wiemy jest określona zawsze z dokładnością do stałej, a więc jeżeli wybierzemy $E = -mgl$, to równanie (7.44) przyjmuje postać

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\rho^2 = 0 \ . \qquad (7.45)$$

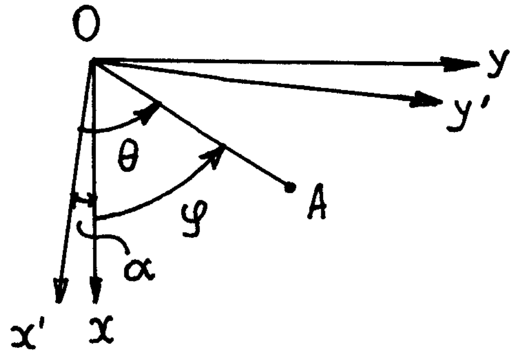
Dla tego żeby rozwiązać otrzymany układ równań, składający się z równania (7.40) i równania (7.45) wprowadźmy nowy układ współrzędnych Ox', Oy', $Oz' = Oz$ (rys.7.3).

Niech ten układ współrzędnych obraca się dookoła osi Oz zgodnie z wskazówkami zegara ze stałą prędkością kątową $\Omega = \dot{\alpha}$. Z rys.7.3 wynika, że $\theta = \varphi + \alpha$, a więc

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} = \dot{\varphi} + \Omega \ . \qquad (7.46)$$

Po uwzględnieniu wzoru (7.46) wzór (7.40) przyjmuje postać

$$\rho^2(\dot{\theta} - \Omega + \omega \sin\psi) = C_1 \ . \qquad (7.47)$$



Rys.7.3. Układ współrzędnych $Ox^{/}$, $Oy^{/}$, $Oz^{/} = Oz$

Wybierzemy prędkość kątową układu współrzędnych $\Omega = \dot{\theta} + \omega \sin\psi$. Wtedy, jak wynika z (7.47) całka ruchu $C_1 = 0$. Podstawiając $\dot{\varphi} = \dot{\theta} - \Omega = -\omega \sin\psi$ do równania (7.45) otrzymujemy

$$\dot{\rho}^2 + (\frac{g}{l} + \omega^2 \sin^2\psi)\rho^2 = 0 \ . \qquad (7.48)$$

Równanie (7.48) jest równaniem oscylatora harmonicznego i ma rozwiązanie

$$\rho(t) = \rho_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \ , \qquad (7.49)$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \omega^2 \sin^2\psi} \cong \sqrt{\frac{g}{l}}$. Tu uwzględniliśmy, że $(g/l) >> \omega^2$. A więc w wybranym „primowanym” układzie współrzędnych wahadło wykonuje drgania harmoniczne w płaszczyźnie, która obraca się w nie primowanym układzie wokół osi pionowej Oz ze stałą prędkością kątową $\dot{\varphi} = -\omega \sin\psi$. Obrót płaszczyzny drgań wahadła zachodzi od osi Ox (od południa) ku osi $(-Oy)$ (ku zachodowi).