Wykład 6

Drgania

Ruch, który powtarza się w regularnych odstępach czasu, nazywamy *ruchem okresowym* (periodycznym). Przemieszczenie cząstki w ruchu periodycznym można wyrazić za pomocą funkcji sinus albo cosinus. Ruch okresowy jest powszechną formą ruchu obserwowaną w życiu codziennym i dlatego jest ważnym przedmiotem fizyki.

Siła harmoniczna

Działającą na ciało siłę, która jest proporcjonalna do przesunięcia ciała od początku układu i która jest skierowana ku początkowi układu, nazywamy *siłą harmoniczną* lub *siłą sprężystości*. Jeżeli obierzemy oś x wzdłuż przesunięcia, to siła harmoniczna jest wyrażona równaniem

$$F = -kx \ , \tag{6.1}$$

gdzie x jest przesunięciem od położenia równowagi. To równanie opisuje siłę wywieraną przez rozciągniętą sprężynę o ile tylko sprężyna nie została rozciągnięta poza granicę sprężystości. Wzór (6.1) wyraża tak zwane *prawo Hooke'a*.

Jeżeli sprężyna zostanie rozciągnięta tak aby masa m (zaczepiona do sprężyny) znalazła się w położeniu $x = A$, a następnie w chwili $t = 0$ została zwolniona, to położenie masy w funkcji czasu będzie dane równaniem:

$$x = A \cdot \cos \omega t \ . \tag{6.2}$$

Sprawdźmy czy to jest dobry opis ruchu. Dla $t = 0$, $x = A$, tzn. opis zgadza się z założeniami. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że

$$ma = -kx \ ,$$

czyli

$$ma \equiv m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ . \tag{6.3}$$

Równanie takie nazywa się równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Staramy się "odgadnąć" rozwiązanie i następnie sprawdzić nasze przypuszczenia. Zwróćmy uwagę, że rozwiązaniem jest funkcja $x(t)$, która ma tę właściwość, że jej druga pochodna jest równa funkcji ale ze znakiem "–". Zgadujemy, że *może* to być funkcja $x = A\cos\omega t$ i sprawdzamy

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon = -A\omega \cdot \sin \omega t \quad , \tag{6.4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = a = -A\omega^2 \cdot \cos \omega t \quad . \tag{6.5}$$

Podstawiając ten wynik do równania (6.3), znajdujemy

$$m(-A\omega^2 \cdot \cos \omega t) = -kA \cdot \cos \omega t \quad . \tag{6.6}$$

Skąd mamy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \tag{6.7}$$

Widzimy, że funkcja $x = A\cos\omega t$ jest rozwiązaniem równania (6.3) ale tylko gdy $\omega = \sqrt{k/m}$.

Zwróćmy uwagę, że funkcja $x = A\sin\omega t$ jest również rozwiązaniem równania (6.3) ale nie spełnia warunku początkowego bo gdy $t = 0$ to $x = 0$ (zamiast $x = A$).

Najogólniejsze rozwiązanie równania (6.3) ma postać:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad , \tag{6.8}$$

albo

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \beta) \quad , \tag{6.9}$$

Stałe α i β to są *stałe fazowe*. Stałe A oraz α albo β są określone przez warunki początkowe: położenie i prędkość w chwili $t = 0$.

Ze wzorów (6.9), (6.4) i (6.5) wynika, że *wartości maksymalne* (amplitudy) wychylenia, prędkości i przyspieszenia wynoszą:

- dla wychylenia A;
- dla prędkości ωA (*występuje gdy* $\omega t = (2n+1)\pi/2$, czyli $x = 0$);
- dla przyspieszenia $\omega^2 A$ (*występuje gdy* $x = A$).

Okres drgań

Funkcja $\cos\omega t$ lub $\sin\omega t$ powtarza się po czasie $T = 2\pi/\omega$. Tą szczególną wartość czasu nazywamy *okresem* T . Liczba drgań w czasie t jest równa

$$n = \frac{t}{T} \ . \qquad (6.10)$$

Gdy podzielimy obie strony przez *t*, otrzymamy liczbę drgań w jednostce czasu

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \ , \qquad (6.11)$$

która nazywa się częstotliwością drgań.

Dla ruchu harmonicznego $\omega = \sqrt{k / m}$ więc otrzymujemy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ . \qquad (6.12)$$

Jest to okres drgań masy *m* przyczepionej do końca sprężyny o stałej sprężystości *k*.

Wahadła

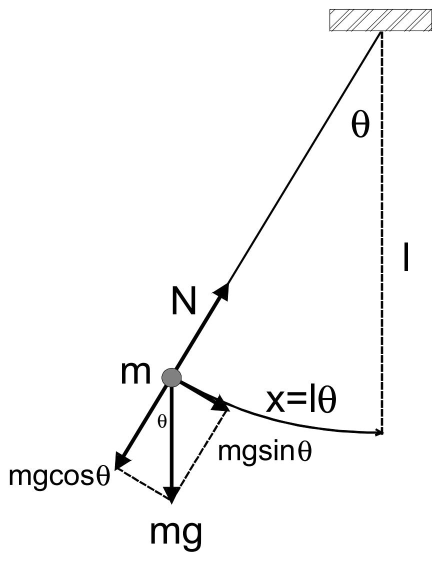
1. Wahadło proste

Wahadło proste albo wahadło matematyczne jest to wyidealizowane ciało o masie punktowej m, zawieszone na cienkiej, nieważkiej, nierozciągliwej nici. Kiedy ciało wytrącimy z równowagi to zaczyna się ono wahać w płaszczyźnie poziomej pod wpływem siły ciężkości. Udowodnimy, że przy małych odchyleniach masy m od osi pionowej wahadło to wykonuje ruch periodyczny.

Rysunek przedstawia wahadło o długości *l* i masie *m*, odchylone o kąt θ od stanu równowagi wahadła ($\theta = 0$). Na masę *m* działa siła przyciągania grawitacyjnego mg. Składową $mg \cdot \cos\theta$ siły grawitacyjnej równoważy siła naprężenia nici *N.* Natomiast składowa $mg \cdot \sin\theta$ nie jest zrównoważona i jest siłą przywracającą równowagę układu, sprowadzając masę *m* do położenia równowagi. Siła ta wynosi

$$F = -mg\sin\theta \ . \qquad (6.13)$$

Znak minus tu oznacza, że siła ta jest skierowana w stronę przeciwną od kierunku odchylenia wahadła. Ze wzoru (6.13) widać, że siła przywracająca równowagę układu jest *proporcjonalna do* $\sin\theta$*, a nie do* θ*, więc nie jest to ruch prosty harmoniczny.* Jeżeli jednak kąt θ jest mały (mniejszy niż 10°) to $\sin\theta$ jest bardzo bliski θ (różnica mniejsza niż 0.5%). Przemieszczenie wzdłuż łuku (z miary łukowej kąta) wynosi $x = l \cdot \theta$. Przyjmując zatem, że $\sin\theta \cong \theta$ wzór (6.13) możemy zapisać w postaci



Rys.6.1. Wahadło proste

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x \quad . \tag{6.14}$$

Siła (6.14) jest wprost proporcjonalna do przemieszczenia (ze znakiem "–"), czyli jest siła harmoniczną. W tym przypadku w równaniu siły harmonicznej (6.1) stałą k określa stała mg/l. Korzystając ze wzoru (6.14) dla częstości drgań wahadła matematycznego znajdujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \tag{6.15}$$

Po podstawieniu (6.15) do wzoru (6.12) mamy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \tag{6.16}$$

Zauważmy, że częstość i okres wahadła prostego nie zależy od amplitudy i od masy wahadła.

Wahadło fizyczne

Dowolne ciało sztywne zawieszone tak, że może się wahać wokół pewnej osi przechodzącej przez to ciało nazywamy *wahadłem fizycznym*. Udowodnimy, że przy małych odchyleniach ciała sztywnego od osi pionowej wahadło fizyczne wykonuje ruch okresowy.

Niech punkt P (rys.6.2) jest punktem zawieszenia ciała, a punkt S, znajdujący się w odległości d od punkt P, jest środkiem masy ciała. Moment siły M działający na ciało wynosi

$$M = -mgd\sin\theta \quad . \tag{6.17}$$

Znak minus oznacza tu, że moment sił ma kierunek przeciwny do kierunku momentu pędu ciała.
Korzystając z równania momentów

$$\frac{dL}{dt} = I\cdot\frac{d\omega}{dt} = I\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = M \quad , \tag{6.18}$$

i biorąc pod uwagę wzór (6.17), otrzymujemy

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgd\sin\theta \quad . \tag{6.19}$$

Dla małych wychyleń, dla których $\sin\theta \cong \theta$, ze wzoru (6.19) znajdujemy

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta \quad . \tag{6.20}$$

To równanie ma tę samą postać co równanie dla ruchu harmonicznego więc

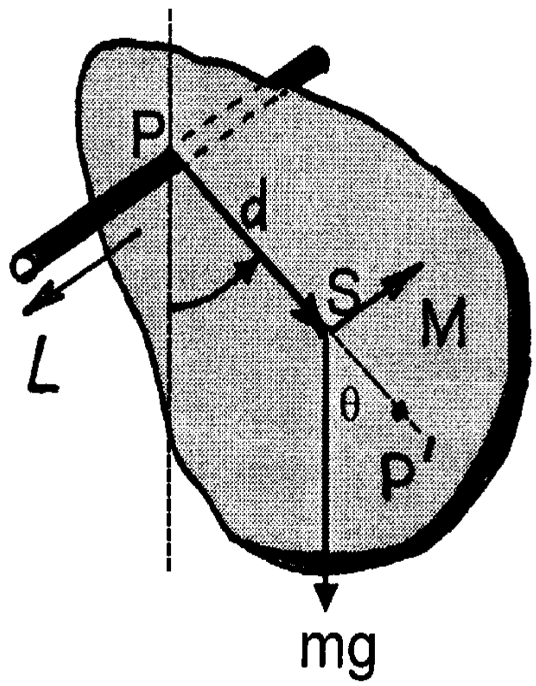
$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad , \tag{6.21}$$

lub

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad . \tag{6.22}$$

Porównajmy okres otrzymany wahadła fizycznego i okres wahadła matematycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \tag{6.23}$$



Rys.6.2. Wahadło fizyczne

Z tych wzorów otrzymujemy, że wahadło matematyczne o długości

$$l_{zr} = \frac{I}{md} = \frac{md^2 + I_C}{md} = d + \frac{I_C}{md} \tag{6.24}$$

ma taki sam okres co wahadło fizyczne. Długość l_{zr}, określona wzorem (6.24) nosi nazwę *długości zredukowanej wahadła fizycznego*. W równaniu (6.24) I_C jest momentem bezwładności wahadła fizycznego względem osi przechodzącej przez jego środek masy S i równoległej do jego osi wahań. Ostatni człon w (6.24) wyprowadziliśmy, korzystając z twierdzenia Steinera. Punkt $P^{/}$ (rys.6.2), leżący na prostej PS w odległości l_{zr} od punktu zawieszenia wahadła nazywamy *środkiem wahań wahadła fizycznego*. Ten punkt ma interesującą właściwość: jeżeli zawiesimy wahadło w punkcie $P^{/}$, to okres drgań wahadła nie zmieni się. Istotnie, zgodnie z (6.24), wahadło zawieszone w punkcie $P^{/}$, ma następującą długość zredukowaną

$$l_{zr}^{/} = d^{/} + \frac{I_C}{md^{/}} \tag{6.25}$$

Tu $d^{/}$ jest odległość punktu $P^{/}$ od środka masy S (rys.6.2).

Zgodnie z określeniem środka wahań: $l_{zt} = d^{/} + d$, a zatem ze wzoru (6.24) otrzymujemy

$$l_{zr} = d + d^{/} = d + \frac{I_C}{md} \ . \tag{6.26}$$

Skąd

$$d^{/} = \frac{I_C}{md} \quad \text{albo} \quad d = \frac{I_C}{md^{/}} \tag{6.27}$$

Po podstawieniu (6.27) do wzoru (6.25) otrzymujemy

$$l_{zr}^{/} = d^{/} + \frac{I_C}{md^{/}} = d^{/} + d = l_{zr} \ . \tag{6.28}$$

A więc długość zredukowana wahadła zawieszonego w punkcie $P^{/}$ jest taka sama jak długość zredukowana wahadła zawieszonego w punkcie P. Ponieważ, długość zredukowana określa w jednoznaczny sposób okres i częstość drgań wahadła fizycznego, z równości (6.28) wynika, że wahadła zawieszone w punktach P i $P^{/}$ mają takie same okresy i częstości.

Oscylator harmoniczny tłumiony

Rozważmy teraz drgania oscylatora z uwzględnieniem strat energii oscylatora. W przypadku drgań mechanicznych siłą hamującą (tłumiącą) ruch cząstki jest siła oporu F_{op} ośrodka. Siła oporu ma zwrot przeciwny do prędkości i w najprostszej postaci jest wprost proporcjonalna do prędkości

$$F_{op} = -\gamma \frac{dx}{dt} \ . \tag{6.29}$$

Z uwzględnieniem siły hamującej (6.29), równanie ruchu (6.3) oscylatora harmonicznego przyjmie postać

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{6.30}$$

Wprowadzając $\tau = m/\gamma$ oraz oznaczając *częstość drgań nietłumionych* $\omega_0^2 = k/m$ zapiszmy równanie (6.30) w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \tag{6.31}$$

Będziemy szukali rozwiązania (6.31) w postaci:

$$x = Ae^{-\beta t}\cos\omega t \quad . \tag{6.32}$$

Obliczmy teraz pierwszą i drugą pochodne funkcji (6.32), względem czasu

$$\frac{dx}{dt} = A\cdot\left(-\beta e^{-\beta t}\cos\omega t - e^{-\beta t}\omega\sin\omega t\right) \quad , \tag{6.33a}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\cdot\left(\beta^2 e^{-\beta t}\cos\omega t + 2\beta\omega e^{-\beta t}\sin\omega t - e^{-\beta t}\omega^2\cos\omega t\right) \quad . \tag{6.33b}$$

Po podstawieniu tych pochodnych do równania (6.31) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &A\cdot\left(\beta^2 e^{-\beta t}\cos\omega t + 2\beta\omega e^{-\beta t}\sin\omega t - e^{-\beta t}\omega^2\cos\omega t\right) \\ &+ A\cdot\frac{1}{\tau}\left(-\beta e^{-\beta t}\cos\omega t - e^{-\beta t}\omega\sin\omega t\right) + A\omega_0^2 e^{-\beta t}\cos\omega t = 0 \quad . \end{aligned} \tag{6.34}$$

Zapiszmy (6.34) w postaci

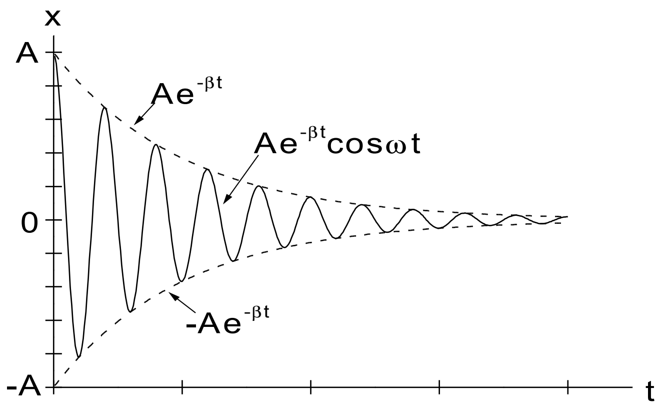
$$(\beta^2 - \frac{\beta}{\tau} + \omega_0^2 - \omega^2)\cdot\cos\omega t + \omega\cdot(2\beta - \frac{1}{\tau})\cdot\sin\omega t = 0 \quad . \tag{6.35}$$

Równanie (6.35) musi być słuszne dla dowolnej chwili. Niech $t = 2\pi/\omega$, wtedy ze wzoru (6.35) otrzymujemy

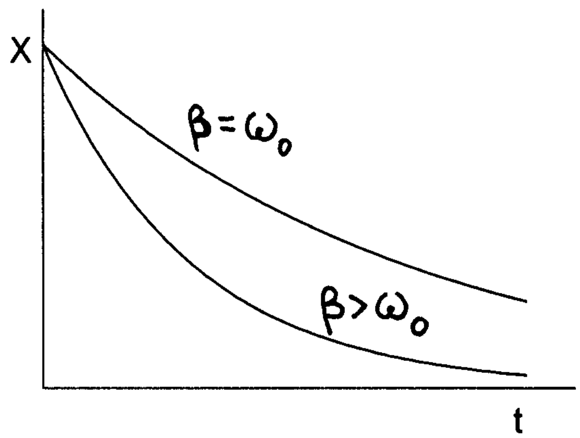
$$(\beta^2 - \frac{\beta}{\tau} + \omega_0^2 - \omega^2) = 0 \quad . \tag{6.36}$$

Jeżeli rozważmy teraz chwilę $t = \pi/2\omega$, wtedy

$$\omega \cdot (2\beta - \frac{1}{\tau}) = 0 \ . \qquad (6.37)$$



Rys.6.3. Wykres funkcji $x = A \cdot e^{-t/2\tau} \cos\left|\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t\right|$



Rys.6.4. Aperiodyczny ruch oscylatora z "silnym" tłumieniem

Z równania (6.37) mamy

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \ . \qquad (6.38)$$

Po podstawieniu $\tau = 1/2\beta$ do wzoru (6.36) znajdujemy:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \ . \qquad (6.39)$$

A zatem funkcja

$$x = A \cdot e^{-t/2\tau} \cos\left[\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t\right] \qquad (6.40)$$

jest rozwiązaniem równania opisującego ruch harmoniczny tłumiony. Widzimy, że opór zmniejsza zarówno amplitudę jak i częstość drgań, czyli powoduje spowolnienie ruchu. Wielkość tłumienia określa współczynnik tłumienia β (lub stała czasowa τ). Wykres ruchu oscylatora harmonicznego tłumionego w zależności od czasu jest pokazany na rysunku 6.3.

Powyższe rozważania dotyczą sytuacji "słabego tłumienia" tj. $\beta < \omega_0$. Gdy tłumienie wzrośnie powyżej pewnej krytycznej wartości ($\beta = \omega_0$) ruch przestaje być ruchem okresowym, drgającym. W tym przypadku obserwujemy, że ciało wychylone z położenia równowagi powraca do niego asymptotycznie. Takich ruch nazywamy ruchem *pełzającym (aperiodycznym)*. Zależności wychylenia od czasu dla ruchu tłumionego krytycznie ($\beta = \omega_0$) i ruchu pełzającego ($\beta > \omega_0$) są pokazane na rys.6.4.

Straty mocy, współczynnik dobroci

Współczynnik dobroci Q układu drgającego jest definiowany jako

$$Q = 2\pi \frac{E_{zmagazynowana}}{E_{stracona\ za\ okres}} = 2\pi \frac{E}{PT} = \frac{E\omega}{P} \ , \qquad (6.41)$$

Tabela 6.1 Współczynniki dobroci

Oscylator	Q
Ziemia dla fali sejsmicznej	250-400
Struna fortepianu lub skrzypiec	1000
Atom wzbudzony	10^7
Jądro wzbudzone	10^{12}

We wzorze (6.41) P jest średnią stratą mocy, a $\omega = 2\pi / T$ - częstotliwością. Dla przypadku słabo tłumionego oscylatora harmonicznego (β<< ω_0) współczynnik Q ma w przybliżeniu wartość $\omega_0/2\beta$. Kilka typowych wartości Q podano w tabeli 6.1

Drgania wymuszone oscylatora harmonicznego

Rozważmy teraz przypadek, gdy na oscylator oprócz siły oporu działa jeszcze siła zewnętrzna wymuszająca $F(t)$. Siła wymuszająca ma za zadanie podtrzymywać gasnące drgania oscylatora. W tym przypadku równanie ruchu oscylatora ma postać

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F(t) \tag{6.42}$$

Wprowadzając $\tau = m/\gamma = 1/2\beta$ oraz oznaczając *częstość drgań nietłumionych* $\omega_0^2 = k/m$ zapiszmy równanie (6.42) w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \ . \tag{6.43}$$

Udowodnimy, że gdy układ jest *zasilany częstością ω różną od częstości własnej ω_0 wówczas drgania oscylatora będą odbywały się z częstością siły zewnętrznej a nie z częstością własną*.

Załóżmy, że siła wymuszająca ma postać

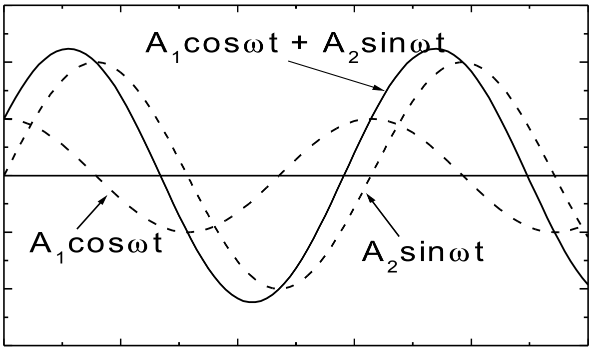
$$\frac{F(t)}{m} = \frac{F_0 \sin\omega t}{m} = \alpha_0 \sin\omega t \ , \tag{6.44}$$

gdzie $\alpha_0 = F_0/m$.

Mamy teraz w równaniu (6.43) dwie wielkości okresowo zmienne: położenie x oraz siłę wymuszającą F. W najogólniejszym przypadku suma (złożenie) dwóch funkcji okresowych daje w wyniku też funkcję okresową (rys.6.5): $A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Będziemy szukali, więc rozwiązania równania (6.43) postaci $A\sin(\omega t + \varphi)$. Musimy znaleźć amplitudę A oraz przesunięcie fazowe φ.

Najpierw zdefiniujmy *przesunięcie fazowe* φ. Zarówno siła wymuszająca jak i wychylenie zmieniają się cyklicznie (harmonicznie), tzn. pełny cykl np. od maksimum do maksimum obejmuje 360° czyli 2π. *Przesunięcie fazowe φ mówi nam o jaki kąt maksimum* *przemieszczenia wyprzedza maksimum siły* (o ile przesunięte są wykresy $x(t)$ i $F(t)$). Np. siła osiąga swoje maksimum gdy przemieszczenie jest równe zeru (i rośnie w kierunku dodatnim). Oznacza to, że x opóźnia się względem siły o π/2.



Rys.6.5. Złożenie dwóch funkcji harmonicznych

Poszukiwanie rozwiązania zaczynamy od obliczenia pochodnych

$$\frac{dx}{dt} = \omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi)\,,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Po podstawieniu tych pochodnych do równania (6.43) znajdujemy

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\tau}A\cos(\omega t + \varphi) = \alpha_0 \cdot \sin\omega t\ .$$

Równanie to przekształcamy korzystając ze związków

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi\,,$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi\,.$$

Wtedy otrzymujemy

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - (\omega/\tau)\sin\varphi]\,A\sin\omega t + [(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi + (\omega/\tau)\cos\varphi]\,A\cos\omega t = \alpha_0\sin\omega t\ .$$

Równanie to może być tylko spełnione, gdy czynniki przy $\sin\omega t$ będą sobie równe, a czynnik przy $\cos\omega t$ będzie równy zeru. Ten ostatni warunek można zapisać jako

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad . \tag{6.45}$$

Z tego warunku wiemy już fazę φ. Teraz możemy wyznaczyć amplitudę. Z równości czynników przy $\sin\omega t$ otrzymujemy

$$A = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - (\omega/\tau)\sin\varphi]} = \frac{\alpha_0}{\cos\varphi \cdot \left[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\beta\omega \cdot tg\varphi\right]} \quad . \tag{6.46}$$

Biorąc pod uwagę (6.45) znajdujemy

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad . \tag{6.47}$$

Po podstawieniu (6.45) i (6.47) do wzoru (6.46) otrzymujemy:

$$A = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{1/2}} = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}} \quad . \tag{6.48}$$

Łącząc wzory (6.45) i (6.48) znajdujemy ostatecznie

$$x = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}} \sin\left(\omega t + arctg\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) . \tag{6.49}$$

Rezonans

Zauważmy, że chociaż drgania odbywają się z częstością ω siły wymuszającej to amplituda i faza zależą od relacji pomiędzy częstością wymuszającą ω, a częstością własną ω_0. W szczególności, gdy częstość siły wymuszającej osiągnie odpowiednią częstotliwość, to amplituda drgań może wzrosnąć gwałtownie nawet przy niewielkiej wartości siły wymuszającej. Zjawisko to nazywamy *rezonansem*. Wykres przedstawiający rezonansowy wzrost amplitudy drgań w funkcji częstości siły wymuszającej pokazany jest na rys.6.6 dla różnych wartości współczynnika tłumienia β ($\beta_0<\beta_1<\beta_2<\beta_3<\beta_4$). Częstość rezonansową ω_r i amplitudę rezonansową A_r możemy obliczyć z warunku na maksimum amplitudy drgań danej wzorem (6.48). Funkcja $A(\omega)$ osiąga maksimum

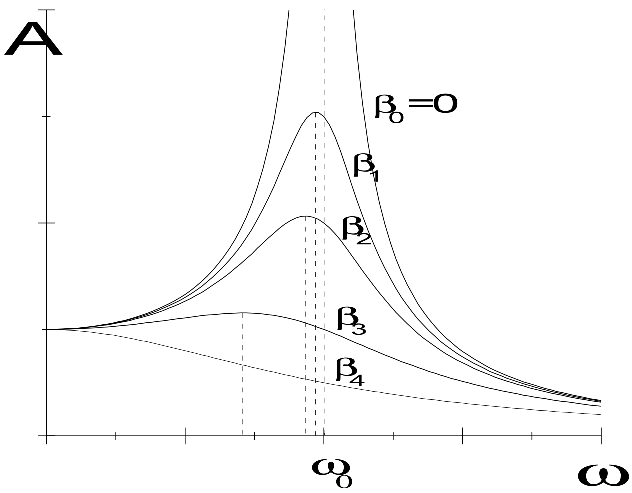
$$A = \frac{\alpha_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

dla częstości rezonansowej

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad .$$

Widać, że im mniejsze tłumienie β (dłuższy czas τ) tym większa amplituda A. Jeżeli tłumienie jest słabe ($\beta << \omega_0$) to wówczas maksymalna amplituda odpowiada częstości drgań własnych $\omega_r = \omega_0$. Jednocześnie, ten warunek odpowiada przesunięciu fazowemu $\varphi = \pi/2$ pomiędzy siłą a wychyleniem. Siła więc nie jest zgodna w fazie z wychyleniem. Zauważmy jednak, że moc pochłaniana przez oscylator zasilany siłą wymuszającą F zależy od prędkości

$$P = F \cdot \upsilon \; .$$



Rys.6.6. Rezonans

Trzeba więc, żeby to prędkość (a nie wychylenie) była zgodna w fazie z siłą, a to oznacza, że siła musi wyprzedzać wychylenie o $\pi/2$. Gdy $x = 0$ to $\upsilon = \upsilon_{max}$ i wtedy siła też ma być maksymalna. W punktach zwrotnych, gdzie prędkość zmienia swój kierunek, siła też musi zmienić swój kierunek (siła działa cały czas to nie są impulsy tak jak np. przy popychaniu huśtawki).

Skutki rezonansu mogą być zarówno pozytywne jak i negatywne. Z jednej strony staramy się wyeliminować przenoszenie drgań np. z silnika na elementy nadwozia w samochodzie, a z drugiej strony działanie odbiorników radiowych i telewizyjnych jest możliwe dzięki wykorzystaniu rezonansu elektrycznego. Dostrajając odbiornik do częstości nadajnika spełniamy właśnie warunek rezonansu. Zjawisko rezonansu jest bardzo rozpowszechnione w przyrodzie.