

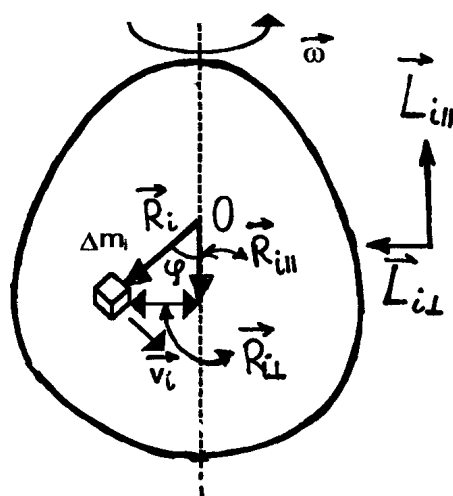
Wykład 5

Dynamika ciała sztywnego

Ciała sztywne i moment bezwładności

Większość mas w przyrodzie to nie są cząstki punktowe tylko rozciągłe ciała stałe, które mogą wykonywać zarówno ruch postępowy jak i obrotowy. Przez *ciała stałe, sztywne, rozumiemy ciała, w których odległość między dwoma wybranymi elementami pozostaje stała.*

Przeanalizujmy ruch takiej bryły obracającej się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół stałej osi w układzie środka masy. Dla uproszczenia rozważmy bryłę w postaci ciała o symetrii obrotowej (rys.5.1). Zauważmy, że różne części ciała mają różną prędkość liniową v , chociaż tą samą prędkość kątową ω . Podzielmy to ciało na małe elementy o masie Δm_i odległe od osi obrotu o $R_{i\perp}$ (rys.5.1). Prędkość liniowa takiego elementu wynosi $\vec{v}_i = [\vec{\omega} \times \vec{R}_i]$, skąd $v_i = R_i \sin \varphi \cdot \omega = \omega R_{i\perp}$.



Rys.5.1. Ruch obrotowy bryły

Moment pędu \vec{L}_i tego małego elementu względem początku układu O wynosi

$$\vec{L}_i = [\vec{R}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i] = \vec{L}_{i\perp} + \vec{L}_{i||} ,$$

gdzie

$$\vec{L}_{i\parallel} = \Delta m_i \left(\vec{R}_{i\perp} \times \vec{v}_i \right) ,$$

oraz

$$\vec{L}_{i\perp} = \Delta m_i \left(\vec{R}_{i\parallel} \times \vec{v}_i \right) .$$

Składowa momentu pędu

$$L_{i\parallel} = \Delta m_i R_{i\perp} v_i = \Delta m_i R_{i\perp}^2 \cdot \omega \quad (5.1)$$

jest równoległa do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ (rys.5.1), natomiast składowa

$$L_{i\perp} = \Delta m_i R_{i\parallel} v_i = \Delta m_i R_{i\parallel} R_{i\perp} \cdot \omega \quad (5.2)$$

jest prostopadła do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ (rys.5.1).

Jeżeli ciało sztywne ma symetrię ciała obrotowego, suma wszystkich składowych $\vec{L}_{i\perp}$ będzie równa zeru, natomiast suma wszystkich składowych $L_{i\parallel}$ będzie wynosiła

$$L = \left(\sum_i R_{i\perp}^2 \Delta m_i \right) \omega . \quad (5.3)$$

Wielkość w nawiasie nazywamy *momentem bezwładności* I bryły względem osi obrotu:

$$I = \sum_i R_{i\perp}^2 \Delta m_i . \quad (5.4)$$

W przypadku ciągłego rozkładu masy moment bezwładności ciała względem osi określamy w następujący sposób:

$$I = \int_V \rho(r) \cdot r_{\perp}^2 dV . \quad (5.5)$$

Tu r_{\perp} jest najkrótsza odległość od osi obrotu punktu o wektorze wodzącym \vec{r} .

Biorąc pod uwagę (5.4), możemy teraz zapisać moment pędu obracającego się ciała sztywnego w postaci

$$L = I \cdot \omega . \quad (5.6)$$

W równaniu (5.6) L jest składową momentu pędu ciała sztywnego na kierunek wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$, a zatem równanie (5.6) możemy zapisać również w postaci wektorowej

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} . \quad (5.7)$$

Warto podkreślić, że równanie wektorowe (5.7) jest słuszne tylko dla bryły o symetrii obrotowej. Dla bryły o dowolnym kształcie wektor \vec{L} nie jest równoległy do wektora $\vec{\omega}$.

Po podstawieniu wzoru (5.7) do równania, określającego zmiany momentu pędu ($\dot{\vec{L}} = \vec{M}$), otrzymujemy

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\beta} = \vec{M} . \quad (5.8)$$

Tu $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ jest przyspieszenie kątowe, a \vec{M} jest składową momentu siły wzdłuż osi obrotu bryły, czyli wzdłuż wektora $\vec{\omega}$.

Energia kinetyczna rotującej bryły sztywnej w układzie środka masy ma postać

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (R_{\perp} \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i R_{i\perp}^2 \right) \omega^2 , \quad (5.9)$$

a zatem, uwzględniając wzór (5.4), znajdujemy

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 , \quad (5.10)$$

Zestawmy teraz obliczone wielkości ruchu obrotowego bryły z ich odpowiednikami dla ruchu postępowego.

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\beta}$
$T = \frac{1}{2} m v^2$	$T = \frac{1}{2} I \omega^2$

Z tej tabelki widzimy, że moment bezwładności I w ruchu obrotowym bryły odgrywa rolę analogiczną do masy m w ruchu postępowym. Istnieje jednak zasadnicza różnica: masa ciała nie zależy od jego położenia w przestrzeni, natomiast moment bezwładności zależy od osi, wokół której obraca się ciało. Momenty bezwładności niektórych ciał są podane w tabeli.

Ciało	I
Obręcz, pierścień względem osi \perp przez środek	mR^2
Krażek, walec względem osi \perp przez środek	$mR^2/2$
Pręt wokół osi \perp przez środek	$ml^2/12$
Pręt wokół osi \perp przez koniec	$ml^2/3$
Pełna kula wokół osi przez środek	$2mR^2/5$
Czasza kulista wokół osi przez środek	$2mR^2/3$

Twierdzenie Steinera

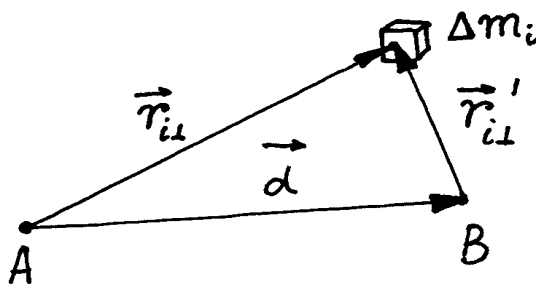
Często do obliczania momentu bezwładności wygodnie jest posłużyć się twierdzeniem Steinera. Podaje ono zależność pomiędzy momentem bezwładności I ciała względem danej osi, a momentem bezwładności I_C tego ciała względem osi przechodzącej przez jego środek masy i równoległej do danej osi:

$$I = I_C + md^2, \quad (5.11)$$

gdzie m jest masą ciała, a d odległością pomiędzy osiami. Udowodnimy twierdzenie Steinera.

Rozważmy dwie równoległe do siebie osi i niech osi te są prostopadłe do płaszczyzny rysunku (rys.5.2) i przecinają tę płaszczyznę w punktach A i B . Zgodnie ze wzorem (5.2) momenty bezwładności ciała względem osi przechodzących przez punkty A i B są równe:

$$I_A = \sum_i r_{i\perp}^2 \Delta m_i, \quad (5.12)$$



Rys.5.2. Twierdzenie Steinera

$$I_B = \sum_i (r'_{i\perp})^2 \Delta m_i \quad (5.13)$$

Tu $r_{i\perp}$ i $r'_{i\perp}$ - odległości masy Δm_i od osi przechodzące przez punkty A i B odpowiednio.

Z rys.5.2 wynika, że między wektorami $\vec{r}_{i\perp}$ i $\vec{r}'_{i\perp}$ istnieje związek

$$\vec{r}_{i\perp} = \vec{r}'_{i\perp} + \vec{d} \quad (5.14)$$

Po uwzględnieniu (5.14) ze wzoru (5.12) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_A &= \sum_i r_{i\perp}^2 \Delta m_i = \sum_i (\vec{r}'_{i\perp} + \vec{d})^2 \cdot \Delta m_i \\ &= \sum_i (r'_{i\perp})^2 \Delta m_i + d^2 \sum_i \Delta m_i + 2\vec{d} \cdot \sum_i \Delta m_i \vec{r}'_{i\perp} \\ &= I_B + md^2 + 2m(\vec{d} \cdot \vec{r}'_{C\perp}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

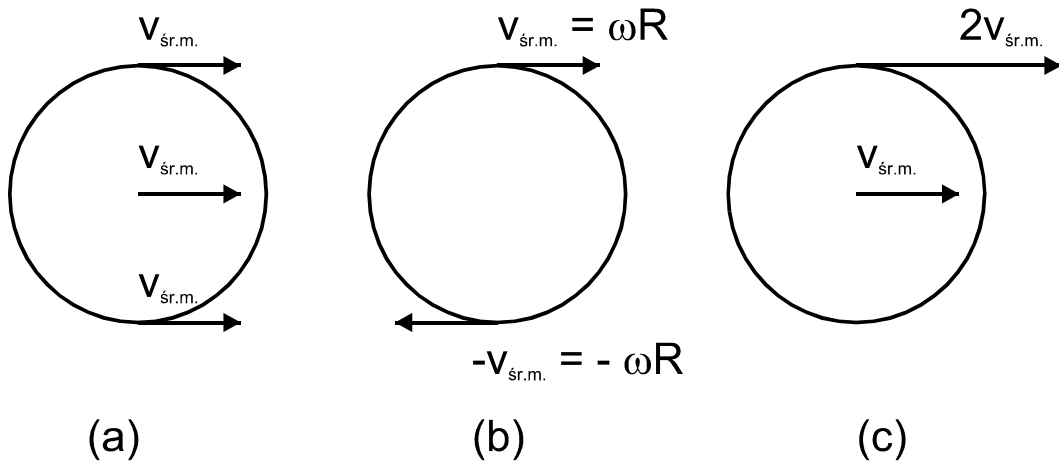
Tu m - masa ciała, a $\vec{r}'_{C\perp}$ - wektor określający odległość środka mas ciała od osi przechodzącej przez punkt B . Jeżeli środek mas ciała znajduje się na osi przechodzącej przez punkt B , wtedy $\vec{r}'_{C\perp} = 0$ i ze wzoru (5.15) wynika wzór (5.11), który wyraża twierdzenie Steinera.

Ruch postępowo-obrotowy ciała sztywnego

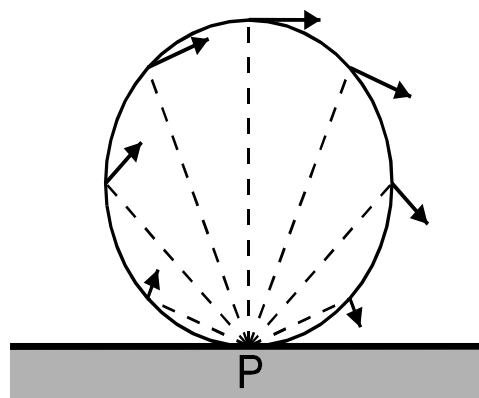
Dotychczas rozpatrywaliśmy ruch obrotowy ciała względem osi nieruchomych. Udowodnimy, że jeżeli ciało sztywne toczy się po jakiejś powierzchni, to taki ruch ciała też możemy uważać za ruch obrotowy, ale względem osi, która sama przesuwa się z czasem. Gdy na przykład walec toczy się to ten ruch walca możemy rozważać jako ruch złożony zarówno z ruchu postępowego a jednocześnie obrotowego. W ruchu postępowym (rys.5.3(a)) wszystkie punkty toczącego się walca poruszają się z takimi samymi prędkościami, natomiast w ruchu obrotowym (rys.5.3(b)) przeciwległe punkty poruszają się z przeciwnymi prędkościami, a środek walca jest nieruchomy. Na rys.5.3(c) pokazano wynik złożenia (sumowania) odpowiednich wektorów z rysunków (a) i (b).

Zwróćmy uwagę (rys.5.3c), że w każdej chwili wszystkie punkty podstawy walca (punkty P styczności z podłożem na rys.5.4) spoczywają ($v_p = 0$). Natomiast prędkość liniowa każdego innego punktu jest w każdej chwili prostopadła do linii łączącej ten punkt z

podstawą P i proporcjonalna do odległości tego punktu od P ($v = \omega \cdot r$). Oznacza to, że ruch postępowo-obrotowy walca w każdej chwili możemy rozważać jako obrót walca dookoła osi obrotu pokrywającej się ze styczną walca z podłożem (oś ta jest prostopadła do płaszczyzny rys. V.4 i przecina ją w punkcie P).



Rys.5.3. Ruch postępowo-obrotowy



Rys.5.4. Obrót walca dookoła osi chwilowej

A zatem udowodniliśmy, że możemy toczenie opisywać również jako "czysty" ruch obrotowy, ale względem osi przechodzącej przez punkt P styczności z powierzchnią, po której toczy się ciało. Oczywiście, że z upływem czasu położenie osi obrotu przesuwa się po podłożu. Oś ta nosi nazwę *chwilowej osi obrotu*.

Energia kinetyczna ruchu postępowo-obrotowy ciała sztywnego

Wyżej widzieliśmy, że ruch postępowo-obrotowy (toczenie się ciała) składa się z ruchu postępowego z prędkością \vec{v}_0 oraz ruchu obrotowego dookoła osi chwilowej obrotu z prędkością kątową $\vec{\omega}$. Więc prędkość liniową \vec{v}_i dowolnego małego elementu ciała sztywnego o masie Δm_i wynosi:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] . \quad (5.16)$$

Biorąc pod uwagę (5.16) dla energii kinetycznej ciała sztywnego znajdujemy

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \cdot (\vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i])^2 \\ &= \frac{1}{2} v_0^2 \sum_i \Delta m_i + (\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \times \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i]) + \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i ([\vec{\omega} \times \vec{r}_i])^2 . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ponieważ, $\sum_i \Delta m_i = m$ jest masa ciała; $\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i = m \cdot \vec{r}_C$, gdzie \vec{r}_C jest wektorem wodzącym środka mas ciała;

$$\sum_i \Delta m_i ([\vec{\omega} \times \vec{r}_i])^2 = \omega^2 \sum_i \Delta m_i (r_i \sin \alpha_i)^2 = \omega^2 \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2 = \omega^2 \cdot I ,$$

zapiszmy wzór (5.17) w postaci

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m(\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}_C]) + \frac{1}{2} I \omega^2 \equiv \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + (m \vec{r}_C \cdot [\vec{v}_0 \times \vec{\omega}]) . \quad (5.18)$$

Tu skorzystaliśmy z tożsamości wektorowej: $(\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]) = (\vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}]) = (\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}])$.

Ze wzoru (5.18) wynika, że jeżeli oś obrotu zawiera środek mas ($\vec{r}_C = 0$), energia kinetyczna ruchu postępowo-obrotowego składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego środka mas i energii kinetycznej obrotowej bryły:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 . \quad (5.19)$$

Tu I_C moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez środek mas ciała.

Zadanie: Krążek i kula o masach m i promieniach R staczają się po równi pochyłej o wysokości h . Obliczyć ich prędkości u dołu równi.

Rozwiązanie: Zapiszmy zasadę zachowania energii dla krążka i kuli:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 . \quad (5.20)$$

Ponieważ $\omega = v/R$ więc

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} . \quad (5.21)$$

Ze wzoru (5.21) znajdujemy

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}} . \quad (5.22)$$

Dla krążka $I = mR^2/2$, a zatem

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \approx 1.7\sqrt{gh} , \quad (5.23)$$

podczas, gdy dla kuli $I = 2mR^2/5$ więc

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \approx 2\sqrt{gh} . \quad (5.24)$$

Zauważmy, że odpowiedź nie zależy od masy i promienia ale *zależy tylko od kształtu*. Gdyby te ciała zsuwały się (bez tarcia) to $v = \sqrt{2gh}$ dla obu brył.

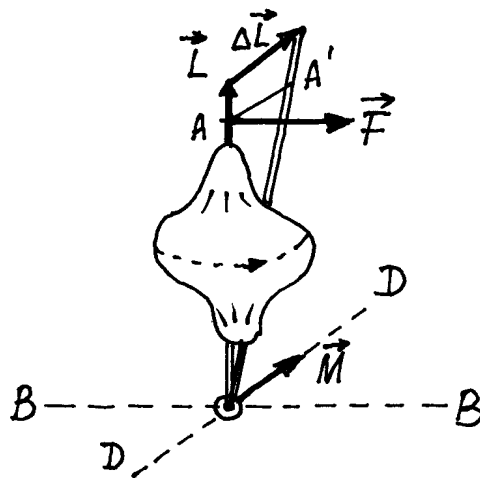
Ruch precesyjny (bąk). Żyroskop.

Inny przykładem ruchu obrotowego, w którym oś obrotu nie jest nieruchomą w inercjalnym układzie odniesienia jest żyroskop. *Żyroskopem albo bąkiem* nazywamy symetryczną obrotową bryłę sztywną wirującą dookoła swej osi symetrii. Ruch żyroskopu wykazuje bardzo interesujące zachowanie, które często jest wykorzystane w nawigacji statków, samolotów i td.

Rozważmy żyroskop, którego oś jest zamocowana w jednym nieruchomym punkcie O (rys.5.5). Jeżeli spróbujemy teraz zmienić kierunek osi żyroskopu, działając na nie zamocowany koniec jego osi siłą \vec{F} , to okazuje się, że oś żyroskopu obraca się nie wokół osi $D-D$, jak moglibyśmy przypuszczać, a wokół osi $B-B$ (rys.5.5). Efekt ten nazywa się *efektem żyroskopowym* i całkowicie jest zgodny z zasadami mechaniki. Istotnie, działanie siły \vec{F} w ciągu czasu Δt powoduje zmianę momentu pędu o

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t = [\vec{r} \times \vec{F}] \cdot \Delta t, \quad (5.25)$$

gdzie \vec{r} jest wektorem łączącym punkt O i punkt A .



Rys.5.5. Efekt żyroskopowy

Wektor $\Delta \vec{L}$ jest skierowany prostopadłe do wektora siły \vec{F} , a zatem nowy kierunek wektora momentu pędu $\vec{L} + \Delta \vec{L}$ będzie obrócony względem początkowego położenia dookoła osi $B-B$. Ponieważ kierunek wektora momentu pędu \vec{L} pokrywa się z kierunkiem osi obrotu żyroskopu, razem z obrotem wektora \vec{L} obróci się również oś żyroskopu, zajmując położenie OA' .

Drugie interesujące zjawisko, które wykazuje żyroskop jest zjawisko *precesji osi żyroskopu*. Rozważmy zjawisko precesji bąka - żyroskopu.

W sytuacji przedstawionej na rysunku 5.6 bąk ma prędkość kątową $\vec{\omega}$ dookoła swej osi symetrii. Ma również moment pędu \vec{L} względem tej osi, która tworzy kąt θ z osią pionową. Na bąk działają dwie siły: siła w punkcie podparcia działa w górę i siła ciężkości przyłożona do środka masy działa w dół. Siła reakcji działająca w górę ma zerowy moment siły względem punktu podparcia, bo ma zerowe ramie. Ciężar mg wytwarza jednak moment siły względem punktu podparcia:

$$\vec{M} = [\vec{r}_C \times \vec{F}] = m[\vec{r}_C \times \vec{F}] , \quad (5.26)$$

gdzie \vec{r}_C określa położenie środka masy. Z określenia iloczynu wektorowego wynika, że wektor momentu siły \vec{M} jest prostopadły do wektorów \vec{r}_C i $m\vec{g}$. A zatem z równania ruchu

dla momentu pędu $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ wynika, że wektor $\Delta\vec{L}$

$$\Delta\vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t , \quad (5.27)$$

jest prostopadły do wektora \vec{L} .

W nowym położeniu osi bąka, które określa wektor momentu pędu $\vec{L} + \Delta\vec{L}$ (rys.5.6) na bąk znów działa moment sił (5.26), który jest prostopadły do wektora $\vec{L} + \Delta\vec{L}$. Ten moment siły znów powoduje następny obrót osi bąka dookoła osi z . W wyniku takiego ruchu oś wirującego bąka wykonuje precesję dookoła osi z . Dla tego, żeby znaleźć prędkość kątową takiej precesji skorzystamy z tego, że (rys.5.6)

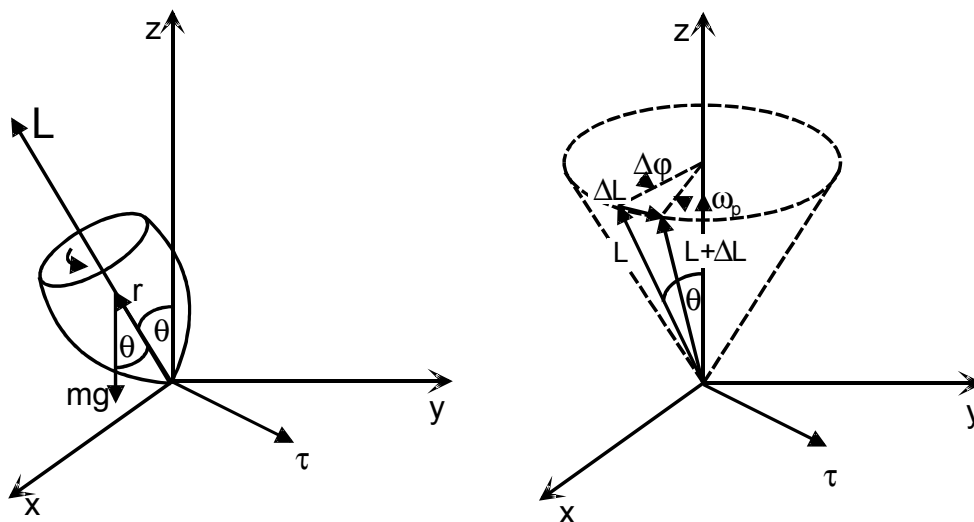
$$\Delta L \cong (L \sin \theta) \cdot \text{tg}(\Delta\varphi) \approx (L \sin \theta) \cdot \Delta\varphi . \quad (5.28)$$

Skąd

$$\Delta\varphi \cong \frac{\Delta L}{L \sin \theta} . \quad (5.29)$$

Po uwzględnieniu (5.27) ze wzoru (5.29) otrzymujemy

$$\Delta\varphi \cong \frac{M\Delta t}{L \sin \theta} . \quad (5.30)$$



Rys.5.6 Precesja żyroskopu

Dzieląc (5.30) przez Δt i zmniejszając Δt do zera w granice otrzymujemy dla prędkości precesji

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{M}{L \cdot \sin \theta} \quad (5.31)$$

Z rys.5.6 widać, że wartość momentu siły \vec{M} jest równa

$$M = r_c mg \cdot \sin \hat{r\vec{g}} = r_c mg \cdot \sin(180^\circ - \theta) = r_c mg \cdot \sin \theta \quad (5.32)$$

A zatem ze wzoru (5.31) znajdujemy

$$\omega_p = \frac{r_c mg}{L} = \frac{r_c mg}{I \cdot \omega} \quad (5.33)$$

Ze wzoru (5.33) wynika, że *prędkość precesji nie zależy od kąta θ* i jest odwrotnie proporcjonalna do wartości momentu pędu.

Równanie (5.32) można zapisać w postaci wektorowej. Najpierw, uwzględniając (5.33), przepisujemy je do postaci

$$M = r_C mg \cdot \sin \theta = \omega_p L \sin \theta . \quad (5.34)$$

Widać, że po prawej stronie równania otrzymaliśmy wartość iloczynu wektorowego $[\vec{\omega}_p \times \vec{L}]$. Tak więc, ostatecznie wyrażenie wiążące prędkość kątową precesji z momentem siły i momentem pędu ma postać

$$\vec{M} = [\vec{\omega}_p \times \vec{L}] . \quad (5.35)$$

Warto podkreślić, że wzór (5.33) jest słuszny tylko gdy

$$\omega_p \ll \omega . \quad (5.36)$$

Związane to z tym, że bąk wiruje jednocześnie dookoła swej osi symetrii oraz dookoła osi z .

W tym przypadku moment pędu bąka \vec{L} określa inny wzór niż $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$.