

Wykład 4

Zderzenia w mechanice

Zderzenia doskonale niesprężyste

Zderzenie dwóch ciał nazywamy *zderzeniem doskonale niesprężystym*, gdy po zderzeniu oba ciała łączą się i poruszają się dalej jako całość. Przykładem takiego zderzenia jest uderzenie kuli w zawieszony worek z piaskiem. Procesy fizyczne, które zachodzą podczas tego zderzenia są bardzo złożone. Jednak nie rozważając tych zjawisk, możemy znaleźć prędkość połączonego ciała, korzystając tylko z zasady zachowania pędu.

Rozważmy zderzenia dwóch ciał o masach m_1 i m_2 , poruszających się ruchem postępowym z prędkościami \vec{v}_1 i \vec{v}_2 . Będziemy rozważali tak zwane *zderzenie centralne*, czyli zderzenie, dla którego w chwili zderzenia środki mas zderzających się ciał znajdują się na *linii zderzenia* (linią zderzenia nazywają wspólną normalną poprowadzoną do powierzchni zderzających się ciał w punkcie styku tych ciał w momencie zderzenia). Na dwa zderzające się ciała nie działa żadna siła zewnętrzna, a zatem wypadkowy pęd dwóch ciał do i po zderzeniu musi być ten sam. Oznaczając prędkość połączonego ciała przez \vec{V} zapiszmy prawo zachowania pędu

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{V} ,$$

skąd dla prędkości \vec{V} otrzymujemy

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} . \quad (4.1)$$

Znajdziemy teraz energię kinetyczną dwóch ciał do i po zderzeniu. Do zderzenia energia kinetyczna dwóch ciał była równa:

$$T_{do} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 . \quad (4.2)$$

Po zderzeniu energia układu jest równa:

$$T_{po} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V^2 . \quad (4.3)$$

Po podstawieniu (4.1) do (4.3), znajdujemy

$$T_{po} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V^2$$

$$= \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \cdot (m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + m_2^2 v_2^2) \quad (4.4)$$

Wydzielimy w tym wzorze energią kinetyczną T_{do} , dodając i odejmując człon

$$\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1^2 + v_2^2):$$

$$T_{po} = \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \cdot (m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_2^2$$

$$+ 2m_1 m_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - m_1 m_2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2) \quad (4.5)$$

$$= T_{do} - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1^2 - 2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + v_2^2) = T_{do} - \frac{1}{2} \mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

Tu

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.6)$$

jest masą zredukowaną.

Ze wzoru (4.5) wynika, że przy zderzeniu niesprężystym energia kinetyczna układu (dwóch zderzających się ciał) maleje:

$$A = T_{po} - T_{do} = -\frac{1}{2} \mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \quad (4.7)$$

Ze wzoru (4.7) wynika, że podczas zderzenia niesprężystego całkowita energia układu nie zachowuje się. Zmiana energii kinetycznej jest równa, jak wiemy, pracy, którą wykonują siły występujące przy zderzeniu (tak zwane *siły zderzeniowe*). A zatem zmniejszenie całkowitej energii kinetycznej układu może być wykorzystane i wykorzystuje się do wykonania pracy (kucie albo wbijanie gwoździ i tp.).

Z równania (4.7) znajdujemy, że jeżeli $v_1 = const$ i $v_2 = const$, największa zmiana energii kinetycznej powstaje gdy wektory \vec{v}_1 i \vec{v}_2 są skierowane w strony przeciwne.

Zadanie. Rozważyć zderzenie dwóch samochodów $m_1 = m_2 \equiv m$ w przypadku a) $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \equiv \vec{v}$; b) $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}$ i $\vec{v}_2 \equiv 0$.

Rozwiązanie: a) Zgodnie z (4.2) całkowita energia kinetyczna dwóch samochodów do zderzenia wynosi

$$T_{do} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m v^2 . \quad (4.8)$$

Po zderzeniu, zgodnie z (4.7) praca sił zderzeniowych jest równa ($\mu = m/2$)

$$A = T_{po} - T_{do} = -\frac{1}{2} \mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = -\frac{m}{4} \cdot 4v^2 = -m v^2 . \quad (4.9)$$

Z porównania wzorów (4.8) i (4.9) widzimy, że po zderzeniu dwa samochody zatrzymują się, a cała energia kinetyczna samochodów idzie na zniszczenie samochodów.

b) W tym przypadku, zgodnie z (4.2)

$$T_{do} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m v^2 . \quad (4.10)$$

Po zderzeniu, zgodnie z (4.7), praca sił zderzeniowych jest równa ($\mu = m/2$)

$$A = T_{po} - T_{do} = -\frac{1}{2} \mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = -\frac{m}{4} \cdot v^2 . \quad (4.11)$$

Z porównania wzorów (4.11) i (4.9) widzimy, że w tym przypadku praca sił zderzeniowych, która idzie na zniszczenie samochodów o 4 razy mniejsza.

Zderzenia doskonale sprężyste

Zderzenie dwóch ciał nazywamy *zderzeniem doskonale sprężystym*, jeżeli podczas tego zderzenia energia całkowita nie ulega zmianie. To oznacza, że przy zderzeniu wewnętrzna energia ciał nie zmienia się, czyli przy tym zderzeniu ciała zderzające uważamy za doskonale sprężyste.

Rozważmy znów centralne zderzenie dwóch ciał o masach m_1 i m_2 , poruszających się ruchem postępowym z prędkościami \vec{v}_1 i \vec{v}_2 .

Zapiszmy prawo zachowania pędu i prawo zachowanie energii dla takiego układu:

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{v}'_1 + m_2 \bar{v}'_2, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad (4.13)$$

Tu \bar{v}'_1 i \bar{v}'_2 - prędkości cząstek po zderzeniu. Przepiszmy wzory (4.12) i (4.13) w postaci:

$$m_1 (\bar{v}_1 - \bar{v}'_1) = m_2 (\bar{v}'_2 - \bar{v}_2) \quad (4.14)$$

$$m_1 (\bar{v}_1^2 - \bar{v}_1'^2) = m_2 (\bar{v}_2'^2 - \bar{v}_2^2). \quad (4.15)$$

Ze wzoru (4.15), biorąc pod uwagę, że $(\bar{v}_1^2 - \bar{v}_1'^2) = (\bar{v}_1 - \bar{v}_1')(\bar{v}_1 + \bar{v}_1')$ i po uwzględnieniu wzoru (4.14) znajdujemy

$$\bar{v}_1 + \bar{v}'_1 = \bar{v}'_2 + \bar{v}_2. \quad (4.16)$$

Równania (4.14) i (4.16) tworzą układ równań algebraicznych względem nie wiadomych prędkości \bar{v}'_1 i \bar{v}'_2 :

$$\bar{v}'_1 - \bar{v}'_2 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1. \quad (4.17a)$$

$$m_1 \bar{v}'_1 + m_2 \bar{v}'_2 = m_2 \bar{v}_2 + m_1 \bar{v}_1. \quad (4.17b)$$

Układ równań (4.17) ma rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_1 &= \frac{\begin{vmatrix} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) & -1 \\ (m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2) & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} = \frac{m_2 \bar{v}_2 - m_2 \bar{v}_1 + m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2}{m_1 + m_2}, \\ &= -\bar{v}_1 + 2 \frac{m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2}{m_1 + m_2} = -\bar{v}_1 + 2\bar{v}_c \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\bar{v}'_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \\ m_1 & (m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 - m_1\bar{v}_2 + m_1\bar{v}_1}{m_1 + m_2} \\ &= -\bar{v}_2 + 2\frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2} = -\bar{v}_2 + 2\bar{v}_c\end{aligned}\quad (4.19)$$

W równaniach (4.18) i (4.19) prędkość

$$\bar{v}_c = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2}\quad (4.20)$$

określa stałą, zgodnie z prawem zachowania pędu (4.12), prędkość środka mas dwóch zderzających się ciał w wybranym (laboratoryjnym) układzie odniesienia.

Jeżeli $m_1 = m_2 \equiv m$, ze wzoru (4.20) mamy

$$\bar{v}_c = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) .\quad (4.21)$$

A zatem ze wzorów (4.18) i (4.19) otrzymujemy:

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}_2, \quad \bar{v}'_2 = \bar{v}_1 ,\quad (4.22)$$

czyli dwa ciała o jednakowej masie po zderzeniu sprężystym zamieniają się prędkościami.

Czasami dogodnie jest rozważać zderzenia cząstek w układzie odniesienia, w którym środek mas spoczywa ($\bar{v}_c = 0$). Taki układ odniesienia nazywamy *układem środka mas*. W tym układzie, zgodnie ze wzorami (4.18) i (4.19) mamy

$$\bar{v}'_1 = -\bar{v}_1, \quad \bar{v}'_2 = -\bar{v}_2 .\quad (4.23)$$

A zatem w układzie środka mas po zderzeniu sprężystym prędkości cząstek zmieniają swoje kierunki.

Moment pędu i moment siły. Równanie ruchu obrotowego.

Prawo zachowania momentu pędu.

Ważnymi charakterystykami ruchu obrotowego ciała materialnego są moment pędu oraz moment siły. *Moment pędu* punktu materialnego względem początku układu współrzędnych określa wzór

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] . \quad (4.24)$$

Różniczkując wzór (4.24) względem czasu i korzystając z drugiej zasady Newtona otrzymujemy następujące równanie ruchu dla wektora momentu pędu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r} \times \vec{F}] . \quad (4.25)$$

Wielkość

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (4.26)$$

nazywamy *momentem siły*.

Po podstawieniu (4.26) do wzoru (4.25) otrzymujemy równanie określające zmiany w czasie momentu pędu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (4.27)$$

Równanie (4.27) jest podstawowym równaniem opisującym ruch obrotowy i nosi nazwę *równania ruchu obrotowego*.

Ze wzoru (4.26) wynika, że jeżeli siła działająca na punkt materialny jest siłą centralną

$$\vec{F} = k \cdot \vec{r} , \quad (4.28)$$

gdzie $k = f(x, y, z)$ jest skalarną funkcją współrzędnych punktu, to

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = k[\vec{r} \times \vec{r}] = 0 ,$$

skąd

$$\vec{L} = const . \quad (4.29)$$

Ze wzoru (4.29) wynika więc, że jeżeli na punkt materialny działa siła centralna (albo suma sił działających na punkt jest równa zero $\vec{F} = 0$), to moment pędu jest wielkością zachowaną (stałą).

Rotacja punktu materialnego dookoła nieruchomej osi

Przy obrocie punktu materialnego dookoła osi, gdy punkt zatacza okrąg, wektor prędkości chwilowej \vec{v} oraz wektor wodzący \vec{r} punktu materialnego są zawsze wzajemnie prostopadłe, a zatem ze wzoru (4.24) otrzymujemy:

$$|\vec{L}| = m\mathbf{v} \cdot r \quad . \quad (4.30)$$

Prędkość liniowa v jest związana z prędkością kątową, jak widzieliśmy na Wykładzie 1, wzorem:

$$v = \omega \cdot r \quad . \quad (4.31)$$

Po podstawieniu (4.31) do (4.30) znajdujemy:

$$|\vec{L}| \equiv L = m\omega \cdot r^2 = m\dot{\phi} \cdot r^2 \quad . \quad (4.32)$$

Ruch w polu sił centralnych

Dla siły centralnej, tj dla siły $\vec{F} = f(x, y, z) \cdot \vec{r}$, tor punktu materialnego znajduje się zawsze w płaszczyźnie. Udowodnimy to twierdzenie.

Dla siły centralnej moment pędu jest całką ruchu

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = const \quad . \quad (4.33)$$

Mnożąc (4.33) skalarnie przez \vec{r} otrzymujemy

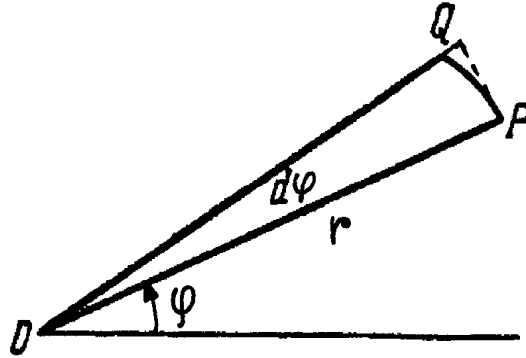
$$(\vec{L} \cdot \vec{r}) = [\vec{r} \times \vec{p}] \cdot \vec{r} = 0 \quad . \quad (4.34)$$

Ze wzoru (4.34) wynika, że wektor \vec{r} jest zawsze prostopadły do \vec{L} . Ponieważ, zgodnie z (4.33) dla sił centralnych wektor \vec{L} ma stały kierunek, to więc wektor $\vec{r}(t)$ będzie zawsze znajdował się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora \vec{L} .

Z uwzględnieniem wzoru (4.32) prawo zachowania momentu pędu dla sił centralnych przyjmuje postać

$$L = mr^2\dot{\phi} = const \quad . \quad (4.35)$$

Prawo zachowania (4.35) ma prostą interpretację geometryczną. Rozważmy punkt materialny, który za okres czasu $t, t+dt$ przechodzi od punktu P do punktu Q . Jeżeli dt jest bardzo małym to pole powierzchni trójkąta OPQ będzie polem, które zakreśla wektor \vec{r} w chwili dt .



Rys.4.1. Prędkość polowa

Pole tego trójkąta wynosi:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2}(OP) \cdot (PQ) \\ &= \frac{1}{2}r[r \cdot \sin(d\varphi)] \approx \frac{1}{2}r^2 d\varphi \end{aligned}$$

Skąd

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \quad (4.36)$$

Wielkość $d\sigma/dt$ nazywamy *prędkością polową (albo wycinkową sektorową)*.

Przez prędkość polową wzór (4.36) możemy zapisać w postaci

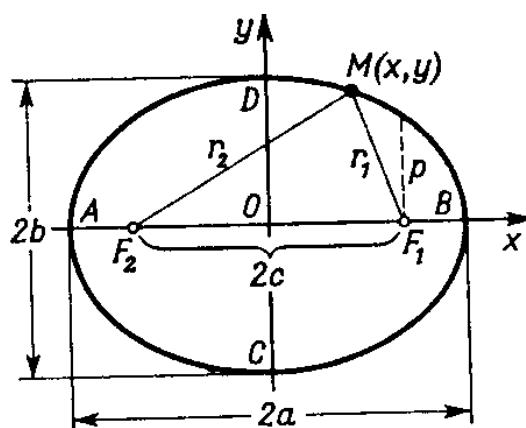
$$L = 2m \frac{d\sigma}{dt} = const \quad (4.37)$$

Ze wzoru (4.37) wynika, że dla sił centralnych, *prędkość polowa (sektorowa) jest całką ruchu*.
 Innymi słowy - wektor wodzący punktu zakreśla równe pola w tych samych odcinkach czasu.

Prawa Keplera. Prawa rządzące ruchem planet

Przykładem siły centralnej jest siła grawitacyjna. Prawa, które rządzą ruchem planet, ustanowił Kepler analizując doświadczalne dane dotyczące obserwacji ruchu planet w latach 1609-1619. Te prawa mówią, że:

1. Każda planeta porusza się po elipsie, w której w jednym z ognisk znajduje się Słońce;



Rys.4.2 Elipsa

Elipsą nazywamy taką zamkniętą krzywą na płaszczyźnie, dla której suma odległości od dwóch punktów F_1 i F_2 , które nazywamy *ogniskami*, do dowolnego punktu M jest wielkością stałą (rys.4.2):

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (4.38)$$

Równanie elipsy ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.39)$$

2. *Prędkość polowa względem Słońca każdej planety jest stała (oczywiście dla różnych planet prędkości będą różne).*

3. *Iloraz kwadratów okresów obiegu poszczególnych planet i sześciątów wielkiej półosi (T^2/a^3) jest stały i dla wszystkich planet jednakowy.*

Prawo drugie Keplera udowodniliśmy wyżej. Udowodnienie prawa pierwszego i trzeciego wymaga trochę zaawansowanej matematyki.

Nie wszystkie ciała niebieskie poruszają się po elipsom. Na przykład komety poruszają się po hiperbole lub parabole (określenie tych krzywych podajemy później). Nie rozwiązując równań ruchu, rozważmy ruch planet w polu grawitacyjnym dużej gwiazdy (na przykład Słońca), korzystając tylko z wielkości, które są stałe. Dla układu zamkniętego (odosobnionego) planeta + Słońce wielkościami stałymi są energia układu i moment pędu (siła grawitacyjna jest siłą centralną). Wzór na energię takiego układu ma postać:

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} - G \frac{m \cdot M}{r} = const . \quad (4.40)$$

Tu m jest masą planety, a M jest masą Słońca. We wzorze (4.40) odrzuciliśmy energią kinetyczną Słońca ponieważ zwykle $M \gg m$ i powolny ruch Słońca dookoła środka masy układu możemy zaniedbać.

Oprócz stałej energii taki układ ma jeszcze jedną całkę ruchu - moment pędu, określony wzorem (4.35). Niech w określonej chwili planeta znajduje się w punkcie A (rys.4.3). Wprowadźmy jednostkowy wektor \vec{e}_r skierowany od centrum siły grawitacyjnej (od Słońca) ku punktowi A . Wtedy wektor wiodący planety możemy zapisać w postaci:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r . \quad (4.41)$$

Jednostkowy wektor \vec{e}_r nie jest wektorem stałym i zmienia swój kierunek wraz ze zmianą położenia planety na orbicie.

Wektor prędkości chwilowej planety znajdujemy różniczkując wzór (4.41) względem czasu:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} . \quad (4.42)$$

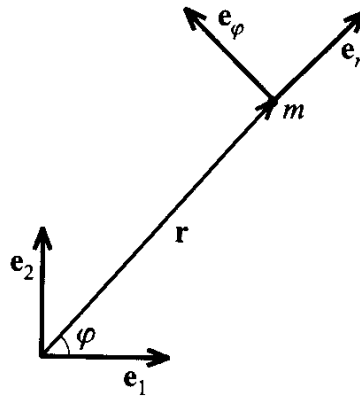
Żeby znaleźć wektor $d\vec{e}_r / dt$ wprowadźmy jednostkowy wektor \vec{e}_φ , prostopadły do wektora \vec{e}_r (rys.4.3) i zapiszmy wektory \vec{e}_r i \vec{e}_φ przez współrzędne w nieruchomym układzie kartezyjskim (rys.4.3):

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \varphi \cdot \vec{e}_y , \quad (4.43)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y . \quad (4.44)$$

We wzorach (4.43) i (4.44) wektory \vec{e}_x i \vec{e}_y są jednostkowymi nieruchomymi wektorami a zatem

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \cdot \vec{e}_y \equiv \omega \cdot \vec{e}_\varphi . \quad (4.45)$$



Rys.4.3

Tu skorzystaliśmy ze wzoru (4.44) oraz ze wzorów

$$\frac{d \cos \varphi(t)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi , \quad (4.46)$$

$$\frac{d \sin \varphi(t)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi . \quad (4.47)$$

Po podstawieniu (4.45) do wzoru (4.42), znajdujemy

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi . \quad (4.48)$$

Ze wzoru (4.48) wynika, że w przypadku krzywoliniowego ruchu prędkość zawiera dwa składniki:

$$\vec{v}_r = \dot{r} \cdot \vec{e}_r . \quad (4.49a)$$

oraz

$$\vec{v}_\phi = r\dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi . \quad (4.49b)$$

Korzystając ze wzorów (4.49a) i (4.49b) łatwo znaleźć moment pędu planety względem początku układu

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = mr \cdot [\vec{e}_r \times (\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi)] = mr^2\dot{\phi}[\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi] = mr^2\dot{\phi} \cdot \vec{e}_z . \quad (4.50)$$

Ponieważ jednostkowe wektory \vec{e}_r i \vec{e}_ϕ są wzajemnie prostopadłe łatwo znaleźć:

$$v^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v}) = v_r^2 + v_\phi^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\phi}^2 . \quad (4.51)$$

Podstawiając (4.51) do wzoru (4.40), otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m \cdot M}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \cdot \dot{\phi}^2 - G\frac{m \cdot M}{r} . \quad (4.52)$$

Biorąc pod uwagę wzór (4.50), wzór (4.52) możemy zapisać w postaci

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{m \cdot M}{r} = const . \quad (4.53)$$

Wprowadzając efektywną energię potencjalną

$$U_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{m \cdot M}{r} , \quad (4.54)$$

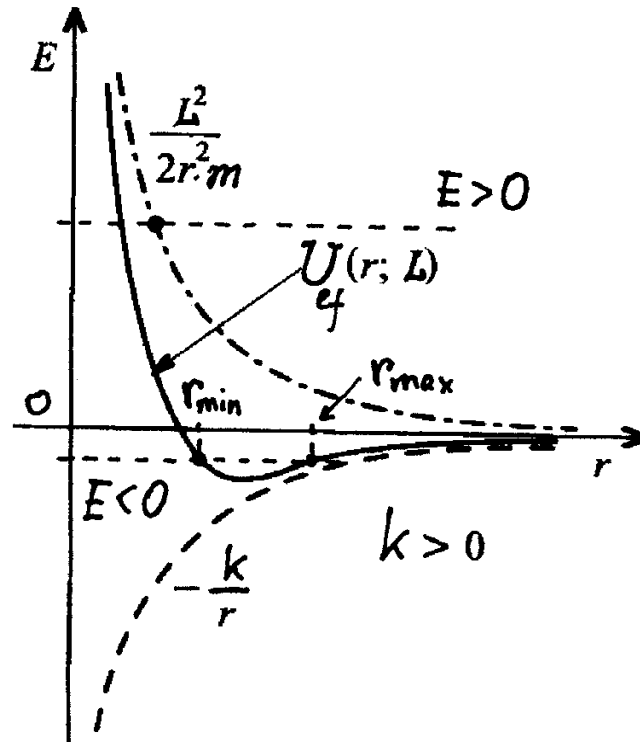
wzór (4.53) możemy zapisać w postaci

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef}(r) = const . \quad (4.55)$$

We wzorze (4.54) wyraz $L^2/2mr^2$ nazywa się *odśrodkową energią potencjalną*. Wykres funkcji określającej efektywną energię potencjalną

$$U_{ef}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (4.56)$$

ma postać przedstawioną na rys.4.4. We wzorze (4.56) $k = GmM$.



Rys.4.4. Zależność $U_{ef}(r)$.

Funkcja (4.56) ma minimum gdy

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0 ,$$

czyli przy

$$r_m = \frac{L^2}{k \cdot m} . \quad (4.57)$$

Jeżeli $r = r_m$ ze wzoru (IV.56) otrzymujemy

$$(U_{ef})_{\min} = -\frac{k}{2r_m} < 0 . \quad (4.58)$$

Z rys.4.4 wynika, że jeżeli $(E - U_{ef}) \geq 0$, ruch planety zachodzi w obszarze ograniczonym ($r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$). Z wykresu funkcji $U_{ef}(r)$ widać, że tor punktu będzie ograniczonym w przestrzeni przy $E < 0$.

Ponieważ $E = T + U$, a T jest zawsze wielkością dodatnią, to ograniczonemu w przestrzeni ruchowi ($E < 0$) odpowiadają przypadki, dla których

$$T \leq |U| . \quad (4.59)$$

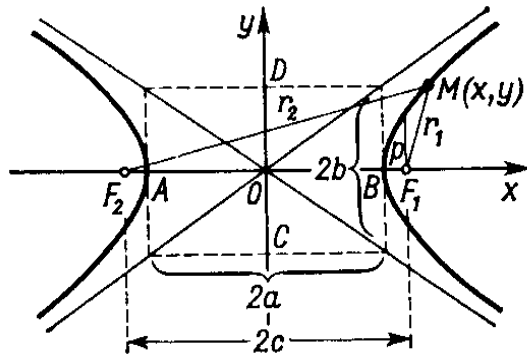
Torem planety w tym przypadku będzie *elipsa*.

Jeżeli $E > 0$, z rys.4.4 widać, że ruch cząstki zachodzi w nieograniczonym obszarze ($r \geq r_{\min}$). W tym przypadku $T > |U|$, czyli energia kinetyczna cząstki przewyższa energię potencjalną. Torem planety w tym przypadku będzie *lewa gałąź hiperboli* (rys.4.5). *Hiperbolą* nazywamy taką nie zamkniętą krzywą na płaszczyźnie, dla której bezwzględna różnica odległości od dwóch punktów F_1 i F_2 , które nazywamy *ogniskami*, do dowolnego punktu M jest wielkością stałą (rys.4.5):

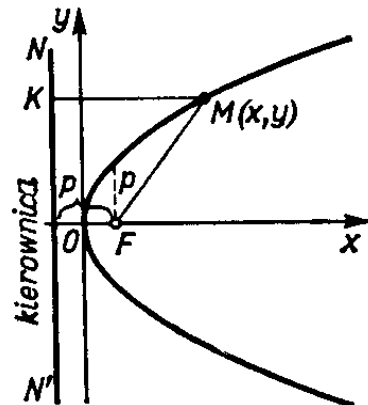
$$F_1M - F_2M = 2a . \quad (4.60)$$

Równanie hiperboli ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (4.61)$$



Rys.4.5. Hiperbola



Rys.4.6. Parabola

A więc torem ciała niebieskiego w polu grawitacyjnym gwiazdy będzie:

1. <i>hiperbola</i> ,	jeżeli $E > 0$	3. <i>elipsa</i> ,	jeżeli $0 > E > (U_{ef})_{\min}$
2. <i>parabola</i> ,	jeżeli $E = 0$	4. <i>okrąg</i> ,	jeżeli $E = (U_{ef})_{\min}$

Przypadek $E < (U_{ef})_{\min}$ nie realizuje się, ponieważ wtedy $E - U_{ef} = m\dot{r}^2 / 2 < 0$.

Prędkości kosmiczne

Rozważmy statek kosmiczny o masie m i prędkości v , który porusza się w polu grawitacyjnym Ziemi. Tu v jest ta prędkość, którą otrzymał statek po wyłączeniu silnika. Będziemy rozważali ruch statku w pobliżu powierzchni Ziemi, a zatem zaniedbujemy grawitacyjnymi oddziaływaniami na statek Słońca oraz innych planet, które znajdują się dość daleko od statku. Całkowita energia statku w pole grawitacyjnym Ziemi wynosi:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m \cdot M}{r}. \quad (4.64)$$

Ponieważ waga statku, w dobrym przybliżeniu, jest równa

$$P = mg = G\frac{m \cdot M}{r^2}, \quad (4.65)$$

gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym Ziemi, ze wzoru (4.65) otrzymujemy

$$G\frac{m \cdot M}{r} = mg \cdot r. \quad (4.66)$$

A zatem dla energii statku możemy zapisać

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mg \cdot r. \quad (4.67)$$

Wyżej widzieliśmy, że ruch ciała w polu grawitacyjnym będzie odbywał się po elipsie, jeżeli $E < 0$. Dla orbity kołowej

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{U}{2} = \frac{mgr}{2}. \quad (4.68)$$

Skąd otrzymujemy

$$v_1 = \sqrt{r \cdot g}. \quad (4.69)$$

A zatem jeżeli prędkość statku będzie mniejsza niż v_1 , to statek kosmiczny pozostanie na orbicie okołoziemskiej jako sztuczna satelita. Łatwo oszacować prędkość v_1 zakładając, że r pokrywa się z promieniem Ziemi ($r \approx 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$). Wtedy

$$v_1 = \sqrt{6.4 \cdot 10^6 \cdot 9.8} \text{ m/s} \approx \sqrt{64 \cdot 10^3} \text{ m/s} = 8 \text{ km/s} . \quad (4.70)$$

Prędkość v_1 nosi nazwę *pierwszej prędkości kosmicznej*.

Drugą prędkością kosmiczną nazywamy minimalną prędkość, jaką musi mieć statek, aby mógłby pokonać przyciąganie ziemskie i stać się sztuczna satelitą Słońca. Oszacujemy tą prędkość. Wyżej widzieliśmy, że ruch ciała w polu grawitacyjnym będzie nie ograniczony, jeżeli $E \geq 0$. Jeśli $E = 0$, ze wzoru (4.67) otrzymujemy

$$v_2 = \sqrt{2r \cdot g} = 1.4 \cdot v_1 = 11.2 \text{ km/s} . \quad (4.71)$$

Trzecią prędkością kosmiczną nazywamy minimalną prędkość, jaką należy nadać startującemu z Ziemi statkowi aby mógł on pokonać przyciąganie Słońca i opuścić układ Słoneczny. Dla oszacowania tej prędkości skorzystamy ze wzoru (4.64). Jeśli $E = 0$, ze wzoru (4.64) otrzymujemy

$$v_3 = \sqrt{2G \cdot \frac{M_S}{r}} . \quad (4.72)$$

Biorąc pod uwagę, iż stała grawitacyjna $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, a masa Słońca $M_S = 1.97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, oraz przyjmując że r jest promieniem orbity Ziemi dookoła Słońca ($r = R_Z = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$), ze wzoru (4.72) otrzymujemy

$$v_3 = \sqrt{2G \cdot \frac{M_S}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.97 \cdot 10^{30}}{1.5 \cdot 10^{11}}} = 4.2 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 42 \text{ km/s} . \quad (4.73)$$