# Wykład 2

## Mechanika Newtona

Dynamika jest nauką, która zajmuję się ruchem ciał z uwzględnieniem sił, które działają na ciało. Podstawą mechaniki klasycznej są trzy doświadczalne zasady, które po raz pierwszy byłe sformułowane przez Newtona w 1687 roku.

**Pierwsza zasada dynamiki. Inercjalne układy odniesienia. Siły rzeczywiste i pozorne.**

Pierwsza zasada dynamiki albo zasada bezwładności brzmi: *Istnieją taki układy odniesienia, w których punkt materialny znajduje się w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego, dopóki siły działające na ten punkt nie zmienią tego stanu.* Siła tutaj, która może zmienić ruch bezwładny punktu materialnego, jest miarą oddziaływania ciała z drugimi ciałami materialnymi albo z polami fizycznymi. Siły taki nazywamy *siłami rzeczywistymi*. Dla sił rzeczywistych zawrze możemy wskazać źródło fizyczne (ciało albo pole fizyczne) tej siły.

Z pierwszej zasady Newtona wynika, że jeżeli na punkt materialny nie działa żadna siła, to punkt materialny porusza się ze stałą prędkością wzdłuż prostej a wektor wodzący tego punktu jest funkcją liniową czasu

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{\upsilon} \cdot t \; . \tag{2.1}$$

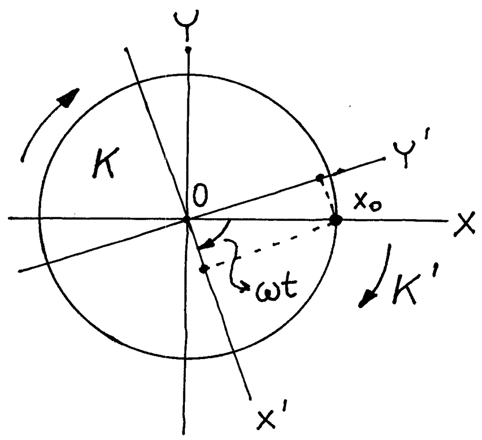
Tu $\vec{r_0}$ - wektor położenia punktu materialnego w początkowej chwili $t = 0$, a $\vec{\upsilon}$ - nie zależny od czasu wektor jego prędkości w wybranym układzie odniesienia.

Na pierwszy rzut oka ta zasada czasami jest sprzeczna z doświadczeniami. Rozważmy na przykład bąk, który wykonuje ruch obrotowy z dużą prędkością kątową. Na ten bąk nie działa żadna siła, a nikt nie powie, że bąk znajduje się w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego. Okazuje się, że nie ma tu sprzeczności z pierwszą zasada dynamiki, ponieważ bąk nie możemy rozważać jako punkt materialny. Jak zobaczymy później ruch bąka lepiej opisuje model ciała sztywnego albo bryły sztywnej. Podkreślimy jeszcze raz, że pierwsza zasada dynamiki dotyczy punktu materialnego, który nie ma wymiarów, a zatem nie może wykonywać ruchów obrotowych.

Łatwo sprawdzić, że wzór (2.1) jest słuszny nie dla wszystkich układów odniesienia. Jako przykład, rozważmy układ odniesienia $K$ i niech w tym układzie na punkt materialny $A$ $(x = x_0, y = z = 0)$ nie działa żadna siła i punkt znajduje się w spoczynku, tj $\vec{\upsilon} = 0$.

Rozpatrzmy teraz ten sam punkt materialny $A$ w układzie odniesienia $K^/$, który obraca się względem układu $K$ dookoła osi $Oz$ ze stałą prędkością kątową $\omega$ („karuzela"). Względem układu odniesienia $K^/$ zależność współrzędnych punktu $A$ od czasu opisuje wzór

$$x^/ = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad y^/ = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad z^/ = z \ . \qquad (2.2)$$




Rys.2.1. Określenie położenia punktu materialnego w dwóch układach odniesienia $K$ i $K^/$.

Z porównania (2.1) i (2.2) widzimy, że w układzie odniesienia $K^/$ punkt materialny porusza się z przyspieszeniem, chociaż żadna siła rzeczywista nie działa na ten punkt. Więc w układzie odniesienia $K^/$ pierwsza zasada Newtona nie jest słuszna. Układy odniesienia, w których dla odosobnionego (izolowanego) punktu materialnego równanie (2.1) jest spełnione nazywamy *układami inercjalnymi*. Odpowiednio, układy odniesienia, w których wzór (2.1) nie jest słusznym nazywamy *układami nieinercjalnymi*.

W układach nieinercjalnych, jak zobaczymy później, na punkt materialny zaczynają działać siły pozorne *albo siły bezwładności*. Przykładem takiej siły, jak wiemy z podstaw fizyki, jest siła Coriolisa. Dla sił pozornych, które powstają w nieinercjalnych układach odniesienia nie istnieje źródło fizyczne (ciało albo pole fizyczne) tych sił. Chociaż skutki działania tych sił na ciała fizyczne takie same, jak skutki działania sił rzeczywistych (ciała poruszają się, deformują się i tp.).

## Druga zasada dynamiki. Siła, masa, pęd. Zasada zachowania pędu.

Z pierwszej zasady mechaniki wynika, że jeżeli na punkt materialny działa siła, punkt zmienia swoją prędkość, czyli zaczyna poruszać się z przyspieszeniem. Z doświadczeń wynika, że kierunek przyspieszenia albo kierunek zmiany prędkości punktu materialnego pokrywa się z kierunkiem działania siły. A zatem możemy zapisać, że przyspieszenie, które doznaje punkt wskutek działania siły jest wprost proporcjonalna do działającej na niego siły:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \propto \vec{F} \quad . \tag{2.3}$$

Z doświadczeń również wynika, że na przykład dwie małe jednakowe kuli, jedna z drzewna, a druga z żelaza, doznają różne przyspieszenia, gdy działa na nich taka sama siła. A mianowicie kula z drzewna doznaje większego przyspieszenia niż kula z żelaza. Dla tego, żeby uwzględnić ten fakt, zapiszmy wzór (2.3) w postaci

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F} \quad . \tag{2.4}$$

We wzorze (2.4) wielkość $m$ nosi nazwę *masy bezwładnej punktu materialnego (ciała).* Masa ciała jest wewnętrzną charakterystyką ciała i zależy od tego, z czego jest zbudowane to ciało. Pod wpływem pewnej siły określona zmiana prędkości ciała mającego większą masę zachodzi w dłuższym czasie niż w przypadku ciała o mniejszej masie (ze wzoru (2.4) wynika, że $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{F}\cdot(\Delta t/m)$).

Z doświadczeń wynika, że jeżeli mamy do czynienia z ruchom ciała o prędkości znacznie mniejszej niż prędkość światła $c$ ($c$=3 $10^8$ *m/s*) masa bezwładna ciała jest stała. Jednak, jeżeli ciało zaczyna poruczać się z prędkością porównywalną z prędkością światła, masa zaczyna rosnąc dążąc do nieskończoności. Ruchami ciał z takimi dużymi prędkościami zajmuje się *szczególna teoria względności Einsteina* i o tym będzie mowa później. Masę bezwładną ciała mierzymy za pomocą wagi równoramiennej, korzystając ze wzorców. W układzie SI jednostką masy jest kilogram (*kg*) - pewien cylinder platynowo-irydowy.

Oprócz masy bezwładnej ciała istnieje *masa ważka* ciała, którą mierzymy dynamometrem. Masa ważka ciała jest miarą oddziaływania grawitacyjnego ciała i występuję we wzorze opisującym prawo powszechnego ciążenia Newtona. Z doświadczeń oraz ogólnej teorii względności Einsteina wynika, że *masa bezwładna równa się masie ważkiej.*

Ważną rolę w fizyce odgrywa wielkość fizyczna, która nosi nazwę *pędu*. Pędem ciała nazywamy iloczyn jego masy i prędkości:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \ . \tag{2.5}$$

Druga zasada dynamiki albo zasada ruchu brzmi: *Zmiana pędu punktu materialnego w układzie inercjalnym jest proporcjonalna względem siły działającej na punkt i ma kierunek prostej, wzdłuż której ta siła działa*:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ . \tag{2.6}$$

Wzór (2.6) jest słuszny w mechanice nie relatywistycznej jak i w mechanice relatywistycznej. Jednak, ponieważ w mechanice nie relatywistycznej $(\upsilon << c)$ masa ciała jest stała w czasie ruchu, wzór (2.6) możemy zapisać w postaci

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \ . \tag{2.7}$$

W układzie SI jednostką siły jest niuton (1 *N*). $1N = 1kg \cdot 1m/s^2$, czyli siła w 1 niuton nadaje masie w 1 *kg* przyspieszenie 1 $m/s^2$.

W ogólnym przypadku, na ciało może działać równocześnie kilka sił: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$. Z doświadczeń wynika, że pod wpływem tych sił ciało porusza się tak jakby działała nań jedna siła $\vec{F}$, która równa sumie wektorowej wszystkich działających na ciało sil:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ . \tag{2.8}$$

W niektórych przypadkach wypadkowa siła jest równa zeru, ale to nie oznacza, że na ciało nie działają żadne siły. Na przykład na człowieka stojącego na podłodze działa siła przyciągania ze strony Ziemi (ciężar ciała) a zatem, zgodnie z drugą zasadą dynamiki człowiek musi poruszać się w kierunku centrum Ziemi. Tego jednak nie obserwujemy wskutek tego, że ze strony podłogi na ciało działa siła, która równoważy ciężar ciała tak, że wypadkowa siła jest równa zeru.

Równanie (2.8) wyraża bardzo ważną zasadę w fizyce - *zasadę superpozycji sił*. Ta zasada też jest jedną z podstawowych zasad w fizyce i słuszność tej zasady wynika tylko z doświadczenia.

W ogólnym przypadku wszystkie siły $\vec{F}_i$ mogą być funkcjami położenia punktu $(\vec{r})$, jego prędkości $(\vec{\upsilon})$ oraz czasu. Z matematycznego punktu widzenia wektorowe równanie (2.7) stanowi układ trzech *zwykłych równań różniczkowych drugiego rzędu***.** Rozwiązaniem tych równań będziemy zajmowali się później w mechanice teoretycznej.

Jeżeli znana jest masa $m$ punktu materialnego i jego położenie w każdej chwili (na przykład z obserwacji ruchu punktu), to bardzo łatwo wyznaczyć siły, które ten ruch spowodowały: wektor siły $\vec{F}$ otrzymuje się prosto przez dwukrotne różniczkowanie wektora $\vec{r}(t)$ względem czasu i mnożenie wyniku przez masę $m$. Znacznie trudniejszym zadaniem jest jednak znalezienie wektorów położenia punktów $\vec{r}(t)$ jako funkcji czasu, jeżeli zadane są siły jako funkcje położeń punktów, ich prędkości i czasu. W ogólnym przypadku, nie zawsze możemy znaleźć analityczne rozwiązanie układu równań (2.7). Gdy rozwiązanie analityczne równań ruchu (2.7) jest niemożliwe, jedynie efektywne rozwiązanie można uzyskać tylko za pomocą metod numerycznych używając komputera. Właśnie z rozwojem technik komputerowych mechanika i w ogóle fizyka nabrała nowe życie związane z badaniami chaosu deterministycznego i innych zagadnień.

Z drugiej zasady Newtona (2.6) wynika, że jeżeli suma sił działających na punkt materialny jest równa zeru ( $\vec{F} = 0$ ), to

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \ , \tag{2.9}$$

skąd

$$\vec{p} = const \ . \tag{2.10}$$

Wzór (2.10) wyraża tak zwane *prawo zachowania pędu*: jeżeli suma sił działających na punkt materialny jest równa zeru, to pęd punktu materialnego jest stałym nie zależnym od czasu.

**Przykłady sił rzeczywistych**

W przyrodzie istnieje mnóstwo sił określających oddziaływania ciał. Na razie rozważmy tylko cztery siły, które będziemy często rozważać w tym wykładzie. Podkreślimy, że prawa rządzące tymi, jak również innymi podstawowymi oddziaływaniami, wynikają tylko z doświadczeń.

1. *Prawo powszechnego ciążenia Newtona*: Dwa punkty materialne o masach $m_1$ i $m_2$ przyciągają się ku siebie z siłą *grawitacyjną*:

$$F \equiv \left|\vec{F}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad . \tag{2.11}$$

Tu $G$ jest *stałą grawitacyjną*, a $r$ jest odległością między punktami. Siła ta jest skierowana zawsze od jednego punktu do drugiego.

2. *Prawo Coulomba*: Dwa punkty materialne o ładunkach elektrycznych $q_1$ i $q_2$ oddziałują między sobą z siłą *Coulomba*:

$$F \equiv \left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad . \tag{2.12}$$

Tu $\varepsilon_0$ jest *pewną stałą*, a $r$ jest odległością między punktami. Z porównania wzorów (2.11) i (2.12) widzimy, że siły te są podobne do siebie. Jednak w odróżnieniu od siły grawitacyjnej siła Coulomba może być dodatniej (siła przyciągania) jak i siłą ujemną (siła odpychania). Związane to jest z tym, że ładunki mogą być jak dodatnie, tak i ujemne. Masa ciała zawsze jest dodatnia.

3. *Siła sprężysta albo siła Hooke'a*: Na ciało (sprężynę) wydłużone o $\Delta\vec{r}$ działa siła Hooke'a

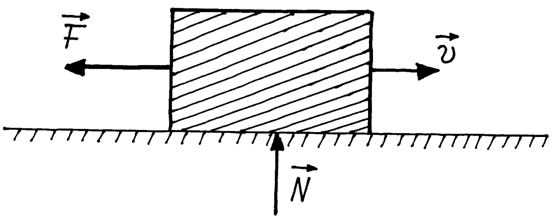
$$\vec{F} = -k \cdot \Delta\vec{r} \quad . \tag{2.13}$$

Tu stała $k$ nazywa się współczynnikiem sprężystości. Siła sprężysta jest zawsze skierowana w stronę przeciwną niż wektor $\Delta\vec{r}$ .

4. *Siła tarcia*: Na ciało poruszające się po powierzchni innego ciała działa siła *tarcia*, która przeciwstawia ruchowi ciała. Siła ta prawie nie zależy od wielkości powierzchni zetknięcia i jest proporcjonalna do siły normalnej działającej ze strony jednej powierzchni na drugą: Siła tarcia może być statycznej i dynamicznej.

Maksymalna siła tarcia *statycznego* jest równa najmniejszej sile, jaką musimy przyłożyć do ciała, aby to ciało ruszyło z miejsca.

$$F_s = \left|\vec{F}_s\right| = \mu_s N \quad . \tag{2.14}$$




Rys.2.2. Siła tarcia.

Tu $\mu_s$ jest współczynnikiem tarcia statycznego, a $N$ - wartość bezwzględna siły normalnej.

Siła tarcia *dynamicznego* albo *kinetycznego* określa wzór podobny do wzoru (2.14):

$$F_k = \left|\vec{F}_k\right| = \mu_k N \quad . \tag{2.15}$$

Tu $\mu_k$ jest współczynnikiem tarcia kinetycznego. Zwykle $\mu_s > \mu_k$ . Siła tarcia zawsze jest prostopadła do siły normalnej $\vec{N}$ .

**Trzecia zasada dynamiki**

Trzecia zasada dynamiki albo zasada akcji i reakcji brzmi. *Siły, jakimi dwa punkty materialne działają jeden na drugi, są sobie równe co do wartości bezwzględnej; siły te skierowany są wzdłuż prostej łączącej dwa punkty i mają przeciwny zwrot:*

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad . \tag{2.16}$$

Tu $\vec{F}_{21}$ jest siła, która działa ze strony drugiego punktu na pierwszy punkt. $\vec{F}_{12}$ - siła działająca na drugi punkt, wywołana przez punkt pierwszy. Trzecia zasada Newtona dotyczy siły oddziaływania między dwoma punktami materialnymi, czyli dotyczy tylko sił rzeczywistych. Dla sil bezwładności ta zasada nie jest słuszna.

**Ruch ciała o zmiennej masie. Siła odrzutu.**

Jako przykład zastosowania zasad Newtona rozważmy ruch ciała masa, którego zmienia w ciągu ruchu ciała. W mechanice klasycznej masa ciała może zmieniać się tylko wskutek dołączania albo odłączania cząstek jakieś substancji. Przykładem takiego ciała jest rakieta.

Niech pęd rakiety w chwili $t$ wynosi $\vec{p}_r(t) = m(t)\vec{\upsilon}(t)$. Tu $m(t)$ jest masa rakiety w chwili $t$, a $\vec{\upsilon}(t)$ - prędkość rakiety w tej samej chwili. W chwili $t+\Delta t$ masa rakiety, wskutek strumienia wypływających spalinowych cząstek gazu, zmalała o $\Delta m = m(t) - m(t+\Delta t)$, a prędkość zwiększyła się o $\Delta\vec{\upsilon}$. Więc pęd rakiety w chwili $t+\Delta t$ jest równy $\vec{p}_r(t+\Delta t) = (m-\Delta m)\cdot(\vec{\upsilon}+\Delta\vec{\upsilon})$.

Pęd gazów wyrzuconych rakietą za czas $\Delta t$ wynosi $\vec{p}_g(t) = \Delta m \vec{\upsilon}_g(t)$. Tu $\vec{\upsilon}_g(t)$ jest prędkością odłączających się gazów. Wypadkowy pęd układu (rakieta plus wyrzucone gazy) w chwili $t+\Delta t$ wynosi

$$\vec{P}(t+\Delta t) = (m-\Delta m)\cdot(\vec{\upsilon}+\Delta\vec{\upsilon}) + \Delta m \cdot \vec{\upsilon}_g \ . \tag{2.17}$$

Tempo zmiany pędu układu za czas $\Delta t$ określa wzór:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} = m\cdot\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t}\left[\vec{\upsilon}_g - (\vec{\upsilon}+\Delta\vec{\upsilon})\right] \ .$$

Jeżeli teraz w tym wzorze $\Delta t$ dąży do zera, $\Delta\vec{P}/\Delta t$ przechodzi w $d\vec{P}/dt$, $\Delta\vec{\upsilon}/\Delta t$ przechodzi w $d\vec{\upsilon}/dt$, a $\Delta m/\Delta t$ przechodzi w

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m(t) - m(t+\Delta t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -\frac{dm}{dt} \ .$$

A więc otrzymujemy

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \frac{dm}{dt}\cdot\vec{u} \ . . \tag{2.18}$$

We wzorze (2.18) $\vec{u} = \vec{\upsilon}_g - \vec{\upsilon}$ jest prędkością względną wyrzucanych gazów względem rakiety.

Z drugiej zasady Newtona zmiana pędu za czas $dt$ jest równa:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \frac{dm}{dt}\cdot\vec{u} = \vec{F} \ . \tag{2.19}$$

We wzorze (2.19) $\vec{F}$ jest siła działającą na rakietą i gazy (na przykład siła grawitacyjna Ziemi, Słońca). Ze wzoru (2.19) wynika, że zmianę pędu rakiety określa wzór:

$$m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u} \quad . \tag{2.20}$$

Równanie (2.20) nazywa się *równaniem Mieszczerskiego*.

Wzór (2.20) jest podobny do wzoru (2.7). Jednak ten wzór zawiera dodatkową siłę

$$\vec{F}_o = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u} \quad , \tag{2.21}$$

która nosi nazwę *siły odrzutu*. Siła odrzutu opisuję wpływ mechaniczny, który wywierają na rakietę gazy wyrzucone. Jeżeli $\vec{F} = 0$, rakieta zmienia swoją prędkość tylko pod wpływem siły odrzutu i równanie ruchu rakiety przyjmuje postać

$$m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u} \quad . \tag{2.22}$$

Prędkości $\vec{\upsilon}$ i $\vec{u}$ mają przeciwne kierunki, a zatem, jeżeli zakładamy, że prędkość względna strugi gazu jest stała, wzór (2.22) możemy zapisać w postać:

$$d\upsilon = -u \cdot \frac{dm}{m} = -u \cdot d(\ln m) \quad . \tag{2.23}$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru $d(\ln x) = dx / x$. Rozwiązanie równania (2.23) ma postać:

$$\upsilon(t) = -u \cdot \ln m(t) + C \quad , \tag{2.24}$$

gzie $C$ jest stała, którą znajdziemy z warunków początkowych. Niech w chwili początkowej $t = 0$ masa i prędkość rakiety są równe $\upsilon(0) = 0$, $m(0) = m_0$. Wtedy, ze wzoru (2.24) otrzymujemy

$$C = u \cdot \ln m_0 \quad , \tag{2.25}$$

Po podstawieniu (2.25) do wzoru (2.24) znajdujemy

$$\upsilon(t) = -u \cdot \ln m(t) + u \cdot \ln m_0 = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right), \tag{2.26}$$

Wzór (2.26) nosi nazwę wzoru *Cyolkowskiego*. Z tego wzoru łatwo obliczyć, jaka musi być startowa masa rakiety dla tego, żeby rakieta stała sztuczną satelitą (sputnikiem). Później wykażemy, że dla tego, żeby rakieta stała sputnikiem Ziemi, ona powinna mieć prędkość nie mniejszą niż tak zwana pierwsza prędkość kosmiczna $\upsilon_1 = 8 \ \ km/s$. Zwykle prędkość względna gazów jest równa $u \approx 4 \ \ km/s$, a zatem ze wzoru (2.26) znajdujemy

$$\frac{m_0}{m} = e^{\upsilon(t)/u} = e^{8/4} = (2.7)^2 = 7.3 \approx 7 \ , \tag{2.27}$$

Ze wzoru (2.27) wynika, że dla tego, żeby rakieta stała sztuczną satelitą masa startowa rakiety musi zawierać paliwa ($m_g = m_0 - m = (6/7)\cdot m_0$) masa którego jest prawie 6/7 masy rakiety i tylko 1/7 część masy startowej rakiety pozostaje na orbicie jako satelita sztuczna.

**Zasada względności Galileusza.**

Udowodnimy, że układ odniesienia będzie również układem inercjalnym, jeżeli on porusza się względem drugiego inercjalnego układu odniesienia się bez przyspieszenia.

Rozważmy dwa układy współrzędnych $K$ i $K^/$ (rys.2.3) i niech układ $K$ jest inercjalnym układem odniesienia, a układ $K^/$ porusza się względem układu $K$ ze stałą prędkością $\vec{\upsilon}_0$. Założmy, że w początkowej chwili $t = 0$ początki $O$ i $O^/$ układów odniesienia $K$ i $K^/$ pokrywają się i zegarki układów wskazują ten sam czas.

Niech w chwili $t$ poruszający się punkt materialny znajduje się w przestrzeni w punkcie $A$. Z rys.2.3 wynika, że między wektorami wodzącymi punktu w układach odniesienia $K$ i $K^/$ istnieję związek

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \overrightarrow{OO^/} = \vec{r}^{\,/} + \vec{\upsilon}_0 \cdot t \ , \tag{2.28}$$

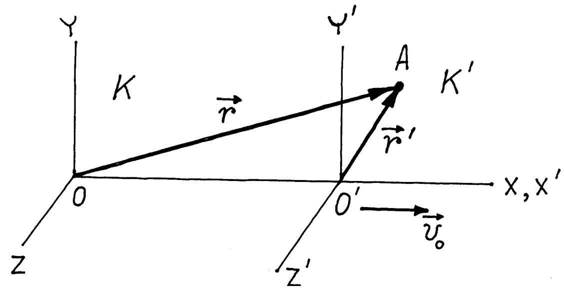
W newtonowskiej (nie relatywistycznej) mechanice przyjmuje się, że czas nosi absolutny charakter i nie zależy od wybranego układu odniesienia, a zatem czas $t$ we wzorze (2.28) możemy zamienić na czas $t^/$ (czas w układzie odniesienia $K^/$) i zapisać:

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{\upsilon}_0 \cdot t^/ \ , \tag{2.29}$$

Prędkość punktu materialnego, z określenia, jest pochodną względem czasu od wektora wodzącego, a zatem biorąc pod uwagę wzór (2.29) otrzymujemy:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}^{\,/} + \vec{\upsilon}_0 \cdot t^/)}{dt^/} = \frac{d\vec{r}^{\,/}}{dt^/} + \vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}^{\,/} + \vec{\upsilon}_0 \ . \qquad (2.30)$$

Wzór (2.30) wyraża *prawo dodawania prędkości w mechanice Newtona*.




Rys.2.3. Przekształcenie Galileusza

Przyspieszenie punktu materialnego, z określenia, jest pochodną względem czasu od wektora prędkości, a zatem biorąc pod uwagę wzór (2.30) znajdujemy:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(\vec{\upsilon}^{\,/} + \vec{\upsilon}_0)}{dt^/} = \frac{d\vec{\upsilon}^{\,/}}{dt^/} + 0 = \vec{a}^{\,/} \ . \qquad (2.31)$$

Umówiliśmy, że układ odniesienia $K$ jest inercjalnym układem, a zatem jeżeli w tym układzie odniesienia na punkt materialny nie działa żadna siła, przyspieszenie tego punktu $\vec{a} = 0$ a prędkość $\vec{\upsilon} = const$. Z drugiej strony ze wzorów (2.30) i (2.31) znajdujemy, że w układzie odniesienia $K^/$ ten sam punkt materialny ma też przyspieszenie $\vec{a}^{\,/} = 0$ i prędkość $\vec{\upsilon}^{\,/} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = const$. A więc układ $K^/$ również jest układem inercjalnym, ponieważ spełnia pierwszą zasadę Newtona.

Ze wzoru (2.31) oraz drugiej zasady Newtona (wzór(2.7)) wynika jeszcze jeden ważny wniosek: we wszystkich inercjalnych układach odniesienia siły rzeczywiste działające na punkt materialny są takie same:

$$\vec{F} = \frac{\vec{a}}{m} = \frac{\vec{a}^{\,/}}{m} = \vec{F}^{\,/} \ . \qquad (2.32)$$

Oznacza to, że postać równania ruchu będzie taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Ta identyczność równań ruchu względem przekształcenia (2.29) jest treścią *zasady względności Galileusza*. Transformacja (2.29) nosi nazwę *transformacji Galileusza*.

Zadanie: Wykażemy, że w mechanice Newtona kształty ciał w różnych inercjalnych układach są takie same.

Rozwiązanie: Rozważmy dwa dowolne punkty ciała $A_1$ i $A_2$. Niech wektory wodzące tych dwóch punktów w inercjalnym układzie odniesienia $K$ są $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. Zgodnie ze wzorem (2.29) w układzie inercjalnym $K^/$ poruszającym się względem układu $K$ ze stałą prędkością $\vec{\upsilon}_0$, wektory wodzące tych dwóch punktów wynoszą

$$\vec{r}_1^{\,/} = \vec{r}_1 - \vec{\upsilon}_0 \cdot t \ , \qquad (2.33)$$

$$\vec{r}_2^{\,/} = \vec{r}_2 - \vec{\upsilon}_0 \cdot t \ , \qquad (2.34)$$

A zatem ze wzorów (2.33) i (2.34) otrzymujemy, że wektory, łączące dwa dowolne punkty w ciele są takie same w różnych układach inercjalnych

$$\vec{r}_{12}^{\,/} = \vec{r}_1^{\,/} - \vec{r}_2^{\,/} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ . \qquad (2.35)$$

Oznacza to, że w różnych inercjalnych układach odniesienia ciało ma ten sam kształt: orientację w przestrzeni i odległości między dowolnymi punktami.

Zadanie: Wykażemy, że w mechanice Newtona ładunki elektryczny cząstek (na przykład elektronów) nie zależą od prędkości cząstek.

Rozwiązanie: Rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia $K$ i $K^/$ i niech w układzie inercjalnym $K^/$ poruszającym się względem układu $K$ ze stałą prędkością $\vec{\upsilon}_0$, dwa ładunki elektryczne $q_1^/$ i $q_2^/$ są nieruchome. Zgodnie ze wzorem (2.32) siła Coulomba oddziaływania tych dwóch ładunków w różnych inercjalnych układach odniesienia jest taka sama

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = F^/ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^/ q_2^/}{(r_{12}^/)^2} \ . \qquad (2.36)$$

Biorąc pod uwagę wzór (2.35), otrzymujemy:

$$q_1 q_2 = q_1^/ q_2^/ \ ,$$

skąd wnioskujemy, że $q_1 = q_1^/$ oraz $q_2 = q_2^/$.