Wykład 1

Mechanika punktu materialnego

Mechanika klasyczna. Modeli w mechanice. Układ odniesienia.

Mechanika klasyczna zajmuje się badaniem ruchów ciał makroskopowych w przestrzeni i w czasie. W celu uproszczenia opisu ruchu ciała makroskopowego jako całości w mechanice klasycznej wprowadzamy idealizacji (modeli). Główne modeli w mechanice klasycznej to są 1) *model punktu materialnego*, oraz 2) *model ciała sztywnego albo model bryły sztywnej*.

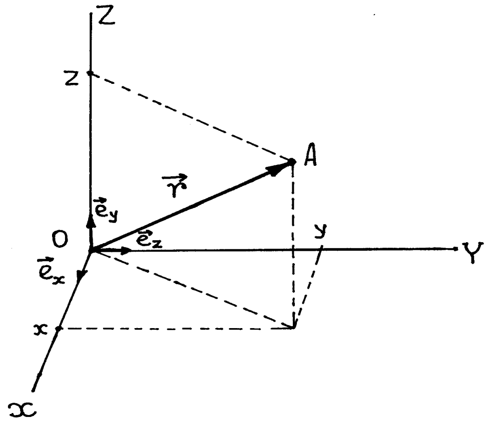
Punktem materialnym nazywamy *ciało o nieskończenie małych (zerowych) wymiarach*. Oczywiście w przyrodzie nie istnieją punkty materialne. Jednak model punktu materialnego bardzo dobrze opisuje, na przykład ruch Ziemi dookoła Słońca. Związane to z tym, że promień Ziemi jest o 25 000 razy mniejszy niż wynosi odległość Ziemi od Słońca.

Jeżeli model punktu materialnego źle opisuje ruch ciała makroskopowego i wyniki teoretyczne nie zgadzają się z wynikami doświadczalnymi, musimy skorzystać z kolejnego modelu (przybliżenia) - modelu ciała sztywnego. Ciałem sztywnym nazywamy *ciało kształt, którego oraz rozmiary nie ulegają zmianie podczas ruchu ciała*. W przyrodzie również nie istnieją ciała sztywne, ponieważ, na przykład w przypadku ruchu obrotowego zawsze ciało deformuje się. Jednak te deformacje w wielu przypadkach są takie małe, że ruch ciała w bardzo dobrym przybliżeniu możemy rozważać jako ruch ciała sztywnego. Jeżeli model ciała sztywnego nie opisuje ruch ciała makroskopowego i ciało deformuje się, musimy stosować kolejne modele, które są rozważane w mechanice ośrodków ciągłych.

Najpierw będziemy rozważały ruch punktu materialnego. Dla tego, żeby opisać ruch punktu materialnego w przestrzeni i w czasie musimy wprowadzić tak zwany *układ odniesienia*. Układ odniesienia to układ współrzędnych oraz zegar. Często jako układ współrzędnych wybieramy trzy wzajemnie prostopadłe proste, które przecinają się w nie ruchomym punkcie O - początku układu (rys.1.1). Taki układ współrzędnych nazywa się *układem kartezjańskim*. W układzie kartezjańskim położenie punktu materialnego określa wektor wodzący punktu:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z \ . \tag{1.1}$$

Wielkości x, y, z nazywamy *współrzędnymi* punktu materialnego. Wektory $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$ tworzą tak zwaną *bazę kartezjańskiego* układu współrzędnych i są to bezwymiarowe jednostkowe ($|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$) wektory.



Rys.1.1. Kartezjański układ współrzędnych

Wektor wodzący $\vec{r}$ ma punkt zaczepienia w początku układu współrzędnych i ma wymiar długości. Gdy punkt materialny porusza się w przestrzeni wektor wodzący $\vec{r}$ zmienia swój kierunek i długość. W układzie SI jednostką długości jest *metr* (m). Dla pomiaru czasu możemy korzystać z dowolnego okresowego procesu fizycznego, na przykład z wahadła. W układzie SI jednostką pomiaru czasu jest *sekunda* (s).

Umownie mechanika została podzielona na *kinematykę* oraz *dynamikę*. Jeżeli zajmujemy się opisem ruchu ciał, nie rozważając przyczyny wywołujące ten ruch, to mówimy, że mamy do czynienia z *kinematyką*. Jeżeli uwzględniamy siły, które wywołują ruch ciał, to mówimy, że mamy do czynienia z *dynamiką*. Najprostszym zagadnieniem kinematyki jest kinematyka punktu materialnego.

Kinematyka punktu materialnego

Mówimy, że ruch punktu materialnego jest całkowicie określony, jeżeli wiemy położenie tego punktu w wybranym układzie współrzędnych w dowolnej chwili. Z punktu matematycznego, to oznacza, że wiemy jak zależą od czasu współrzędne $x(t), y(t), z(t)$

punktu materialnego innymi słowy wiemy jak zależy od czasu wektor wodzący punktu materialnego

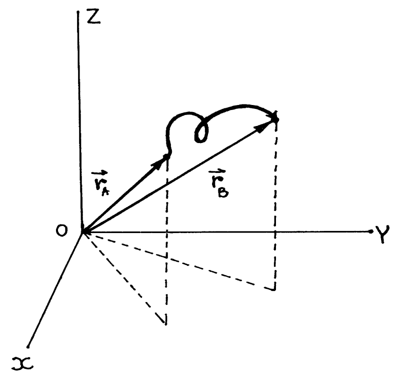
$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{e}_x + y(t)\cdot\vec{e}_y + z(t)\cdot\vec{e}_z \ . \tag{1.2}$$

Krzywa $\vec{r}(t)$ w trójwymiarowej przestrzeni nosi nazwę *toru* albo *trajektorii* punktu materialnego. Warto podkreślić, że każdy punkt trajektorii ma określony czas, które wskazuje na to, kiedy punkt materialny był albo będzie w tym właśnie punkcie.

Niech w chwili t_1 punkt materialny zajmował położenie A (rys.1.2), a w chwili późniejszej $t_2 > t_1$ ten sam punkt zajmuje położenie B. Iloraz

$$\bar{\upsilon} = \frac{przemieszczenie}{przedzial \quad czasu} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{1.3}$$

nazywa się *prędkością średnią* punktu materialnego.



Rys.1.2. Tor punktu materialnego

<u>Zadanie</u>: punkt materialny porusza się wzdłuż osi Ox tak, że $x(t) = A\cdot t^2$, gdzie A jest stała. Obliczmy prędkość średnią na odcinku czasowym $\Delta t = t_2 - t_1$.

<u>Rozwiązanie:</u>

$$\upsilon_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = A\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = A\cdot(t_2 + t_1)\,.$$

Prędkością chwilową w chwili t_1 nazywa się granica prędkości średniej, gdy zarówno $\Delta\vec{r}$, jak i Δt dążą do zera

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \quad . \tag{1.4}$$

W matematyce granicę (1.4) nazywamy *pochodną* wektora $\vec{r}$ względem czasu i oznaczamy jako $\frac{d\vec{r}}{dt}$. W fizyce często pochodną względem czasu oznaczają jako $\dot{\vec{r}}$. Warto podkreślić, że wektor prędkości chwilowej w ogólnym przypadku może mieć dowolny kierunek względem kierunku wektora wodzącego.

Prędkość, zgodnie z (1.4) ma wymiar (*długość/czas*) czyli (L/T). W układzie jednostek SI prędkość mierzymy w jednostkach m/s.

Zadanie: punkt materialny porusza się tak, że

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \cdot t + \vec{B}, \tag{1.5}$$

gdzie $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są stałe wektory nie zależny od czasu. Obliczmy prędkość chwilową.

Rozwiązanie:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{A} \cdot (t + \Delta t) + B] - [\vec{A}t + B]}{\Delta t} = \vec{A} = const \quad . \tag{1.6}$$

Więc równanie (1.5) opisuje ruch punktu materialnego ze stałą prędkością $\vec{A}$. Może powstać pytanie:, co oznacza wektor $\vec{B}$ w równaniu (1.5)? Sens fizyczny a raczej matematyczny tego wektora łatwo otrzymać rozważając dowolnie wybraną początkową chwilę $t_0 = 0$. Przypuśćmy, że wiemy wektor wodzący $\vec{r}_0$ oraz prędkość chwilową $\vec{\upsilon}_0 \equiv \vec{A}$ punktu materialnego w chwili $t_0 = 0$. Podstawiając $t \equiv t_0 = 0$ do równania (1.5) otrzymujemy, że $\vec{B} = \vec{r}_0$, a zatem równanie (1.5) możemy zapisać w postaci

$$\vec{r}(t) = \vec{\upsilon}_0 \cdot t + \vec{r}_0 \quad . \tag{1.7}$$

Równanie (1.7) opisuję prostoliniowy (*wzdłuż prostej*) i jednostajny (ze *stałą prędkością*) ruch punktu materialnego.

Zadanie: punkt materialny porusza tak, że

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{A} \cdot t^2 + \vec{B} \cdot t + \vec{C}, \tag{1.8}$$

gdzie $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$ są stałe wektory. 1) Jakie wymiary mają wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$? 2) Obliczyć prędkość chwilową punktu.

Rozwiązanie:

1. Z lewej strony równania (1.8) znajduje się wektor, który ma wymiar *długości*, a zatem z prawej strony musi być też wektor o wymiarze *długości*. Stąd wynika, że wektor $\vec{A}$ ma wymiar (L/T^2), wektor $\vec{B}$ ma wymiar *prędkości* (L/T), a wektor $\vec{C}$ ma wymiar *długości* L.

2.

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\frac{1}{2}\vec{A}(t+\Delta t)^2 + \vec{B}(t+\Delta t) + \vec{C}] - [\frac{1}{2}\vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C}]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}\cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\vec{A}\cdot(\Delta t)^2 + \vec{B}\cdot \Delta t}{\Delta t} = \vec{A}\cdot t + \vec{B} \ . \tag{1.9}$$

Jeżeli znów rozważmy początkową chwilę $t_0 = 0$, ze wzoru (1.9) znajdujemy, że stały wektor $\vec{B}$ to jest prędkość punktu materialnego w chwili $t_0 = 0$.

Ze wzoru (1.9) wynika, że w ogólnym przypadku prędkość chwilowa punktu materialnego może zależeć od czasu. Iloraz

$$\bar{\vec{a}} \equiv \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} \equiv \frac{\vec{\upsilon}(t_2) - \vec{\upsilon}(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{1.10}$$

nazywa się *przyspieszeniem średnim*.

Przyspieszeniem chwilowym nazywa się granica przyspieszenia średniego, gdy zarówno $\Delta\vec{\upsilon}$, jak i Δt dążą do zera

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \ . \tag{1.11}$$

Przyspieszenie, zgodnie z (1.11) ma wymiar (*prędkość/czas*) czyli $(L/T)\cdot(1/T) = L/T^2$. W układzie jednostek SI przyspieszenie mierzymy w jednostkach m/s^2.

Zadanie: punkt materialny porusza się wzdłuż toru określonego wzorem (1.8). Obliczmy przyspieszenie chwilowe punktu.

Rozwiązanie: prędkość punktu materialnego poruszającego się wzdłuż trajektorii (1.8) jest określona wzorem (1.9). Korzystając z tego wzoru otrzymujemy

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{A}(t+\Delta t)+\vec{B}]-[\vec{A}t+\vec{B}]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}\cdot\Delta t}{\Delta t} = \vec{A} = const \; . \quad (1.12)$$

Oznaczając stałe przyspieszenie punktu jako $\vec{a}_0$, prędkość i wektor wodzący punktu w chwili $t_0 = 0$ jako $\vec{\upsilon}_0$ i $\vec{r}_0$, wzór (1.8) możemy zapisać w postaci

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_0 \cdot t^2 + \vec{\upsilon}_0 \cdot t + \vec{r}_0 . \quad (1.13)$$

Równanie (1.13) opisuje ruch punktu materialnego *ze stałym przyspieszeniem*. Stałe $\vec{r}_0$, $\vec{\upsilon}_0$ i $\vec{a}_0$, określające położenie, prędkość i przyspieszenie punktu materialnego w chwili początkowej t_0 nazywamy *warunkami początkowymi*.

Zadanie: ciało znajdujące się na dachu domu zaczyna w chwili $t_0 = 0$ swobodnie spadać na powierzchnie Ziemi. Napisać wzory określające trajektorię tego ciała.

Rozwiązanie: ze szkoły średniej wiemy, że ciało spada na powierzchnie Ziemi ze stałym przyspieszeniem $g = 9{,}8 \;\; m/s^2$, które nazywa się *przyspieszeniem grawitacyjnym Ziemi*. Wektor tego przyspieszenia jest skierowany ku środku Ziemi. Podstawiając wektor przyspieszenia grawitacyjnego $\vec{g}$ w równanie (1.13), określające ruch punktu materialnego ze stałym przyspieszeniem, otrzymujemy

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g} \cdot t^2 + \vec{r}_0 \; .$$

Tu uwzględniliśmy, że w chwili początkowej $t_0 = 0$ ciało znajdowało się w spoczynku ($\vec{\upsilon}_0 = 0$).

Ruch po okręgu

Rozważmy ruch punktu materialnego po okręgu (rys.1.3). W tym przypadku położenie punktu A na okręgu możemy określić za pomocą kąta φ. *Chwilową prędkością kątową* albo *kołową* nazywa się pochodna kąta φ względem czasu t

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \equiv \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi} \; . \quad (1.14)$$

Jeżeli $\omega = \omega_0 = const$, wtedy

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \ . \tag{1.15}$$

Tu φ_0 - wartość kąta φ w chwili początkowej $t = t_0 = 0$.

Istotnie po podstawieniu (1.15) do wzoru (1.14) otrzymujemy:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\omega_0 (t + \Delta t) + \varphi_0] - [\omega_0 t + \varphi_0]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega_0 \cdot \Delta t}{\Delta t} = \omega_0 = const \, .$$

Ruch po okręgu ze stałą prędkością kątową nazywamy *ruchem jednostajnym obrotowym*. Czas, po upływie, którego punkt materialny wykonuje jeden obrót nazywamy *okresem ruchu obrotowego*. Okres ruchu obrotowego oznaczamy dużą literą T. Korzystając z określenia okresu, ze wzoru (1.15) otrzymujemy ($t_0 = 0$):

$$\varphi(t_0 + T) \equiv 2\pi + \varphi_0 = \omega_0 \cdot T + \varphi_0 \ .$$

Skąd mamy

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \ . \tag{1.16}$$

Wielkość odwrotna do okresu

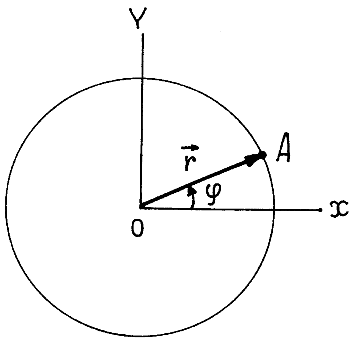
$$\nu_0 = \frac{1}{T} \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} \ . \tag{1.17}$$

nazywa się *częstością ruchu obrotowego*. Łatwo wyjaśnić sens fizyczny częstości ν_0. Za czas równy okresowi $t = T$ punkt materialny wykonuje jeden obrót. A zatem za jednostkę czasu punkt materialny wykonuje $\nu_0 = 1/T$ obrotów. Na przykład, jeżeli $T = 1/100$ sekundy, to za jedną setną sekundy punkt wykonuje jeden obrót, a za 1 sekundę punkt materialny wykonuję 100 obrotów. Więc częstość $\nu_0 = 1/T$ jest liczbą obrotów punktu materialnego za jednostkę czasu. Częstość mierzymy w hercach (Hz). 1 Hz = 1 s^{-1}.

W ogólnym przypadku prędkość kątowa ω może zależeć od czasu. Zmiany prędkości kątowej w czasie określa *chwilowe przyspieszenie kątowe*:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega} \ . \tag{1.18}$$

Znajdziemy związek między chwilową prędkością liniową, określoną wzorem (1.4) i chwilową prędkością kątową, określonej wzorem (1.14).



Rys.1.3. Ruch obrotowy

Niech w chwili początkowej $t = t_0 = 0$ punkt materialny znajduje się na okręgu w punkcie A, a w chwili $t = \Delta t$ - w punkcie B (rys.I.4). Jeżeli rozważamy bardzo mały czas $t = \Delta t$, długość łuku AB jest w przybliżeniu równa długości cięciwy AB. Przybliżenie to jest tym lepiej spełnione, im bardziej zmniejszmy odcinek czasowy Δt. Wtedy dla chwilowej liniowej prędkości punktu możemy zapisać

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t} \quad . \qquad (1.19)$$

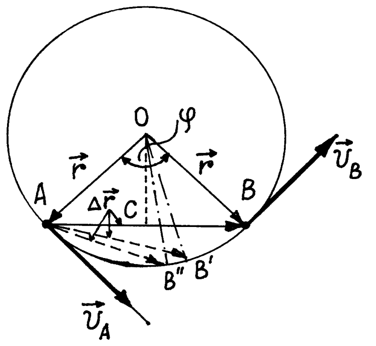
Tu AB - długość cięciwy (rys.1.4)).
Z rys.1.4 widać, że

$$AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \approx 2 \cdot r \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = r \cdot \Delta\varphi \quad . \qquad (1.20)$$

Po podstawieniu (1.20) do (1.19) znajdujemy

$$\upsilon = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega \quad . \qquad (1.21)$$

Z rys.1.4 wynika również, że gdy $\Delta t \to 0$ wektor przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ dąży do stycznej w punkcie A. A zatem prędkość chwilowa w punkcie A jest wektorem stycznym do krzywej w tym punkcie.



Rys.1.4.

Znajdziemy teraz przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się po okręgu. Rozważmy znów dwa punkty A i B (rys.1.5). Z podobieństwa trójkątów AOB i DBE (rys.1.4) wynika, że wektor $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ ma długość

$$\begin{aligned} DE &= 2 \cdot DF = 2 \cdot v \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \\ &\approx 2 \cdot v \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = v \cdot \Delta\varphi \end{aligned} . \tag{1.22}$$

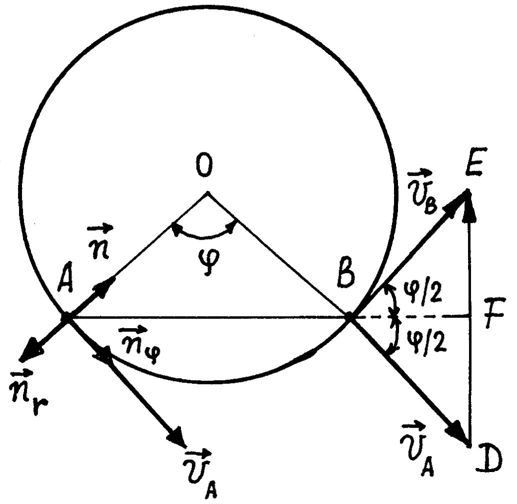
A zatem dla długości wektora przyspieszenia możemy zapisać:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{DE}{\Delta t} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt} = v \cdot \omega \ . \tag{1.23}$$

Biorąc pod uwagę, że $\omega = 2\pi / T = (2\pi \cdot r / T) \cdot (1/r) = v / r$ (patrz wzór (1.21)), ze wzoru (1.23) mamy

$$a_r = v \cdot \omega = \frac{v^2}{r} \ . \tag{1.24}$$

Kierunek wektora przyspieszenia (1.24) pokrywa się z kierunkiem wektora $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_B - \vec{\upsilon}_A$, który przy $\Delta t \to 0$ jest prostopadły do wektora prędkości $\vec{\upsilon}$ w punkcie A.



Rys.1.5

A zatem kierunek wektora przyspieszenia $\vec{a}_r$ pokrywa się z kierunkiem promienia i zwrócony jest do środka okręgu. Dlatego przyspieszenie to nosi nazwę *przyspieszenia radialnego* lub *przyspieszenia dośrodkowego*. Dlatego też będziemy oznaczali to przyspieszenie wskaźnikiem r.

Przyspieszenie styczne i dośrodkowe

Dośrodkowe przyspieszenie zdefiniowaliśmy wyżej (wzór (1.24)). Jeśli wprowadźmy jednostkowy wektor $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$), (rys.1.5) skierowany od punktu A ku środku okręgu, wektor przyspieszenia dośrodkowego możemy zapisać w postaci:

$$\vec{a}_r = \frac{\upsilon^2}{r} \cdot \vec{n} \ . \tag{1.25}$$

Jednostkowy wektor $\vec{n}$ jest podobny do wektorów jednostkowych bazy układu odniesienia $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$. Wektor ten wyznacza jedynie kierunek w przestrzeni. Jednak, w odróżnieniu od wektorów $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$, wektor $\vec{n}$ nie jest wektorem stałym i zmienia swój kierunek wraz ze zmianą położenia punktu materialnego na okręgu. Wektor $\vec{n}$ jest skierowany do środka okręgu, a zatem ma kierunek przeciwny do kierunku wektora wodzącego $\vec{r}$. Wprowadzając jednostkowy wektor:

$$\vec{n}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\vec{n} \quad , \tag{1.26}$$

przyspieszenie dośrodkowe możemy zapisać w postaci:

$$\vec{a}_r = -\frac{\upsilon^2}{r} \cdot \vec{n}_r \equiv -\omega^2 \cdot \vec{r} \quad . \tag{1.27}$$

Tu uwzględniliśmy, że $(\upsilon / r) = \omega$ (patrz wzór (1.21)) oraz $\vec{r} = r \cdot |\vec{n}_r|$ (patrz wzór (1.26)).

Wektor prędkości chwilowej punktu materialnego poruszającego się po okręgu, jak widzieliśmy wyżej, jest wektorem stycznym do okręgu w punkcie gdzie znajduję się punkt materialny. Wprowadzając jednostkowy wektor $\vec{n}_\varphi$, styczny do okręgu w punkcie A (rys.1.5):

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} \quad , \tag{1.28}$$

wektor prędkości chwilowej dla ruchu po okręgu możemy zapisać w postaci:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{n}_\varphi = \omega \cdot r \cdot \vec{n}_\varphi \quad . \tag{1.29}$$

Jednostkowy wektor $\vec{n}_\varphi$ nie jest stałym wektorem i zmienia swój kierunek przy zmianie położenia punktu materialnego na okręgu.

Rozważmy teraz jednostajny ruch punktu po okręgu, dla którego wektor prędkości ma stałą wartość $\upsilon = const$ a zmienia się tylko kierunek wektora prędkości. W tym przypadku przyspieszeniem punktu jest przyspieszenie dośrodkowe (wzór (1.27)). Z drugiej strony, z określenia przyspieszenia, biorąc pod uwagę wzory (1.27) i (1.29) mamy:

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \upsilon \cdot \frac{d\vec{n}_\varphi}{dt} = -\frac{\upsilon^2}{r} \cdot \vec{n}_r \quad . \tag{1.30}$$

Ze wzoru (1.30) otrzymujemy ważny dla następnych rozważań wzór:

$$\frac{d\vec{n}_\varphi}{dt} = -\frac{\upsilon}{r} \cdot \vec{n}_r \ . \tag{1.31}$$

Rozważmy teraz ogólny ruch punktu materialnego po okręgu, w którym wartość prędkości υ nie jest stała i znajdziemy wektor przyspieszenia punktu. W tym przypadku, korzystając ze wzory na pochodną od iloczynu funkcji

$$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot h(t)] = u(t) \cdot \frac{dh}{dt} + h(t) \cdot \frac{du}{dt} \ ,$$

i z określenia przyspieszenia, ze wzoru (1.29) znajdujemy:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{n}_\varphi + \upsilon \cdot \frac{d\vec{n}_\varphi}{dt} = -\frac{\upsilon^2}{r} \cdot \vec{n}_r + \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{n}_\varphi \ . \tag{1.32}$$

Tu skorzystaliśmy, ze wzoru (1.31).

Ze wzoru (1.32) wynika, że w przypadku ruchu po okręgu ze zmienną w czasie prędkością przyspieszenie zawiera dwa składniki:

$$\vec{a}_r = -\frac{\upsilon^2}{r} \cdot \vec{n}_r \tag{1.33}$$

- przyspieszenie dośrodkowe, oraz

$$\vec{a}_\varphi = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{n}_\varphi \tag{1.34}$$

- *przyspieszenie styczne*.

Wektor przyspieszenia dośrodkowego jest prostopadły do wektora prędkości punktu, a zatem wywołuje zmiany kierunku wektora prędkości. Natomiast wektor przyspieszenia stycznego jest równoległy do wektora prędkości punku, a więc zmienia tylko wartość (długość) wektora prędkości.

Wzory (1.32) - (1.34) są słuszne również w przypadku ruchu po dowolnej krzywej nie będącą okręgiem. W tym przypadku jednak r określa tak zwany *promień krzywizny krzywej* w punkcie, w którym obliczamy przyspieszenie. O promieniu krzywizny krzywej będzie mową później.

Zadanie: punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością, która zmienia się w czasie jako:

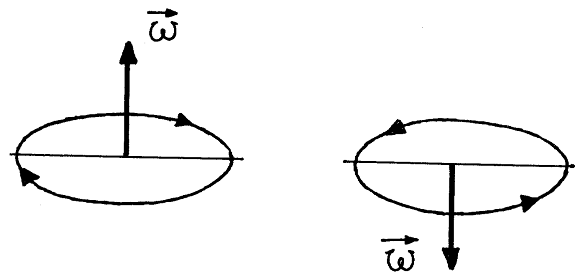
$$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = c \cdot t \ ,$$

gdzie c jest stała. Znajdziemy przyspieszenie dośrodkowe i przyspieszenie styczne.

Rozwiązanie: ze wzorów (1.33) i (1.34) otrzymujemy:

$$\vec{a}_r = -\frac{\upsilon^2}{r} \cdot \vec{n}_r = -\frac{c^2 t^2}{r} \cdot \vec{n}_r \ ,$$

$$\vec{a}_\varphi = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{n}_\varphi = c \cdot \vec{n}_\varphi \ .$$



Rys. 1.6. Wektor prędkości kątowej

Przy rotacji punktu materialnego po okręgu ruch punktu może zachodzić w dwie różne strony: zgodnie z wskazówka zegara albo w przeciwną stronę. Dla tego, żeby rozróżnić te dwa możliwe ruchy po okręgu wprowadzają *wektor prędkości kątowej albo wektor prędkości kołowej*. Wektor ten wprowadzamy stosując reguły (rys.1.6):

1) ze środka okręgu rysujemy oś obrotu - prostą prostopadłą do płaszczyzny w której odbywa się ruch kołowy;
2) na osi obrotu ze środka okręgu oznaczamy odcinek o długości równej wartości prędkości kątowej;
3) kierunek otrzymanego odcinka (strzałkę) wybieramy w taki sposób aby patrząc wzdłuż niego (z tyłu strzałki) widzieliśmy ruch obrotowy punktu odbywający zgodnie ze wskazówką zegara.