Wykład 9

Szczególne przekształcenie Lorentza

Szczególnym przekształceniem Lorentza (właściwym, zachowującym kierunek czasu) nazywa się przekształcenie między dwoma inercjalnymi układami odniesienia K i $K^{/}$ w przypadku gdy przestrzenne osie układów są równoległe odpowiednio i układ $K^{/}$ porusza się względem układu K ze stałą prędkością $\vec{V}$ o współrzędnych $V_1 = V$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$. Z przyjętych założeń wynika, że $x_2 = x_{2^{/}}$, oraz $x_3 = x_{3^{/}}$, a macierz przekształcenia $L_{\beta\mu^{/}}$ ma postać

$$L_{\beta\mu^{/}} = \begin{pmatrix} L_{00^{/}} & L_{01^{/}} & 0 & 0 \\ L_{10^{/}} & L_{11^{/}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (9.1)$$

Korzystając ze wzorów (9.1) i (8.32) otrzymujemy

$$x_0 = L_{00^{/}} x_{0^{/}} + L_{01^{/}} x_{1^{/}} , \qquad (9.2a)$$

$$x_1 = L_{10^{/}} x_{0^{/}} + L_{11^{/}} x_{1^{/}} , \qquad (9.2b)$$

$$x_2 = x_{2^{/}} , \qquad (9.2c)$$

$$x_3 = x_{3^{/}} . \qquad (9.2d)$$

Cztery nieznane elementy macierzy przekształcenia (9.1) znajdziemy, korzystając ze wzorów (8.37)

$$(L_{00^{/}})^2 - (L_{01^{/}})^2 = 1 , \qquad (9.3a)$$

$$(L_{01^{/}})^2 - (L_{11^{/}})^2 = -1 , \qquad (9.3b)$$

$$L_{00^{/}} L_{01^{/}} - L_{10^{/}} L_{11^{/}} = 0 , \qquad (9.3c)$$

oraz zakładając, że nieruchomy punkt $x_{1^{/}} = x_{2^{/}} = x_{3^{/}} = 0$ w układzie $K^{/}$, powinien mieć w układzie K współrzędne $x_1 = Vt$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Wtedy ze wzoru (9.2b) otrzymujemy

$$Vt = L_{10^{/}} c t^{/} . \qquad (9.4)$$

Skąd, uwzględniając, że dla nieruchomego punktu własny czas wynosi: $t^{/} = t \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$, mamy

$$L_{10'} = \beta \cdot \frac{t}{t'} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{9.5a}$$

Uwzględniając wzór (9.5a) ze wzorów (9.3) znajdujemy

$$L_{00'} = L_{11'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \tag{9.5b}$$

$$L_{10'} = L_{01'} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{9.5c}$$

Po podstawieniu wzorów (9.5) do wzorów (9.2) i uwzględnieniu, że $x_0 = ct$, $x_{0'} = ct'$ znajdujemy

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x_{1'}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \ ,, \quad x_2 = x_{2'} \ , \quad x_3 = x_{3'} \ , \quad x_1 = \frac{x_{1'} + Vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \ . \tag{9.6}$$

Łatwo sprawdzić, że ze wzoru (9.6) wynika, iż

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \ ,, \quad x_{2'} = x_2 \ , \quad x_{3'} = x_3 \ , \quad x_{1'} = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \ . \tag{9.7}$$

Wzory (9.6) i (9.7) określają przekształcenia składowych czterowektora wodzącego x_α $(\alpha = 0,1,2,3)$ przy przejściu od jednego układu inercjalnego układu do drugiego.

Ogólnie czterowektorem $\vec{A}$ w przestrzeni Minkowskiego będziemy nazywali zbiór czterech wielkości A_0, A_1, A_2, A_3, które przy przejściu od jednego układu współrzędnych do innego układu przekształcają się, jak współrzędne czterowektora wodzącego x_α. W przypadku szczególnego przekształcenia Lorentza możemy więc zapisać

$$A_0 = \frac{A_0' + \frac{V}{c}A_{1'}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \ , \quad A_2 = A_{2'} \ , \quad A_3 = A_{3'} \ , \quad A_1 = \frac{A_{1'} + \frac{V}{c}A_{0'}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \ , \tag{9.8}$$

$$A^{\prime} = \frac{A_0 - \frac{V}{c} A_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \;, \quad A_{2^{\prime}} = A_2 \;, \quad A_{3^{\prime}} = A_3 \;, \quad A_{1^{\prime}} = \frac{A_1 - \frac{V}{c} A_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \;. \tag{9.9}$$

Relatywistyczne dodawanie prędkości

Znajdziemy teraz wzory łączące prędkości ruchomej cząstki w dwóch inercjalnych układach odniesienia. Niech znów układ $K^{\prime}$ porusza się względem układu K wzdłuż osi $\vec{e}_1$ z prędkością V. Ze wzorów (9.6) mamy

$$dx_1 = \frac{dx_{1^{\prime}} + V dt^{\prime}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \;, \quad dx_2 = dx_{2^{\prime}} \;, \quad dx_3 = dx_{3^{\prime}} \;, \quad dt = \frac{dt^{\prime} + \frac{V}{c^2} dx_{1^{\prime}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \;. \tag{9.10}$$

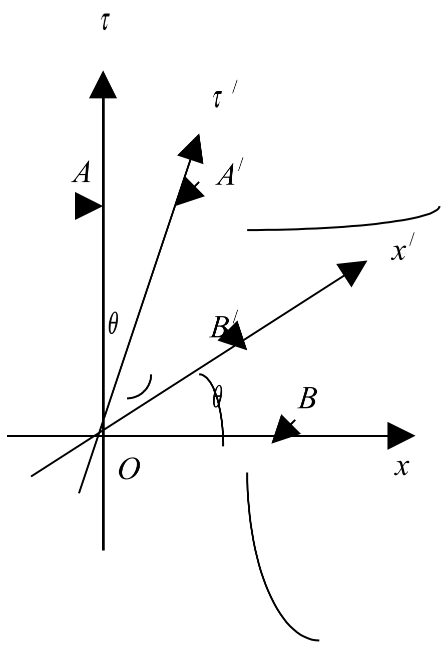
Prędkości cząstki w układach K i $K^{\prime}$ określają wzory: $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$, $\vec{\upsilon}^{\prime} = d\vec{r}^{\prime}/dt^{\prime}$. A zatem dzieląc pierwsze trzy równości wzory (9.10) przez czwartą otrzymujemy

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\upsilon_{1^{\prime}} + V}{1 + \frac{\upsilon_{1^{\prime}} V}{c^2}} \;, \quad \upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{\upsilon_{2^{\prime}} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{\upsilon_{1^{\prime}} V}{c^2}} \;, \quad \upsilon_3 = \frac{dx_3}{dt} = \frac{\upsilon_{3^{\prime}} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{\upsilon_{1^{\prime}} V}{c^2}} \;. \tag{9.11}$$

Wzory (9.11) określają prawo składania prędkości w relatywistycznej mechanice. W przypadku, gdy $c \to \infty$ wzory te przechodzą we wzory mechaniki klasycznej: $\upsilon_1 = \upsilon_{1^{\prime}} + V$, $\upsilon_2 = \upsilon_{2^{\prime}}$, $\upsilon_3 = \upsilon_{3^{\prime}}$.

Diagramy czasoprzestrzenne

Wielu efektów relatywistycznych takich jak równoczesność, skrócenie Lorentza, dylatacja czasu znajdują przejrzystą interpretację geometryczną przy korzystaniu z diagramów czasoprzestrzennych Minkowskiego. Rozważmy znów dla uproszczenia dwa inercjalne układy odniesienia i niech układ $K^{\prime}$ porusza się względem układu K wzdłuż osi $\vec{e}_1$ z prędkością V. Załóżmy również, że w chwili $t = t^{\prime} = 0$ początki układów pokrywają się. Przyjęte założenia pozwalają rozpatrywać dwuwymiarową przestrzeń Minkowskiego. Osi współrzędnych $O\tau$ i Ox układu K wybierzemy jako dwie wzajemnie prostopadłe osi. Pojedynczy punkt na tym diagramie czasoprzestrzennym o ustalonych ($\tau = ct, x$) nazywamy *zdarzeniem*. Tor cząstki określa krzywa $x(\tau)$, która nazywa się *linią świata cząstki*. Narysujmy teraz linii współrzędnych układu K' na diagramie czasoprzestrzennym układu K. Oś $O\tau'$ ($\tau' = ct'$) jest to miejsce geometryczne zdarzeń dla których $x' = 0$. Podstawiając $x_{1'} \equiv x' = 0$ do wzorów (9.6) otrzymujemy równanie osi $O\tau'$ na diagramie czasoprzestrzennym układu K: $x = Vt = \beta\,(ct) = \beta\tau$. Jest to równanie prostej, która tworze kąt θ z osią $O\tau$: $\mathrm{tg}\theta = \beta \equiv V/c$.



Oś Ox' jest to miejsce geometryczne zdarzeń dla których $t' = 0$. Podstawiając $t' = 0$ do wzorów (9.6) otrzymujemy równanie osi Ox' na diagramie czasoprzestrzennym układu K: $\tau = ct = Vx/c = \beta x$. Jest to również równanie prostej, która tworzy ten sam kąt θ z osią Ox. Mamy więc położenie osi współrzędnych układu K' na diagramie czasoprzestrzennej układu K, jednak nie mamy wzdłuż nich skali. Żeby znaleźć tę skalę, skorzystamy z niezmienniczości interwału

$$s^2 = \tau^2 - x^2 = (\tau')^2 - (x')^2 = const. \qquad (9.12)$$

Wybierzmy na osi $O\tau$ układu K zdarzenie A (patrz rysunek) dla którego $\tau = 1$, $x = 0$. Zgodnie z (9.12) wszystkie zdarzenia dla których $s^2 = 1$ leżą na krzywej $\tau^2 - x^2 = 1$. Jest to hiperbola, asymptotami której są linii świata ($\mathrm{tg}\theta = \pm 1$). Punkt A' przecięcia tej hiperboli z osią $O\tau'$, zgodnie z (9.12), ma współrzędne $\tau' = 1$ i $x' = 0$. A zatem używając hiperbol $\tau^2 - x^2 = a^2$ możemy łatwo wykalibrować oś $O\tau'$.

W podobny sposób kalibruje się oś Ox'. Wybierzmy na osi Ox układu K zdarzenie B dla którego $\tau = 0$, $x = 1$. Zgodnie z (9.12) wszystkie zdarzenia dla których $s^2 = -1$ leżą na krzywej $x^2 - \tau^2 = 1$. Jest to hiperbola, asymptotami której znów są linii świata światła ($\mathrm{tg}\theta = \pm 1$). Punkt B' przecięcia tej hiperboli z osią Ox', zgodnie z (9.12), ma współrzędne $\tau' = 0$ i $x' = 1$.

Korzystając z diagramów czasoprzestrzennych Minkowskiego łatwo rozważyć interpretację geometryczną podstawowych efektów relatywistycznych: względność równoczesności dwóch zdarzeń, dylatacji czasu, skrócenie Lorentza.

Dynamika relatywistyczna. Czterowektory prędkości i pędu

Cechą charakterystyczną w mechanice Newtona jest absolutny charakter czasu, co oznacza, że czas nie zależy od wybranego inercjalnego układu odniesienia. W mechanice Newtona prędkość cząstki określa wektor styczny do trajektorii cząstki: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Oznaczając wektor za pomocą strzałki, podkreślamy, że w mechanice klasycznej wektor możemy rozpatrywać jako obiekt geometryczny nie zależny od wyboru osi współrzędnych. Mówiąc o wektorze wyobrażamy sobie zorientowaną w przestrzeni strzałkę o określonej długości. Dowolny obrót układu osi współrzędnych nie zmienia kierunku i długości wektora. Od wybranego układu odniesienia zależą tylko składowe wektora.

W mechanice relatywistycznej trajektorię cząstki będziemy określali 4 - wymiarowym wektorem (*czterowektorem*) wodzącym $\vec{\rho}$. Przez współrzędne wektor wodzący $\vec{\rho}$ w wybranej bazie możemy zapisać w postaci

$$\vec{\rho} = x_0 \cdot \vec{e}_0 + x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 \; . \tag{9.13}$$

Podobnie jak w zwykłej przestrzeni Euklidesa, będziemy rozpatrywali dowolny wektor w przestrzeni Minkowskiego jako obiekt geometryczny. Kierunek i długość wektora wodzącego $\vec{\rho}$ jest inwariantny względem przekształceń Lorentza. Jednak czas w mechanice relatywistycznej w różnych inercjalnych układach odniesienia jest różny. Z tego powodu powstaje pytanie – jak określić wektor prędkości punktu materialnego, żeby ten wektor był niezależny od wybranego inercjalnego układu odniesienia. Wiemy, że niezależnym od układu odniesienia jest własny czas cząstki τ. A więc, jeżeli czterowektor wektor prędkości $\vec{u}$ określimy jako

$$\vec{u} = \frac{d\vec{\rho}}{d\tau} \; , \tag{9.14}$$

to ten wektor będzie relatywistyczne inwariantnym. Współrzędne tego wektora zależą oczywiście od wybranego układu odniesienia. Uwzględniając, że $x_0 = ct$ i $d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ ze wzoru (9.13) otrzymujemy

$$u_0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \qquad u_1 = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \tag{9.15a}$$

$$u_2 = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \qquad u_3 = \frac{\upsilon_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{9.15b}$$

Tu υ_1, υ_2, υ_3 są to składowe trójwymiarowego wektora prędkości $\vec{\upsilon}$ cząstki w wybranym inercjalnym układzie K.

Łatwo sprawdzić, że iloczyn skalarny

$$(\vec{u}\cdot\vec{u}) = u_\alpha\, g_{\alpha\beta}\, u_\beta = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = c^2 \tag{9.16}$$

jest relatywistycznym inwariantem.

W mechanice Newtona pęd punktu materialnego jest iloczynem trójwymiarowego wektora prędkości i jego masy m_0: $\vec{p} = m_0\dot{\vec{r}}$. W mechanice relatywistycznej uogólnia się pojęcie pędu i pęd jest iloczynem czterywektora prędkości $\vec{u}$ i jego masy m_0

$$\vec{p} = m_0\vec{u} \ . \tag{9.17}$$

Korzystając ze wzorów (9.15) składowe czterowektora pędu możemy zapisać w następujący sposób

$$p_0 = mc \ , \qquad p_i = m\upsilon_i \quad (i = 1,2,3). \tag{9.18}$$

Tu wielkość

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{9.19}$$

nazywa się *masą relatywistyczną cząstki*. Masa m_0 nazywa się *masą spoczynkową cząstki*.

Korzystając ze wzoru (9.18) natychmiast otrzymujemy, że

$$(\vec{p}\cdot\vec{p}) = p_\alpha\, g_{\alpha\beta}\, p_\beta = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m_0^2 c^2 \tag{9.20}$$

jest niezmiennikiem relatywistycznym.

Relatywistyczne równania Newtona

W mechanice Newtona zmiany pędu punktu materialnego określa drugie prawo Newtona: $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. W mechanice relatywistycznej uogólnieniem tego równania jest relatywistyczne równanie Newtona

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{K} \ . \qquad (9.21)$$

Tu znów jako relatywistycznie niezmienniczy czas wybraliśmy czas własny cząstki. $\vec{K}$ jest czterowektorem siły, który nazywa się *siłą Minkowskiego*. Równanie (9.21) jest równaniem relatywistycznie inwariantnym, co znaczy że postać tego równania jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Znajdziemy składowe siły Minkowskiego. Zauważmy najpierw, że cztery równania (9.21) nie są niezależne, ponieważ, zgodnie z (9.20)

$$(\vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\tau}) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\vec{p}\cdot\vec{p}) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(m_0 c)^2 = 0 \ .$$

Tak więc równania (9.21) będą niesprzeczne wzajemnie tylko wtedy, gdy składowe czterowektora siły Minkowskiego spełniają równanie

$$(\vec{p}\cdot\vec{K}) = m(cK_0 - \upsilon_1 K_1 - \upsilon_2 K_2 - \upsilon_3 K_3) = 0 \ . \qquad (9.22)$$

Ze wzoru (9.21) dla składowych przestrzennych $(\alpha = 1,2,3)$ siły Minkowskiego mamy

$$K_i = \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{dp_i}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{F_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \qquad (9.23)$$

Tu $F_i = dp_i/dt$ są to współrzędne trójwymiarowego („zwykłego”) wektora siły.

Składową K_0 siły Minkowskiego znajdujemy ze wzorów (9.22) i (9.23)

$$K_0 = \frac{\upsilon_1 F_1 + \upsilon_2 F_2 + \upsilon_3 F_3}{c\sqrt{1-\beta^2}} \ . \qquad (9.24)$$

Tak więc zerowa składowa siły Minkowskiego jest wprost związana z mocą siły $\vec{F}$.

Związek między masą i energią

Rozważmy teraz ruch relatywistyczny cząstki $(\upsilon \approx c)$ w pewnym układzie inercjalnym K. Zgodnie z (9.21), dla zmiennych przestrzennych pędu równanie Newtona ma postać

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ . \quad (i = 1,2,3) \qquad (9.25)$$

W mechanice relatywistycznej, zgodnie z (9.18) i (9.19)

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = m_0\vec{\upsilon}/\sqrt{1-\beta^2} \ , \qquad (9.26)$$

a zatem równanie (9.25) możemy zapisać w postaci

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] . \tag{9.27}$$

Praca elementarna siły $\vec{F}$ dla małego przesunięcia punktu materialnego o $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$ wynosi

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot \vec{F}dt = \vec{v} \cdot d\vec{p} . \tag{9.28}$$

Korzystając ze wzoru (9.25) zapiszmy wzór (9.28) w postaci

$$dA = \vec{v} \cdot d\vec{p} = \vec{v} \cdot d\left[\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \frac{m_0 v\, dv}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_0c^2 \cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) . \tag{9.29}$$

Praca wykonana przez działający na punkt materialny siły $\vec{F}$ jest równa przyrostowi energii kinetycznej punktu, a zatem

$$dE \equiv dA = m_0c^2 \cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) . \tag{9.30}$$

Wynika stąd słynny wzór Einsteina określający związek między masą i energią cząstki

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{9.31}$$

W przypadku małych prędkości $(v/c << 1)$, rozwijając (9.31) w szereg potęgowy względem v/c, otrzymujemy

$$E = m_0c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = m_0c^2(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cdots) \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 . \tag{9.32}$$

Ze wzoru (9.32) wnioskujemy, że nawet nieruchoma cząstka $(v = 0)$ posiada energię $E_0 = m_0c^2$. Energia ta nazywa się *energią spoczynkową* cząstki.

Biorąc pod uwagę, że $p_0 = mc$ i korzystając ze wzorów (9.20) i (9.31) znajdziemy związek między energią a trójwymiarowym pędem

$$E^2 = m^2c^4 = p_0^2c^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2 , \tag{9.33}$$

gdzie $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Ze wzoru (9.33) wynika, że jeżeli masa spoczynkowa cząstki (na przykład fotonu) jest równa zeru $(m_0 = 0)$, to energia i pęd cząstki określa związek

$$E = cp \quad . \tag{9.34}$$

Dla fotonu $p = h/\lambda$, gdzie λ - długość fali świetlnej, h - stała Plancka, a zatem ze wzoru (XXX.34) otrzymujemy słynny wzór Plancka - Einsteina określający związek między częstością ν i energią E fotonu

$$E = h\frac{c}{\lambda} \equiv h\nu \quad . \tag{9.35}$$