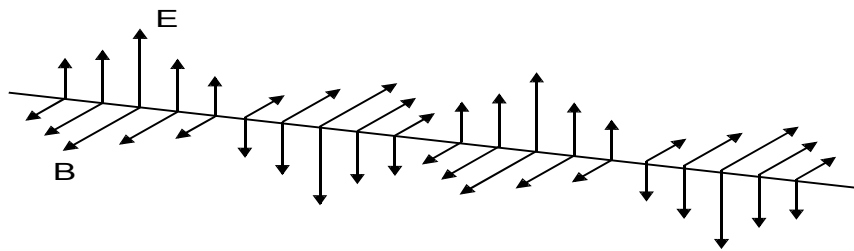


Wykład 7

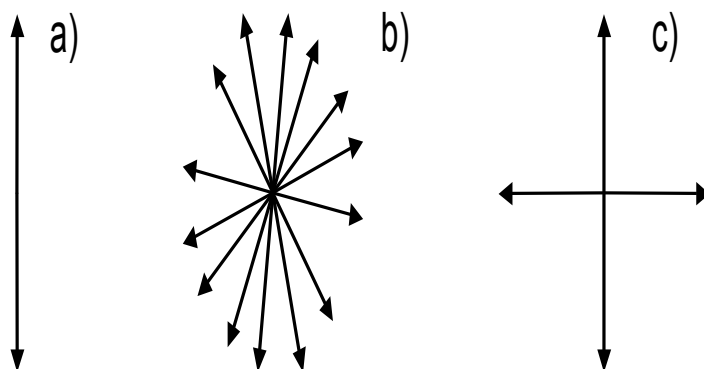
Polaryzacja światła

Światło podobnie jak każda fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną. Kierunki drgań wektorów \vec{E} i \vec{B} są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. Jeżeli zmiany wektora \vec{E} , a również wektora \vec{B} , zachodzą w jednej płaszczyźnie, to mówimy że fala elektromagnetyczna jest *plasko spolaryzowana* (spolaryzowana liniowo). Drgający wektor \vec{E} tworzy z kierunkiem ruchu fali płaszczyznę zwaną *płaszczyzną drgań*.



Przykładem fal spolaryzowanych liniowo są fale elektromagnetyczne radiowe (oraz mikrofałe) emitowane przez *antenę dipolową*. W antenie takiej fale wytwarzane są przez ładunek elektryczny drgający w górę i w dół anteny. Taka fala w dużej odległości od dipola, na osi prostopadłej, ma wektor pola elektrycznego równoległy do osi dipola (anteny) jest więc spolaryzowana liniowo.

Źródła światła widzialnego różnią się od źródeł fal radiowych i mikrofal tym, że atomy (cząsteczki) emitujące światło działają niezależnie. W konsekwencji światło rozchodzące się

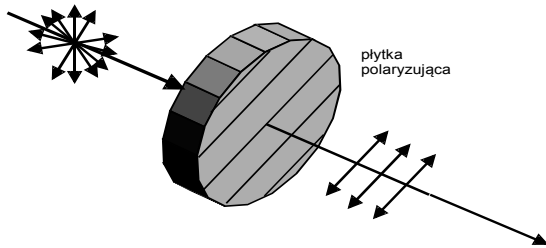


w danym kierunku składa się z *niezależnych ciągów fal*, których płaszczyzny drgań zorientowane są przypadkowo wokół kierunku ruchu fali (rysunek poniżej). Takie światło chociaż jest falą poprzeczną jest *niespolaryzowane*.

Rysunek pokazuje różnicę między falą poprzeczną spolaryzowaną liniowo (a) i falą poprzeczną niespolaryzowaną (b). Rysunek (c) przedstawia inny równoważny opis niespolaryzowanej fali poprzecznej; tutaj traktujemy ją jako złożenie dwóch spolaryzowanych liniowo fal o przypadkowo zmiennej różnicy faz.

Płytki polaryzujące. Prawo Malusa

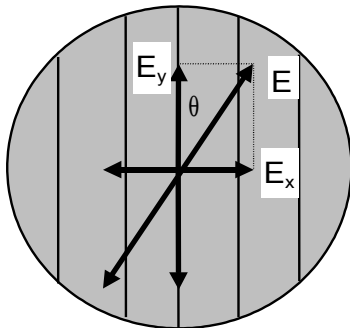
Na rysunku (poniżej) światło niespolaryzowane pada na płytkę z materiału polaryzującego, zwanego *polaroidem*. W płytce istnieje pewien charakterystyczny kierunek polaryzacji, zaznaczony na płytce liniami równoległymi.



polaryzacji, a pochłania te fale, w których są one prostopadłe.

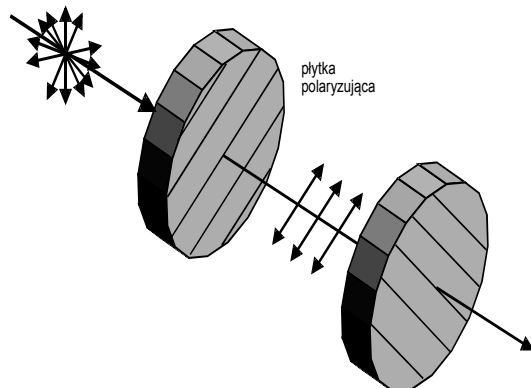
Fizyczny mechanizm powstawania takiego kierunku polaryzacji rozważmy później. Na razie wystarczy wiedzieć, że płytka przepuszcza tylko te fale, dla których kierunki drgań wektora elektrycznego są *równoległe do kierunku*

Rozpatrzmy ciąg fal padający na polaryzator tak, że wektor \vec{E} wyznaczający płaszczyznę polaryzacji fali tworzy kąt θ z kierunkiem polaryzacji płytki (patrz rysunek niżej). Składowa równoległa do kierunku polaryzacji płytki $E_y = E \cdot \cos \theta$ jest przepuszczana podczas gdy składowa prostopadła $E_x = E \cdot \sin \theta$ jest pochłaniana. Postawmy teraz na drodze



spolaryzowanego światła *drugą płytkę polaryzującą* (tak zastosowaną płytkę nazywamy *analizatorem*). Jeżeli płytkę drugą (analyzer) będziemy obracać wokół kierunku padania światła to natężenie światła przechodzącego przez obie płytki będzie się zmieniać osiągając maksimum gdy kierunki polaryzacji obu płytek pokrywają się. Minimum będziemy obserwowali przy prostopadłych kierunkach polaryzacji obu płytek.

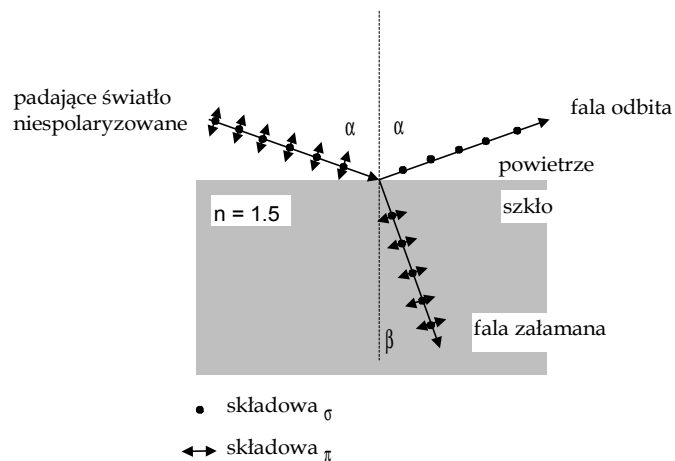
Jeżeli amplituda pola elektrycznego fali padającej na analyzer jest równa E_m to amplituda fali wychodzącej z analizatora wynosi $E_m \cos \theta$, gdzie θ jest kątem pomiędzy kierunkami polaryzacji obu płytek. Ponieważ natężenie światła jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy więc otrzymujemy:



$$I = I_m \cdot \cos^2 \theta . \tag{7.1}$$

Zauważmy, że I ma maksimum dla $\theta = 0^\circ$ lub $\theta = 180^\circ$, a minimum dla $\theta = 90^\circ$ lub $\theta = 270^\circ$. Powyższe równanie zwane jest *prawem Malusa*.

Polaryzacja przez odbicie



rysunku) i składową E_π leżącą w płaszczyźnie padania. Dla światła całkowicie niespolaryzowanego obie składowe mają jednakowe amplitudy. Stwierdzono doświadczalnie, że dla szkła (i innych materiałów dielektrycznych) istnieje pewien kąt padania, nazywany *kątem całkowitej polaryzacji* α_p , dla którego współczynnik odbicia składowej E_π jest równy zero. Wtedy wiązka odbita jest spolaryzowana liniowo prostopadle do płaszczyzny padania. Wiązka przechodząca jest tylko częściowo spolaryzowana (składowa E_π jest całkowicie załamana, a składowa E_σ tylko częściowo). Zwróćmy uwagę, że wiązka załamana ma większe natężenie od wiązki odbitej. Doświadczalnie stwierdzono, że gdy kąt padania jest równy kątowi całkowitej polaryzacji to wówczas wiązka odbita i załamana tworzą kąt prosty co oznacza że $\alpha + \beta = 90^\circ$. Natomiast z prawa załamania mamy $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$. Z obu tych równań otrzymujemy

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin(90^\circ - \alpha) = n_2 \cos \alpha ,$$

albo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_2}{n_1} = n \quad (7.2)$$

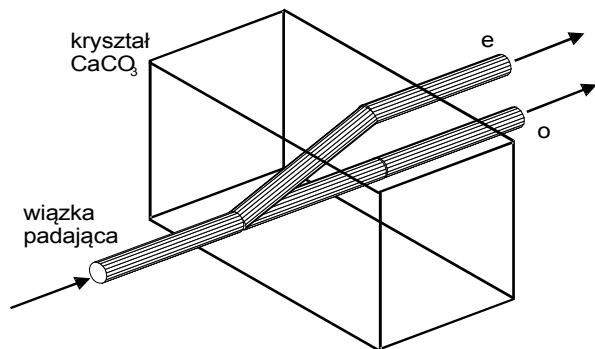
przy czym promień pada z ośrodka 1 i załamuje się w ośrodku 2.

Równanie jest nazywane *prawem Brewstera*. Prawo to zostało znalezione doświadczalnie ale oczywiście można je wyprowadzić ściśle przy pomocy równań Maxwella.

Zjawisko podwójnego załamania światła

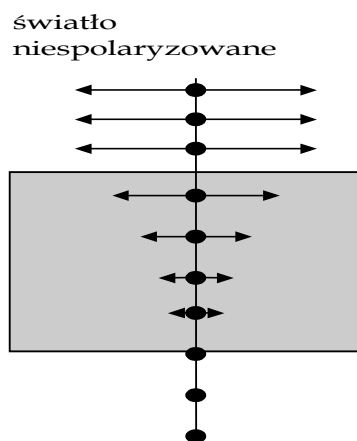
Dotychczas milcząco zakładaliśmy, że prędkość światła, a więc i współczynnik załamania, *nie zależą od kierunku rozchodzenia się światła w ośrodku ani od jego polaryzacji*. Ciała spełniające te warunki nazywamy *ciałami optycznie izotropowymi*. Istnieje jednak szereg ciał *anizotropowych* albo nie izotropowych. Dotyczy to nie tylko własności optycznych ale wielu innych. Np. pewne kryształy łamią się łatwo tylko w jednej płaszczyźnie, opór elektryczny mierzony w różnych kierunkach jest różny. Kryształy łatwiej magnesuje się w jednym kierunku niż innych itd.

Na rysunku poniżej pokazana jest niespolaryzowana wiązka światła padająca na kryształ kalcytu prostopadle do jednej z jego ścian. Z eksperymentu wynika, że pojedyncza wiązka rozszczepia się na powierzchni kryształu na dwie wiązki. Mamy do czynienia ze zjawiskiem, które nazywa się zjawiskiem *podwójnego załamania światła*.



Analizując obie wychodzące wiązki za pomocą płytki polaryzującej, znajdujemy, że obie wychodzące z kryształu wiązki są spolaryzowane liniowo, przy czym ich płaszczyzny drgań są wzajemnie *prostopadłe*. Wiązki te są oznaczone na rysunku przez *o* i *e*. Jeżeli zmienimy kąt padania to okaże się, że jedna z wiązek,

tzw. *promień zwyczajny* (*o*) spełnia prawo załamania (tak jak dla ośrodka izotropowego), a druga wiązka tzw. *promień nadzwyczajny* (*e*) nie spełnia tego prawa. Na rysunku kąt padania jest równy zero więc i kąt załamania też powinien być zerowy i tak jest dla promienia (*o*) ale nie dla promienia (*e*).



Różnicę między zachowaniem promieni zwyczajnego i nadzwyczajnego jest związane z tym, że promień zwyczajny (*o*) przechodzi przez kryształ z jednakową prędkością we wszystkich kierunkach tzn. ma jeden współczynnik załamania n_o tak jak izotropowe ciało stałe. Natomiast promień (*e*) ma prędkość w kryształach zależną od kierunku tzn. prędkość zmienia się od v_o do v_e , a współczynnik załamania od n_o do n_e .

Wielkości n_e i n_o nazywamy *głównymi współczynnikami załamania kryształu*. Dla kalcytu $n_e = 1,658$, $n_o = 1,486$. Niektóre podwójnie załamujące kryształy mają interesującą własność nazywaną *dichroizmem*, polegającą na tym, że jedna ze składowych polaryzacji jest pochłaniana silniej niż druga. Własność ta jest pokazana na rysunku. Na tej zasadzie opiera się działanie szeroko stosowanych *polaroidów*.

Fale elektromagnetyczne w ośrodku jednorodnym i anizotropowym

Rozważmy teraz ściśle zjawiska optyczne w kryształach, korzystając z równań Maxwella. Przypomnijmy, że w ośrodku izotropowym $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \cdot \vec{E}$, gdzie przenikalność elektryczna ϵ jest skalarem. W ośrodku anizotropowym

$$D_i = \epsilon_0 (\epsilon_{ix} E_x + \epsilon_{iy} E_y + \epsilon_{iz} E_z) . \quad (7.3)$$

Tu wskaźnik $i = x, y, z$ określa składowe wektora indukcji elektrycznej. Dziewięć wielkości ϵ_{ij} tworzą tak zwany *tensor przenikalności elektrycznej*. Dla symetrycznego tensora $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ istnieje taki układ współrzędnych, który nosi nazwę *układu osi głównych tensora* ϵ_{ij} i w którym związki (7.3) mają najprostszą postać

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x , \quad D_y = \epsilon_0 \epsilon_y E_y , \quad D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z , \quad (3.4)$$

gdzie $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ są tak zwane *główne stałe dielektryczne*, a $n_x = \sqrt{\epsilon_x}$, $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$ i $n_z = \sqrt{\epsilon_z}$ noszą nazwę *głównych współczynników załamania światła*. W ośrodku, który nazywamy *jednoosiowym* dwa z tych współczynników są sobie równe. Przyjmijmy zatem, że: $n_x = n_y = n_o$, (wskaźnik “o” powstał od angielskiego słowa *ordinary* czyli zwyczajny), $n_z = n_e \neq n_o$, (wskaźnik “e” powstał od angielskiego słowa *extraordinary* czyli nadzwyczajny) Kierunek z jest zatem kierunkiem wyróżnionym i nosi nazwę *osi optycznej* danego anizotropowego ośrodka.

Rozważmy teraz rozchodzenie się światła w ośrodku jednoosiowym przyjmując za punkt wyjścia równania Maxwella:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 , \quad (7.5a) \quad [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (7.5b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 , \quad (7.5c) \quad [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \quad (7.5d)$$

Po podstawieniu do tych równań $\vec{D} = \vec{D}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$, $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ i $\vec{H} = \vec{H}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ i wykonaniu różniczkowania otrzymujemy:

$$\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0, \quad (7.6a) \quad [\vec{k} \times \vec{E}_0] = \omega \mu_0 \vec{H}_0, \quad (7.6b)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0, \quad (7.6c) \quad [\vec{k} \times \vec{H}_0] = -\omega \vec{D}_0. \quad (7.6d)$$

Skąd, mnożąc wektorowo przez \vec{k} równanie (7.6b) i korzystając z tożsamości $[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ otrzymujemy:

$$[\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}_0]] = \vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k}) = \omega \mu_0 [\vec{k} \times \vec{H}_0]. \quad (7.7)$$

Uwzględniając wzór (7.6d), ze wzoru (7.7) znajdujemy

$$-(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) \cdot \vec{k} + k^2 \cdot \vec{E}_0 = \omega^2 \mu_0 \vec{D}_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\vec{D}_0}{\epsilon_0} = k_0^2 \cdot \frac{\vec{D}_0}{\epsilon_0}. \quad (7.8)$$

Tu skorzystaliśmy ze związku $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ i oznaczyliśmy przez $k_0 = \omega/c \equiv 2\pi/\lambda$ wartość wektora falowego w próżni.

Dla ośrodka izotropowego $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \epsilon \cdot \vec{E}_0$, a zatem z równania Maxwella, (7.6a) wynikałoby, że $\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = \epsilon_0 \epsilon \cdot (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) = 0$. Wtedy pierwszy wyraz w równaniu (7.8) byłby równy zeru i

$$k^2 \cdot \vec{E}_0 = k_0^2 \cdot \frac{\vec{D}_0}{\epsilon_0} = \epsilon \cdot k_0^2 \cdot \vec{E}_0. \quad (7.9)$$

Skąd

$$k^2 = \epsilon \cdot k_0^2 = n^2 k_0^2, \quad (7.10)$$

tak jak należało oczekiwać.

W przypadku ośrodka anizotropowego uproszczenie powyższe nie jest możliwe i musimy rozwiązywać pełne równanie (7.8). Ponieważ kierunki osi x i y nie są w ośrodku jednoosiowym wyróżnione, możemy przyjąć, że wektor falowy \vec{k} leży w płaszczyźnie xOz , tzn. że składowa wektora falowego $k_y = 0$. Wtedy, uwzględniając wzór (7.4) i rozpisując wektorowe równanie (7.8) przez składowe znajdujemy:

$$- (k_x E_{0x} + k_z E_{0z}) \cdot k_x + k^2 \cdot E_{0x} = k_0^2 \frac{D_{0x}}{\epsilon_0} = k_0^2 \epsilon_x E_{0x} , \quad (7.11a)$$

$$k^2 \cdot E_{0y} = k_0^2 \frac{D_{0y}}{\epsilon_0} = k_0^2 \epsilon_y E_{0y} , \quad (7.11b)$$

$$- (k_x E_{0x} + k_z E_{0z}) \cdot k_z + k^2 \cdot E_{0z} = k_0^2 \frac{D_{0z}}{\epsilon_0} = k_0^2 \epsilon_z E_{0z} . \quad (7.11c)$$

Wykorzystując główne współczynniki załamania zapiszmy układ równań (7.11) w postaci

$$(k_z^2 - k_0^2 n_o^2) \cdot E_{0x} - k_x k_z \cdot E_{0z} = 0 , \quad (7.12a)$$

$$(k^2 - k_0^2 n_o^2) \cdot E_{0y} = 0 , \quad (7.12b)$$

$$- k_x k_z E_{0x} + (k_x^2 - k_0^2 n_e^2) \cdot E_{0z} = 0 . \quad (7.12c)$$

Rozważmy najpierw równanie (7.12b). To równanie może być spełnione, jeżeli: a)

$$(k^2 - k_0^2 n_o^2) = 0 \text{ albo b) } E_{0y} = 0 .$$

a) W przypadku gdy $(k^2 - k_0^2 n_o^2) = 0$ z równania (7.12a) mamy

$$(k_z^2 - k_0^2 n_o^2) \cdot E_{0x} - k_x k_z \cdot E_{0z} = -k_x^2 \cdot E_{0x} - k_x k_z \cdot E_{0z} = -k_x (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) = 0 , \quad (7.13)$$

a więc niezależnie od kierunku wektora falowego \vec{k} , znajdującego się w płaszczyźnie xOz , wektor \vec{E}_0 musi być zawsze prostopadły do wektora falowego \vec{k} , czyli wektor \vec{E}_0 dla takiego rozwiązania musi być skierowany wzdłuż osi y . Zauważmy, że rozwiązanie to przypomina rozwiązanie w ośrodku izotropowym (będziemy je zatem nazywać *zwyczajnym*); a mianowicie niezależnie od kierunku rozchodzenia się fali wektor falowy $\vec{k}_o = \vec{k} \cdot n_o$, gdzie n_o to *zwyczajny* współczynnik załamania. Różnica jednak jest; wektor \vec{E}_0 jest nie tylko prostopadły do wektora falowego $\vec{k}_o = \vec{k} \cdot n_o$ ale jest zawsze prostopadły do osi optycznej. Podobnie jak w ośrodku izotropowym wektory \vec{E}_0 i \vec{D}_0 będą współliniowe.

b) W przypadku gdy $E_{0y} = 0$ w układzie równań (7.12) pozostają tylko dwa równania

$$(k_z^2 - k_0^2 n_o^2) \cdot E_{0x} - k_x k_z \cdot E_{0z} = 0 , \quad (7.14a)$$

$$- k_x k_z E_{0x} + (k_x^2 - k_0^2 n_e^2) \cdot E_{0z} = 0 . \quad (7.14b)$$

Układ algebraicznych równań (7.14) ma niezerowe rozwiązanie, jeżeli wyznacznik układu

równań jest równy zeru:

$$\begin{vmatrix} k_z^2 - k_0^2 n_o^2 & -k_x k_z \\ -k_x k_z & k_x^2 - k_0^2 n_e^2 \end{vmatrix} = k_x^2 k_z^2 - k_0^2 n_e^2 k_z^2 - k_0^2 n_o^2 k_x^2 + k_0^4 n_o^2 n_e^2 - k_x^2 k_z^2 = 0 \quad (7.15)$$

Po dzieleniu (7.15) przez $k_0^2 n_o^2 n_e^2$ znajdujemy

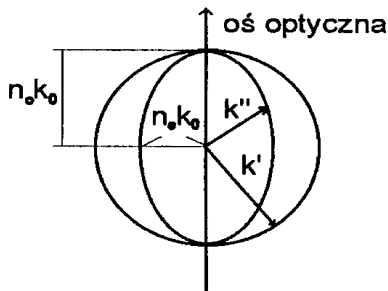
$$\frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} = k_0^2 \quad (7.16)$$

Ze wzoru (7.16) wynika, że koniec wektora falowego charakteryzującego drugie rozwiązanie będzie leżał na elipsie, której osie główne będą miały długości $n_o k_0$ i $n_e k_0$ (a właściwie to na elipsoidzie, utworzonej przez obrót elipsy wyznaczonej przez $n_o k_0$ i $n_e k_0$ wokół osi optycznej czyli osi z). Oznacza to, że długość tego wektora, która wyznaczy “efektywny” współczynnik załamania w danym kierunku, będzie zależała od jego kierunku, albo inaczej, od kąta, który wektor falowy tworzy z osią optyczną układu. Rozwiązanie to będziemy nazywać rozwiązaniem *nadzwyczajnym*.

Ze wzoru (7.14a), z uwzględnieniem (7.16), otrzymujemy następujący wzór na stosunek składowych z i x pola \vec{E} fali nadzwyczajnej:

$$\frac{E_{0z}}{E_{0x}} = \frac{k_z^2 - k_0^2 n_o^2}{k_x k_z} = -\frac{k_x^2 n_o^2}{n_e^2 k_x k_z} = -\frac{k_x}{k_z} \cdot \frac{n_o^2}{n_e^2} \quad (7.17)$$

Z równania (7.17) wynika, że gdyby ośrodek był izotropowy (czyli $n_e = n_o$), to wektor \vec{E} byłby prostopadły do wektora \vec{k} . Z tego wnioskujemy, że w ośrodku anizotropowym wektor \vec{E} fali nadzwyczajnej nie jest prostopadły do wektora falowego \vec{k} . Jednak ze wzoru (7.6a) ($\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0$) wynika, że dla fali nadzwyczajnej prostopadłym do wektora falowego \vec{k} jest wektor indukcji elektrycznej \vec{D} .



Na rysunku obok są przedstawione powierzchnie wektora falowego dla obu znalezionych rozwiązań, zwyczajnego i nadzwyczajnego dla przypadku ośrodka jednoosiowego *ujemnego* (tzn. dla $n_o > n_e$). Rozwiązanie zwyczajne, oznaczone jako \vec{k}' leży na powierzchni kuli o promieniu $n_o k_0$.

Długość wektora falowego \vec{k}' nie zależy od jego kierunku, tak jak w ośrodku izotropowym. Wektory \vec{E} i \vec{D} fali zwyczajnej są współliniowe i prostopadłe do wektora falowego \vec{k}' i osi optycznej (czyli do płaszczyzny rysunku).

Koniec wektora falowego \vec{k}'' , przedstawiającego drugie z rozwiązań, nadzwyczajne, leży na elipsoidzie o osiach głównych o długościach $n_e k_0$ (to są dwie krótsze osie główne leżące w płaszczyźnie xOy) i $n_o k_0$ - to jest oś elipsoidy pokrywająca z osią optyczną ośrodka. Fala elektromagnetyczna odpowiadająca fali nadzwyczajnej jest także spolaryzowana liniowo; oba wektory \vec{E} i \vec{D} leżą w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektor \vec{k}'' i oś optyczną. Jednakże tylko wektor \vec{D} jest prostopadły do wektora \vec{k}'' . Wektor \vec{E} fali nadzwyczajnej jest prostopadły do \vec{k}'' (i współliniowy z \vec{D}) tylko wtedy, gdy leży on w płaszczyźnie xOy lub na osi optycznej. Ten drugi przypadek to przypadek trywialny; oba rozwiązania degenerują się do jednego, gdyż kula i elipsoida stykają się i mamy jedno rozwiązanie a nie dwa. Pierwszy przypadek omówimy dokładniej niżej.

Istnienie dwóch rozwiązań w ośrodku anizotropowym tłumaczy podwójne obrazy obserwowane przy użyciu kryształów szpatu islandzkiego (kalcytu). Zjawisko podwójnego załamania światła nazywamy *dwójłomnością*. Miarą dwójłomności jest różnica współczynników załamania; $n_e - n_o$. Przezroczysty ośrodek izotropowy może stać się ośrodkiem dwójłomnym jeśli przyłożymy do niego mechaniczne naprężenie. Z drugiej strony występowanie dwójłomności dla ośrodków w normalnych warunkach izotropowych (np dla szkła) świadczy o występowaniu wewnętrznych naprężeń.

Płytki falowe

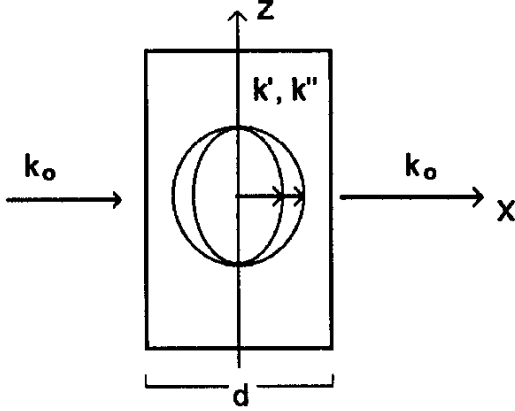
Płytki falowe to jedno z ważniejszych zastosowań ośrodków jednoosiowych wykorzystujące istnienie różnicy współczynników załamania n_e i n_o . Płytkę falową wycina się z materiału jednoosiowego w taki sposób, żeby oś optyczna leżała w płaszczyźnie, na którą pada wiązka światła, tak jak pokazano na rysunku niżej (oś optyczna ośrodka to oś z). Wektor falowy światła padającego \vec{k}_0 jest wówczas do tej płaszczyzny prostopadły. Dozwolone rozwiązania dla światła rozchodzącego się w kierunku osi x (a zarazem \vec{k}_0) w płytce będą następujące:

$$E_y = E_{0y} \cdot \exp[i(k'x - \omega t)] , \quad E_z = 0 , \quad k' = k_0 \cdot n_o , \quad (7.18a)$$

dla rozwiązania zwyczajnego oraz

$$E_z = E_{0z} \cdot \exp[i(k''x - \omega t)] , \quad E_y = 0 , \quad k'' = k_0 \cdot n_e , \quad (7.18b)$$

dla rozwiązania nadzwyczajnego, gdzie początek układu ($x = 0, z = 0$) leży na powierzchni wejściowej płytki falowej. Oczywiście wartości amplitud E_{0y} i E_{0z} będą zależały od polaryzacji światła padającego; zakładając, że nie ma odbicia (co niezupełnie jest prawdą) mielibyśmy po prostu równość pomiędzy amplitudami światła padającego i załamanego. Uwzględnienie odbicia wymagałoby zmniejszenia obu składowych ale w przybliżeniu z zachowaniem ich proporcji (dla padania prostopadłego małe różnice w natężeniu światła odbitego dla obu składowych wynikają z różnicy współczynników załamania n_o i n_e). W szczególności, jeśli światło padające na płytkę jest spolaryzowane liniowo w kierunku osi optycznej (czyli osi z), jedynym możliwym rozwiązaniem będzie rozwiązanie nadzwyczajne, natomiast w przypadku polaryzacji prostopadłej do osi optycznej (czyli w kierunku y) dozwolone rozwiązanie to rozwiązanie zwyczajne.



Najbardziej interesująca sytuacja powstanie jednak wtedy, gdy polaryzacja światła padającego na płytkę falową jest taka, że reprezentowane są, w taki czy inny sposób, obie składowe. Rozpatrzmy przypadek, w którym światło padające jest spolaryzowane liniowo w kierunku tworzącym kąt 45° z osią optyczną z , a także z osią y . Jeżeli przez \vec{e}_y i \vec{e}_z oznaczymy wektory jednostkowe w kierunku osi y i z to dla światła padającego na płytkę będziemy mieli:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x = 0) &= [\vec{e}_z \cdot E_{0z} \cdot \exp[i(n_e k_0 x - \omega t)] + \vec{e}_y E_{0y} \cdot \exp[i(n_o k_0 x - \omega t)]] |_{x=0} = \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \exp(i\omega t) , \end{aligned} \quad (7.19)$$

gdzie $E_{0y} = E_{0z} = E_0 \cos 45^\circ$.

Po przejściu płytki dla światła wychodzącego z płytki otrzymujemy

$$\begin{aligned}\vec{E}(x = d) &= [\vec{e}_z \cdot E_{0z} \cdot \exp[i(n_e k_0 d - \omega t)] + \vec{e}_y E_{0y} \cdot \exp[i(n_o k_0 d - \omega t)]] = \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_y + \vec{e}_z \cdot e^{i\Delta}) \cdot \exp[i(n_o k_0 d - \omega t)] ,\end{aligned}\quad (7.20)$$

gdzie $\Delta = (n_e - n_o) \cdot k_0 d$ jest różnicą faz wynikającą z różnicy współczynników załamania fali zwyczajnej i fali nadzwyczajnej.

Dla *ośrodka jednoosiowego dodatniego* $\Delta > 0$ jest dodatnie, oś optyczna z ośrodka jest osią wolną, a prostopadły do niej kierunek \mathcal{Y} będzie kierunkiem osi szybkiej płytki falowej. *Wartość* różnicy faz Δ zależy od grubości płytki d ; zatem możemy tak dobrać d żeby na przykład $\Delta = \pi / 2$ (otrzymamy wtedy tzw. płytkę *ćwierćfalową*) lub żeby $\Delta = \pi$ (wtedy otrzymujemy płytkę *półfalową*). W pierwszym, bardziej interesującym przypadku amplituda fali wychodzącej z ćwierćfalówki będzie:

$$\vec{E}_0(\Delta = \pi / 2) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_y + i\vec{e}_z) ,\quad (7.21)$$

mamy zatem zespoloną amplitudę i spodziewamy się, wobec tego, polaryzacji eliptycznej. Jednak, ponieważ \vec{e}_y i \vec{e}_z są wektorami jednostkowymi czyli o tej samej długości (równej jeden), polaryzacja światła wychodzącego z ćwierćfalówki będzie ostatecznie polaryzacją kołową. Płytkę ćwierćfalową odpowiednio zorientowaną względem kierunku polaryzacji liniowej padającego na nią światła zmieni zatem stan polaryzacji tego światła z liniowej na kołową. Działanie ćwierćfalówki sprowadza się zatem do wprowadzenia różnicy faz o wartości $\Delta = \pi / 2$ pomiędzy składowymi światła spolaryzowanymi liniowo w kierunku osi optycznej i prostopadle niej. O ile składowe \mathcal{Y} i \mathcal{Z} padającego światła nie są równe (jest tak tylko wtedy, gdy kierunek polaryzacji światła padającego tworzy kąt 45° z osią ćwierćfalówki) to otrzymamy polaryzację eliptyczną. Z drugiej strony, jeśli polaryzacja światła padającego była na przykład eliptyczna to wstawienie odpowiednio zorientowanej ćwierćfalówki (tak aby jej oś pokrywała się z jedną z osi głównych elipsy polaryzacji światła padającego) da na wyjściu światło o polaryzacji liniowej itd..