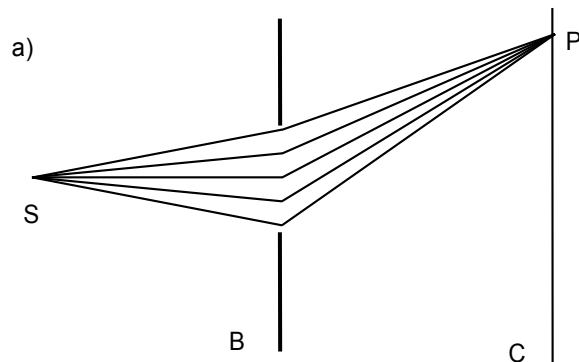


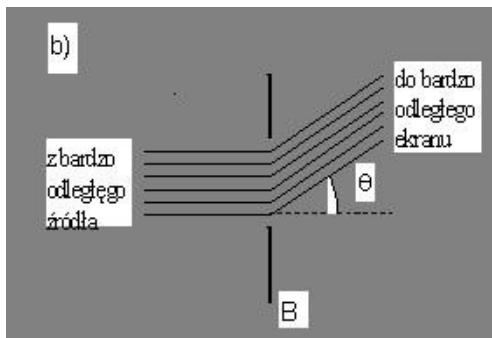
## Wykład 6

### Dyfrakcja Fresnela i Fraunhofera

Zjawisko dyfrakcji (ugięcia) światła odkrył Grimaldi (XVII w). Polega ono na uginaniu się promieni świetlnych przechodzących w pobliżu przeszkody (np. brzeg szczeliny). Wyjaśnienie dyfrakcji w oparciu o zasadę Huyghensa - Fresnela jest następująca.

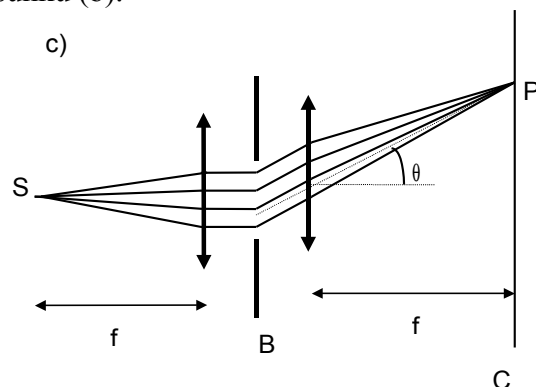


Fala ze źródła  $S$  pada na szczelinę  $B$  i przechodząca przez otwór pada na ekran  $C$ . Natężenie w punkcie  $P$  można obliczyć dodając do siebie wszystkie wektory falowe  $\vec{E}$  pochodzące od wszystkich punktów szczeliny. Te zaburzenia falowe mają różne amplitudy i fazy ponieważ: a) elementarne oscylatory Huyghensa (punkty w szczelinie) są w różnych odległościach od punktu  $P$ ; b) światło opuszcza te punkty pod różnymi kątami. Sytuacja gdy fale opuszczające otwór nie są falami płaskimi pojawia się gdy źródło fal  $S$  i ekran  $C$ , na którym powstaje obraz znajdują się w skończonej odległości od ekranu ze szczeliną  $B$ . Taki przypadek nosi nazwę *dyfrakcji Fresnela*. Obliczenia natężeń światła są w tej sytuacji są trudniejsze.



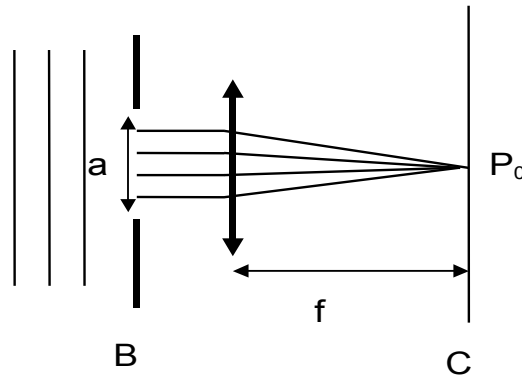
Całość upraszcza się, gdy źródło  $S$  i ekran  $C$  odsuniemy na bardzo duże odległości od otworu uginającego. Ten graniczny przypadek nazywamy *dyfrakcją Fraunhofera*. Czoła fal padających jak i ugiętych są płaszczyznami (promienie są równoległe) tak jak to widać na rysunku (b).

Warunki do wystąpienia dyfrakcji Fraunhofera można zrealizować w laboratorium za pomocą dwu soczewek (rysunek c). Pierwsza soczewka zmienia falę rozbieżną w równoległą, a druga skupia w punkcie  $P$  fale płaskie opuszczające otwór.



Wszystkie promienie oświetlające punkt  $P$  opuszczają otwór równoległe do linii przerywanej (przechodzącej przez środek soczewki). Warunki dyfrakcji Fraunhofera były z założenia spełnione w doświadczeniu Younga.

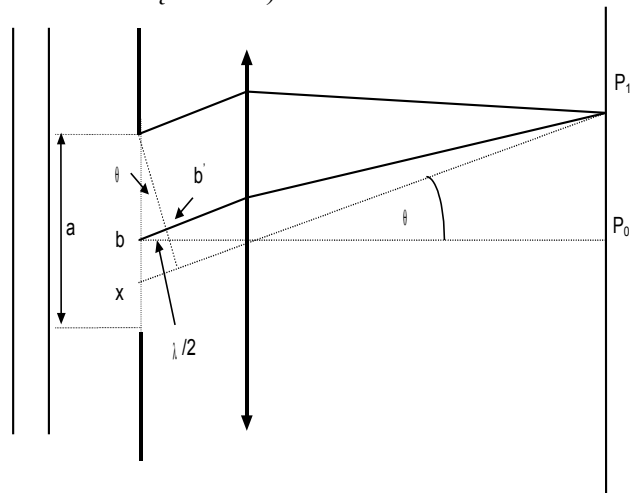
### Dyfrakcja Fraunhofera na pojedynczej szczeliny



Rozważmy falę płaską padającą prostopadle na szczelinę o szerokości  $a$ . Rozpatrzmy punkt środkowy  $P_0$  ekranu. Równoległe promienie przebywają do tego punktu te same drogi optyczne (różne geometryczne) tzn. promienie zawierają tę samą ilość długości fal (rozważane soczewki są cienkie).

Ponieważ w szczeliny promienie są zgodne w fazie to po przebyciu takich samych dróg optycznych nadal pozostają zgodne w fazie. Dlatego w środkowym punkcie  $P_0$  będzie maksimum.

Rozpatrzmy teraz inny punkt  $P_1$  na ekranie (rysunek obok). Promienie docierające do  $P_1$  wychodzą ze szczeliny pod kątem  $\theta$ .



Jeden promień ma początek u góry szczeliny, a drugi w jej środku. (Promień  $xP_1$  przechodzi przez środek soczewki więc nie jest odchylany). Jeżeli wybierzemy punkt  $P_1$  tak, żeby różnica dróg  $bb'$  wynosiła  $\lambda/2$ , to promienie zgodne w fazie w szczeliny będą miały w punkcie  $P_1$  fazy przeciwne i wygaszą się. Podobnie każdy inny promień wychodzący z górnej połowy szczeliny będzie się wygaszał z odpowiednim promieniem z dolnej połowy leżącym w odległości  $a/2$  poniżej. Punkt  $P_1$  będzie miał natężenie zerowe (pierwsze minimum dyfrakcyjne). Warunek opisujący to minimum ma następującą postać

$$\frac{1}{2} a \sin \theta = \frac{1}{2} \lambda ,$$

czyli

$$a \sin \theta = \lambda .$$

Gdyby szerokość szczeliny była równa  $\lambda$  wtedy pierwsze minimum pojawiłoby się dla  $\theta = 90^\circ$  czyli środkowe maksimum wypełniłoby cały ekran. W miarę rozszerzania szczeliny środkowe maksimum staje się węższe. Podobne rozważania możemy powtórzyć dla wielu punktów szczeliny i otrzymamy ogólne wyrażenie dla minimów obrazu dyfrakcyjnego w postaci

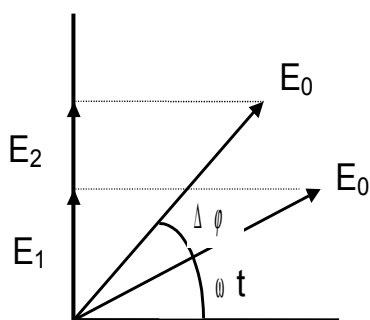
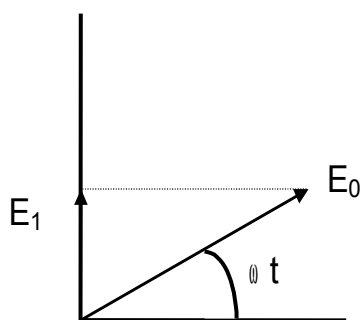
$$a \sin \theta = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{minima}) \quad (6.1)$$

Mniej więcej w połowie między każdą parą sąsiednich minimów występują oczywiście maksima natężenia.

### Graficzna konstrukcja Fresnela

Rozważmy graficzną metodę znalezienia obrazu dyfrakcyjnego, którą zaproponował Fresnel. Ta metoda czasami daje możliwość łatwo znaleźć dyfrakcyjny albo interferencyjny obraz. Metodę Fresnela zilustrujemy najpierw rozważając doświadczenie Younga dotyczące interferencji fal pochodzących od dwóch szczelin.

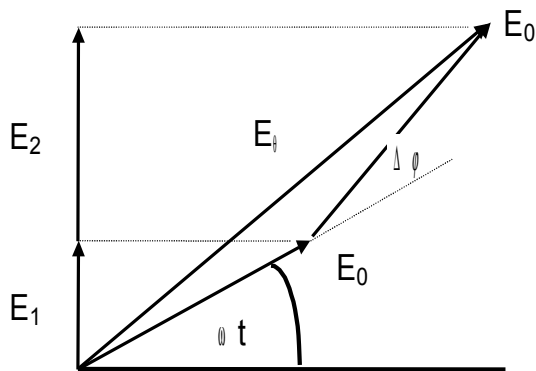
Aby wyliczyć wypadkowe natężenie światła w doświadczeniu Younga dodawaliśmy dwa zaburzenia falowe postaci  $E_1 = E_0 \cdot \sin \omega t$ ,  $E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega t + \Delta \varphi)$ , które miały tę samą częstość i amplitudę, a różniły się fazą o  $\Delta \varphi$ . Wynik uzyskany został algebraicznie na podstawie prostych wzorów trygonometrycznych. Jednak metody analityczne stają się znacznie trudniejsze gdy dodajemy więcej zaburzeń falowych (funkcji typu  $\sin x, \cos x$ ) i dlatego Fresnel wprowadził następującą prostą metodę graficzną.



Harmoniczne (sinusoidalne albo cosinoidalne) zaburzenie falowe może być przedstawione graficznie jako obracający się z prędkością kątową

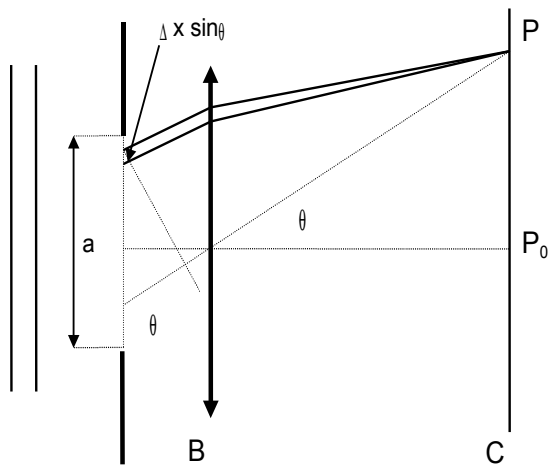
$\omega$  wektor, którego długość reprezentuje amplitudę  $E_0$ . Taki wektor będziemy nazywać *strzałką fazową* (wskazem). Zmienne w czasie zaburzenie falowe  $E_1 = E_0 \cdot \sin \omega t$  w chwili  $t$  przedstawione jest wtedy przez rzut tej „strzałki” na oś pionową (odpowiada to oczywiście pomnożeniu  $E_0$  przez  $\sin \omega t$ ). Drugie zaburzenie falowe  $E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega t + \Delta \varphi)$ , o tej samej amplitudzie  $E_0$ , różni się od  $E_1$  fazą  $\Delta \varphi$ . Znajdujemy je podobnie jako rzut „strzałki” na oś

pionową. Teraz wystarczy dodać  $E_1$  i  $E_2$  żeby otrzymać wypadkowe zaburzenie. Widać to jeszcze lepiej gdy umieści się początek jednej strzałki na końcu poprzedniej zachowując różnicę faz (rysunek niżej).



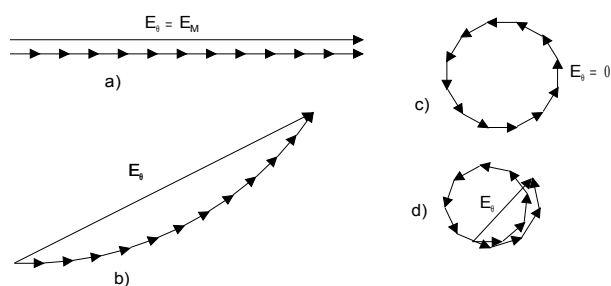
Różnica dróg między sąsiednimi paskami wynosi  $\Delta x \cdot \sin \theta$  stąd różnica faz  $\Delta \phi$  pomiędzy falami pochodzącymi z sąsiednich pasków wynosi  $\Delta \phi / 2\pi = \Delta x \cdot \sin \theta / \lambda$ , czyli

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin \theta \quad (6.2)$$



- Zakładamy, że paski są tak wąskie, że wszystkie punkty na danym pasku mają tę samą drogę optyczną do punktu  $P$ .
- Dla małych kątów  $\theta$  amplitudy  $\Delta E_0$  zaburzeń falowych w punkcie  $P$  pochodzące od różnych pasków przyjmujemy za jednakowe.

Zatem w punkcie  $P$  dodaje się  $N$  pól elektrycznych o tej samej amplitudzie  $\Delta E_0$ , tej samej częstotliwości i tej samej różnicy faz  $\Delta \phi$  między kolejnymi wektorami.

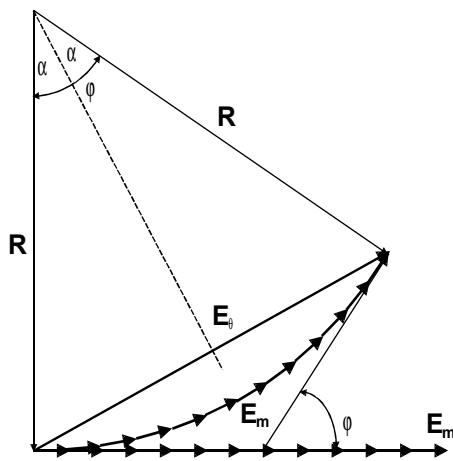


Na rysunku obok przedstawione jest zaburzenie wypadkowe dla kilku różnych miejsc na ekranie. Rysunek (a) przedstawia warunki dla maksimum środkowego ( $\Delta \phi = 0^0$ ). Rysunek (b) przedstawia warunki dla

kierunku nieco odmiennego od maksimum środkowego ( $\Delta \varphi = 5^\circ$ ). Rysunek (c) przedstawia warunki dla pierwszego minimum ( $\Delta \varphi = 30^\circ$ ). Rysunek (d) przedstawia warunki bliskie pierwszemu maksimum (poza środkowym) ( $\Delta \varphi = 42^\circ$ ).

Zwróćmy uwagę, że długość łuku jest zawsze równa  $E_M$  ale amplituda  $E_\theta$  jest różna. Wektory na rysunku odpowiadają amplitudom (a nie natężeniom). Żeby otrzymać natężenia trzeba je podnieść do kwadratu.

Na rysunku poniżej jest przedstawiona konstrukcja służąca do obliczenia natężenia światła w przypadku dyfrakcji na jednej szczeliny. Sytuacja odpowiada tej pokazanej na poprzednim rysunku (b).



Jeżeli szczelinę podzielimy na nieskończenie wiele małych pasków o szerokości  $dx$  to łuk strzałek będzie łukiem koła o promieniu  $R$ . Długość łuku wynosi  $E_m$  czyli równa jest amplitudzie w środku obrazu dyfrakcyjnego (linia prosta strzałek). Kąt  $\varphi$  w dolnej części rysunku przedstawia różnicę fazy między skrajnymi wektorami w łuku tzn.  $\varphi$  jest różnicą faz pomiędzy promieniami wychodzącymi z góry i dołu szczeliny.

Jak widać z rysunku  $\sin(\varphi / 2) = (E_\theta / 2) / R$ , czyli

$$E_\theta = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad (6.3)$$

W mierze łukowej  $\varphi = \frac{E_m}{R}$ . Podstawiając  $R = \frac{E_m}{\varphi}$  do równania (6.3) otrzymamy

$$E_\theta = E_m \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (6.4)$$

gdzie  $\alpha = \varphi / 2$ .

Przypomnijmy, że  $\varphi$  jest różnicą faz dla promieni wychodzących z krańców szczeliny. Ponieważ różnica dróg dla tych promieni wynosi  $(a \cdot \sin \theta)$ , gdzie  $a$  - szerokość szczeliny, posługując się znanym związkiem

$$\text{różnica faz} / 2\pi = \text{różnica dróg} / \lambda$$

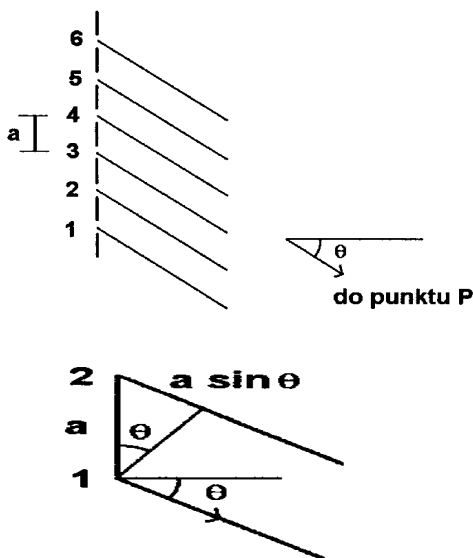
otrzymujemy  $\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta$ . Skąd

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta \quad (6.5)$$

Biorąc pod uwagę wzory (6.4) i (6.5) znajdujemy następujący wzór na natężenie światła dla dyfrakcji na pojedynczej szczelinie:

$$I_{\theta}(P) = I_m \cdot \frac{\sin^2(\alpha)}{(\alpha)^2} = I_m \cdot \frac{\sin^2(\pi a \sin\theta / \lambda)}{(\pi a \sin\theta / \lambda)^2} \quad (6.6).$$

### Interferencja Fraunhofera na $N$ jednakowych, równoodległych otworach (szczelinach)



Na rysunku obok jest pokazany układ, składający się z 6 otworów (szczelin) oświetlonych wiązką światła padającego prostopadle do ekranu (wiązki padającej nie pokazano). Ponieważ fala padająca dociera do wszystkich otworów w tej samej chwili czasu, różnica dróg dla fal rozchodzących się z sąsiednich otworów w stronę punktu  $P$  leżącego daleko na ekranie obserwacyjnym, pokazana na rysunku niżej dla otworów 1 i 2, będzie równa  $(a \cdot \sin\theta)$ . A zatem, jeżeli falę

światłą w punkcie  $P$ , pochodzącą od otworu 1, przedstawimy w postaci:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cdot \exp[i(kr_1 - \omega t)] \quad (6.7)$$

to falę światłą w punkcie  $P$ , pochodzącą od otworu 2 można zapisać w następujący sposób:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cdot \exp[i(kr_1 + ka \cdot \sin\theta - \omega t)] \quad (6.8)$$

Zatem falę światłą w punkcie  $P$ , pochodzącą od  $n$ -tego otworu można przedstawić w następujący sposób:

$$\vec{E}_n = \vec{E}_0 \cdot \exp[i(kr_1 + ka \cdot (n-1) \cdot \sin\theta - \omega t)] = \vec{E}_{n-1} \exp(ika \cdot \sin\theta) \quad (6.9)$$

a całkowitą, wypadkową falę światłą w punkcie  $P$  od  $N$  otworów będzie reprezentować następująca suma:

$$\vec{E}(P) = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n = \vec{E}_1 \cdot \sum_{n=1}^N \exp[ika(n-1) \cdot \sin \theta] . \quad (6.10)$$

Korzystając ze wzoru

$$\sum_{n=1}^N b^{n-1} = 1 + b + b^2 + \dots + b^{N-1} = \frac{1 - b^N}{1 - b} .$$

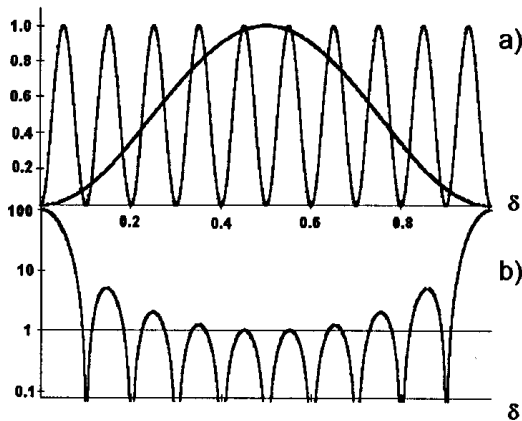
wzór (6.10) możemy zapisać w postaci (tu  $b = \exp(ika \cdot \sin \theta) \equiv \exp(i2\pi \cdot \delta)$ ):

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \vec{E}_1 \cdot \sum_{n=1}^N \exp[i2\pi (n-1) \cdot \delta] = \\ &= \vec{E}_1 \frac{1 - e^{i2\pi N\delta}}{1 - e^{i2\pi \delta}} = \vec{E}_1 \cdot \frac{e^{i\pi N\delta}}{e^{i\pi \delta}} \cdot \frac{e^{-i\pi N\delta} - e^{i\pi N\delta}}{e^{-i\pi \delta} - e^{i\pi \delta}} = \vec{E}_1 \cdot e^{i\pi (N-1)\delta} \cdot \frac{\sin(\pi N\delta)}{\sin(\pi \delta)} . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Natężenie fali świetlnej w punkcie  $P$  będzie zatem równe:

$$I(P) \propto |\vec{E}(P)|^2 = (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1^*) \cdot \frac{\sin^2(\pi N\delta)}{\sin^2(\pi \delta)} \equiv I_1(P) \cdot F^2 , \quad (6.12)$$

gdzie funkcja  $I_1(P)$  jest opisuje rozkład natężenia światła (punkt  $P$  jest punktem bieżącym na ekranie obserwacyjnym) zatem będzie zawierać efekty dyfrakcyjne, natomiast drugi czynnik,  $F^2$ , to *czynnik interferencyjny*, związany z nakładaniem się światła ugiętego na wszystkich otworach.



Na rysunku (a) obok są przedstawione dwie funkcje  $\sin^2(\pi N\delta)$  i  $\sin^2(\pi \delta)$  tworzące czynnik interferencyjny dla układu 10 równoodległych i jednakowych otworów rozmieszczonych na osi  $Ox$ . Na rysunku (b) przedstawiono ich iloraz. b), będzie także okresowa z okresem zmiennej  $\delta$  równym jeden. Dla  $\delta$  całkowitych ( $\delta = m$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  itd.) wyrażenie

$$F^2 = \frac{\sin^2(\pi N\delta)}{\sin^2(\pi \delta)} , \quad (6.13)$$

jest nieoznaczone (typu  $0/0$ ). Przy  $\delta \rightarrow 0$  ze wzoru (6.13) otrzymujemy:

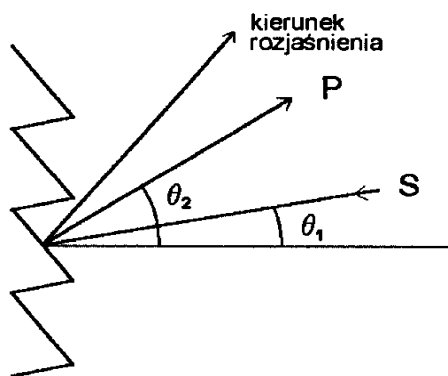
$$F^2 = \frac{\sin^2(\pi N\delta)}{\sin^2(\pi \delta)} \approx \frac{(\pi N\delta)^2}{(\pi \delta)^2} = N^2 . \quad (6.14)$$

Łatwo wykazać, że dla innych  $\delta$  całkowitych, ze względu na okresowość funkcji, wartości  $F^2$  muszą być takie same i równe  $N^2$ . Będą to wartości maksymalne, a odpowiadające im prążki jasne będziemy nazywali *prążkami głównymi*. Inne lokalne maksima funkcji  $F^2$  odpowiadać będą maksimom funkcji  $\sin^2(\pi N\delta)$  (a nie jej zerom, jak w przypadku maksimów głównych), a ich wartości będą znacznie mniejsze. Będą one odpowiadały tak zwanym jasnym prążkom bocznym albo wtórnym, a będzie ich, pomiędzy prążkami głównymi,  $N - 2$ . Prążki jasne rozdzielone są prążkami ciemnymi, których będzie, pomiędzy dwoma kolejnymi prążkami głównymi,  $N - 1$ .

### Siatki dyfrakcyjne

Własności układu wielu równoległych i równoodległych szczelin zostały wykorzystane w tzw. *siatkach dyfrakcyjnych*, które umożliwiają jeden z najdokładniejszych pomiarów (długości fali światła) rutynowo wykonywanych przez fizyków pracujących w wielu różnych działach fizyki. Pierwsze siatki dyfrakcyjne zostały wykonane przez Fraunhofera już w 1820 roku. Podstawowy rodzaj siatki dyfrakcyjnej, to tzw siatka odbiciowa pokazana na rysunku niżej. Ponieważ wiązka światła ze źródła  $S$  nie pada na siatkę prostopadłe (tylko pod kątem  $\theta_1$  różnica faz dla fal ugiętych na sąsiednich otworach będzie składała się z dwóch podobnych wyrazów. Zatem maksima główne siatki dyfrakcyjnej tego typu muszą spełniać następujący warunek:

$$\delta = \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = \frac{a}{\lambda} \cdot \Phi = m, \quad (6.15)$$



gdzie  $\Phi = (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$  i  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

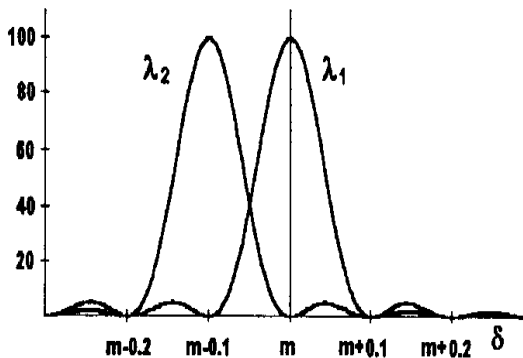
Dla ustalonego kąta padania  $\theta_1$ , dla każdego rzędu siatki  $m$  będziemy mieli wobec tego wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy kątem  $\theta_2$  i długością fali  $\lambda$ . A zatem pomiar długości fali można sprowadzić do pomiaru położenia odpowiedniego prążka, który może być wykonany bardzo dokładnie.

W praktyce robi to się najczęściej nieco inaczej; przy ustalonych kierunkach do punktów  $P$  i  $S$  (których rolę grają szczeliny wyjściowa i wejściowa spektrometru), obracamy całą siatką i mierzymy jej kąt obrotu. Przyrządy takie często nazywa się *monochromatorami*.



## Kryterium Rayleigha

Bardzo ważną sprawą w przypadku przyrządów takich jakich monochromatory czy spektrografy jest ich *rozdzielczość spektralna*, tzn zdolność rozróżnienia dwóch bliskich długości fali. Rozważmy ten problem na przykładzie omawianej wyżej odbiciowej siatki dyfrakcyjnej. Zgodnie z kryterium Rayleigha, *dwa prążki główne, odpowiadające różnym długościom fali  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  można rozróżnić, gdy maksimum pierwszego przypada nie bliżej niż na pierwszy minimum drugiego.*



Na rysunku pokazano rozkład natężeń dla którego, zgodnie z tzw kryterium Rayleigha, można jeszcze rozróżnić dwie bliskie długości fali,  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Kryterium to jest oczywiście trochę arbitralne, ale jest to w tej sytuacji nieuniknione. Pierwsze, najbliższe do głównego maksimum (6.15), minima dla długości fali  $\lambda$  wypadają dla  $\delta = m \pm 1/N$ , a zatem:

$$\delta_{\min} = \frac{a}{\lambda} \cdot \Phi_2 = m \pm \frac{1}{N} . \quad (6.16)$$

Ze wzorów (6.15) i (6.16) znajdujemy

$$|\delta_{\max} - \delta_{\min}| = \frac{a}{\lambda} \cdot (\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{a}{\lambda} \cdot \Delta \Phi = \frac{1}{N} . \quad (6.17)$$

Tu zgodnie z (6.15)  $\delta_{\max} = a\Phi_1 / \lambda = m$ .

Z drugiej zaś strony, ze wzoru (6.15) otrzymujemy następujący ogólny związek pomiędzy długością fali  $\lambda$  i wielkością  $\Phi$  :  $\lambda = a\Phi / m$ . Skąd

$$\Delta \lambda = \frac{a}{m} \cdot \Delta \Phi . \quad (6.18)$$

Zestawiając razem wzory (6.17) i (6.18) otrzymujemy ostatecznie wyrażenie na najmniejszą możliwą różnicę długości fali:

$$\Delta \lambda = \frac{a}{m} \cdot \Delta \Phi = \frac{a}{m} \cdot \frac{\lambda}{aN} = \frac{\lambda}{mN} \quad (6.19)$$

lub też, w innej, bardziej przyjętej postaci:

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \mathbf{R} = m \cdot N , \quad (6.20)$$

gdzie  $\mathbf{R}$  określa się mianem *zdolności rozdzielczej*.