

Wykład 5

Optyka falowa. Zasada Huyghensa - Fresnela

Opis rozchodzenia się światła oparty na pojęciu promieni jest zadowalający tylko do chwili, gdy rozmiary soczewek, szczelin i innych urządzeń optycznych jest znacznie większy od długości fali światła. Gdy ten warunek nie jest spełniony, ważną rolę zaczyna odgrywać falowa natura światła. Podstawowymi zjawiskami wynikającymi z tego, że światło jest falą elektromagnetyczną, są zjawiska dyfrakcji i interferencji. Przed tym jak zacząć rozważać zjawiska interferencji i dyfrakcji światła rozważmy zasadę Huyghensa - Fresnela.

Wyobraźmy sobie najpierw, że pomiędzy źródłem S i punktem obserwacyjnym P nie ma żadnego ekranu, wówczas pole elektryczne w punkcie P będzie całkowicie określone przez pole fali świetlnej E_S emitowanej przez źródło S :

$$E_1(P) = E_S, \quad (5.1)$$

We wzorze (5.1) świadomie nie rysujemy nad wektorami strzałki; przechodzimy bowiem do prostszego opisu światła (skalarne światło), w którym nie interesujemy się jak jest skierowany w punkcie P wektor $\vec{E}_1(P)$. Teraz wyobraźmy sobie, że pomiędzy źródłem światła S i punktem P został wprowadzony nieprzezroczysty ekran z otworem, ale otwór w tym ekranie jest zamknięty "zatyczką", wykonaną z tego samego materiału. Wówczas korzystając z zasady superpozycji pól elektrycznych możemy zapisać:

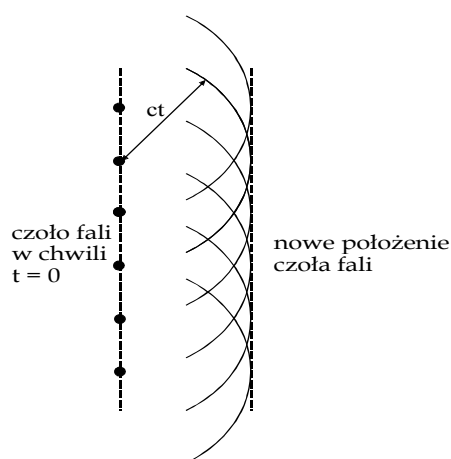
$$E_2(P) = E_S + E_{ekran} + E_{zatyczki} = 0, \quad (5.2)$$

gdzie $E_2(P)$ jest całkowitym polem fali świetlnej w punkcie P . Przez E_{ekran} oznaczyliśmy pole elektryczne w punkcie P , które wytwarza ekran z otworem, a $E_{zatyczki}$ oznacza pole elektryczne w punkcie P , źródłem którego jest zatyczka zamykająca otwór. Oczywiście, ponieważ ekran jest nieprzezroczysty i otwór jest zasłonięty, pole w punkcie P musi być równe zero.

Fizyczne pochodzenie pola E_{ekran} i pola $E_{zatyczki}$ nie jest wcale takie tajemnicze; materia składa się przecież z ładunków elektrycznych, które pod wpływem zewnętrznych pól elektrycznych będą wykonywać drgania wytwarzając dzięki temu te dodatkowe pola o tej samej częstotliwości.

Przy odsłoniętym otworze (oczywiście jest to sytuacja, która nas najbardziej interesuje) pole elektryczne w punkcie P wynosi:

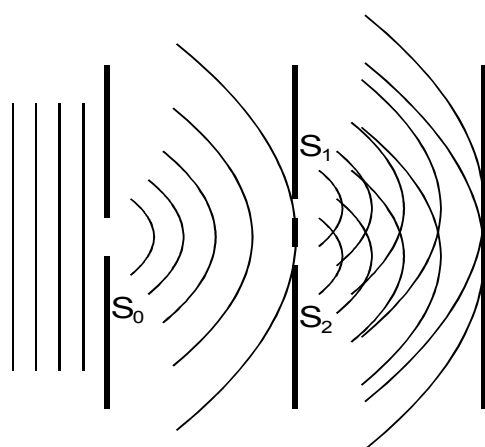
$$E_3(P) = E_S + E_{ekran} = -E_{zatycki} . \quad (5.3)$$



Jest to bardzo interesujący i może trochę zaskakujący wynik; pole pochodzące od fali świetlnej za ekranem z otworem jest, z dokładnością do znaku, równe polu pochodzącemu od zatycki zasłaniającej otwór. Wynik ten stanowi podstawę tzw. zasady Huyghensa-Fresnela która stwierdza, że każdy punkt czoła fali może być uważany za źródło nowych fal kulistych (fikcyjne oscylatory Huyghensa). Położenie czoła fali po czasie t będzie dane przez powierzchnię styczną do tych fal kulistych. Metoda Huyghensa daje się zastosować jakościowo do wszelkich zjawisk falowych.

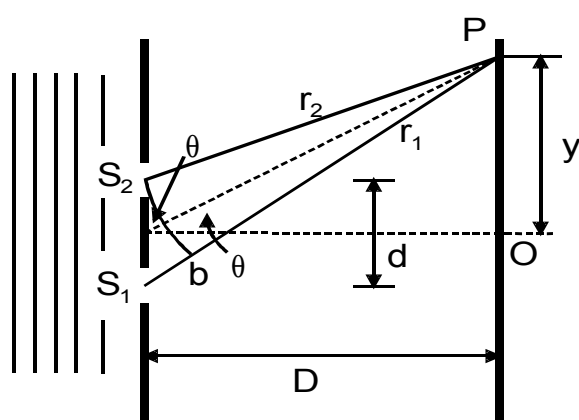
Interferencja. Doświadczenie Younga

Zjawisko interferencji fal polega na nakładaniu się fal i wytwarzaniu ciemnych i jasnych plam na ekranie. Istnienie interferencji dla światła było po raz pierwszy wykazane przez Thomasa Younga w 1801 r.



Young oświetlił światłem słonecznym ekran, w którym był zrobiony mały otwór S_0 . Przechodzące światło padało następnie na drugi ekran z dwoma otworami S_1 i S_2 . Za otworami powstają i rozchodzą się dalej dwie, nakładające się fale kuliste. Warunki stosowalności optyki geometrycznej nie są spełnione i na szczelinach następuje ugięcie fal. Mamy do czynienia z optyką falową.

Jeżeli umieścimy ekran w jakimkolwiek miejscu, tak aby przecinał on nakładające się na siebie fale to możemy oczekiwać pojawienia się na nim ciemnych i jasnych plam następujących po sobie kolejno.



Rozważmy teraz doświadczenie Younga ilościowo. Zakładamy, że światło padające jest monochromatyczne czyli zawiera tylko jedną długość fali. Na rysunku punkt P jest dowolnym punktem na ekranie, odległym o r_1 i r_2 od wąskich szczelin S_1 i S_2 . Linia bS_2 na rysunku poprowadzona tak, aby $PS_2 = bP$. Oba promienie wychodzące ze szczelin S_1 i S_2 są zgodne w fazie, gdyż pochodzą z tego samego czoła fali płaskiej. Ponieważ drogi, po których docierają te fale do punktu P są różne, ich fazy w punkcie P mogą być różne. Odcinki bP i PS_2 są równe, a zatem o różnicę faz decyduje różnica dróg optycznych czyli odcinek S_1b . Aby w punkcie P było *maksimum*, długość odcinka S_1b musi spełniać warunek:

$$S_1b = m\lambda \quad , \quad \text{gdzie } m = 0,1,2,\dots \quad , \quad (5.4)$$

lub

$$d \cdot \sin\theta = m\lambda \quad , \quad \text{gdzie } m = 0,1,2,\dots \quad . \quad (5.5)$$

Jest tak dlatego, że po przebyciu odcinka równego λ faza fali powtarza się, więc dla drogi $m\lambda$ fale w punkcie P będą znów zgodne w fazie, tak samo jak na początku tej drogi. Zauważmy, że każdemu maksimum powyżej punktu O odpowiada położone symetrycznie maksimum poniżej punktu O . W punkcie O mamy $m = 0$, a zatem w tym punkcie istnieje centralne maksimum.

Dla uzyskania *minimum* w punkcie P , odcinek S_1b musi zawierać połówkową liczbę długości fal, to jest:

$$S_1b = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda \quad , \quad \text{gdzie } m = 0,1,2,\dots \quad , \quad (5.6)$$

lub

$$d \cdot \sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda \quad , \quad \text{gdzie } m = 0,1,2,\dots \quad . \quad (5.7)$$

Spójność - koherencja

Podstawowym warunkiem powstania stabilnego dobrze określonego obrazu interferencyjnego jest, aby fale świetlne które przybywają z punktów S_1 i S_2 miały *dokładnie określoną różnicę faz, która nie zmienia się w czasie*. (Przypomnimy, że faza $(kx - \omega t)$ określa stan fali $E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$ w danym miejscu i czasie). Mówimy więc, że dla obserwacji obrazu interferencyjnego źródła fal interferencyjnych S_1 i S_2 muszą spełniać warunek *spójności (koherencji) czasowej*.

Innym rodzajem spójności jest tzw. spójność przestrzenna, która wiąże się ze stopniem korelacji pomiędzy kierunkami fal świetlnych (kierunkami wektorów falowych \vec{k}) emitowanymi przez różne obszary źródła światła. Warunek spójności przestrzennej jest automatycznie spełniony dla źródła punktowego, natomiast dla źródła o skończonych wymiarach to nie jest tak.

Jeżeli szczeliny S_1 i S_2 zastąpimy przez dwa niezależne źródła fal (np. żarówki) *to nie otrzymamy* prążków interferencyjnych, ekran będzie oświetlony prawie równomiernie. Interpretujemy to w ten sposób, że różnica faz dla fal pochodzących z niezależnych źródeł zmienia się w czasie w sposób nieuporządkowany. Mówimy, że te źródła są *niespójne, niekoherentne*.

Zasada superpozycji

Zjawisko interferencji (a również zjawisko dyfrakcji o którym mowa będzie później) związane są z nakładaniem się różnych fal, pochodzących z różnych otworów (lub z różnych fragmentów jednego otworu w przypadku dyfrakcji), oświetlonych tą samą falą padającą. By zatem opisać te zjawiska, powinniśmy znaleźć rozkład natężeń wynikający z nakładania się w obszarze za otworem, czy otworami, "fragmentów" tej samej fali.

Podstawą opisu zjawisk interferencji i dyfrakcji jest tzw. zasada superpozycji, związana z problemem nakładania się różnych fal i wynikająca z liniowości równania falowego:

$$\Delta(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)}{\partial t^2} \equiv \Delta\vec{E}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2} + \Delta\vec{E}_2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}_2}{\partial t^2} = 0, \quad (5.8)$$

Jeżeli \vec{E}_1 i \vec{E}_2 są rozwiązaniami równania falowego to prawa strona jest równa zero, zatem lewa strona też musi być równa zero, a to oznacza, że fala $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$ też jest rozwiązaniem

równania falowego.

Zasada superpozycji mówi, że całkowite pole elektromagnetyczne jest sumą wszystkich pól występujących w danej objętości.

Natężenie fali świetlnej w zapisie zespolonym

W ośrodku izotropowym dla fali płaskiej na wykładzie 2 otrzymaliśmy wzór $\sqrt{\mu_0 \mu} \cdot H_x(z, t) = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} \cdot E_y(z, t)$ (wzór (2.40)). Korzystając ze związków: $n = \sqrt{\epsilon \cdot \mu}$, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, zapiszmy:

$$H_x = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot E_y = \frac{\epsilon_0 \cdot c}{\mu} \sqrt{\epsilon \mu} \cdot E_y = \frac{\epsilon_0 \cdot c}{\mu} n \cdot E_y,$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania ośrodka.

W przypadku materiałów niemagnetycznych przenikalność $\mu \approx 1$, a zatem natężenie fali (czyli wektor Poyntinga - Umowa) można przedstawić następującym wzorem:

$$S \equiv |\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \epsilon_0 c n \cdot E^2. \quad (5.9)$$

Powyższy wzór jest bardzo ważny; wyraża on bowiem mierzalną wielkość, jaką jest wektor Poyntinga - Umowa, poprzez pole elektryczne, które występuje w teorii (równaniach Maxwella).

Na ogół mierzymy nie *chwilowe* ale *średnie* w czasie wartości natężenia wiązki światła. Dla fali płaskiej $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ mamy

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{t} \int_0^t \cos[2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] dt \right] = \frac{1}{2} E_0^2, \quad (5.10)$$

ponieważ wyraz $\frac{1}{t} \int_0^t \cos[2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t')] dt' = -\frac{\sin[2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]}{2\omega t}$ dąży do zera, gdy $t \rightarrow \infty$.

Okazuje się, że zapis zespolony może być dla obliczania wartości średnich w czasie bardzo przydatny. W zapisie zespolonym $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \vec{E}_0 \cdot \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$, a zatem wzór (5.10) możemy zapisać w postaci

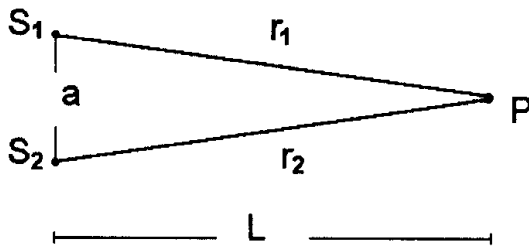
$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle = \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2. \quad (5.11)$$

Podstawiając (5.11) do wzoru (5.9) znajdujemy:

$$I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle = \varepsilon_0 cn \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 cn \cdot |\vec{E}|^2 . \quad (5.12)$$

Natężenie w doświadczeniu Younga

Obliczmy teraz natężenie światła w doświadczeniu Younga. Niech zatem S_1 i S_2 będą źródłami fal monochromatycznych kulistych o tej samej częstotliwości i polaryzacji, oddległych od siebie o a .



Zgodnie z zasadą superpozycji w punkcie P obserwujemy falę świetlną \vec{E} , która jest sumą fal pochodzących z obu źródeł:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \\ &= \frac{\vec{E}_{01}}{r_1} \exp[i(k_1 r_1 - \omega t)] + \frac{\vec{E}_{02}}{r_2} \exp[i(k_2 r_2 - \omega t)] , \end{aligned}$$

gdzie k_1 i k_2 są wektorami falowymi fal ze źródeł S_1 i S_2 . Ponieważ długości obu tych wektorów są równe ($k_1 = k_2 = \omega n / c \equiv k$) mamy dalej:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\varepsilon_0}{2} cn \cdot |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 cn [(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 cn \frac{E_{01}^2}{r_1^2} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 cn \frac{E_{02}^2}{r_2^2} + \varepsilon_0 cn \frac{E_{01} E_{02}}{r_1 r_2} \cos[k(r_1 - r_2)] . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Tu założyliśmy, że $\mu = 1$. Ostatecznie:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \delta , \quad (5.14)$$

gdzie

$$I_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 cn \frac{E_{01}^2}{r_1^2} , \quad I_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 cn \frac{E_{02}^2}{r_2^2} \quad (5.15)$$

i

$$\delta = k(r_1 - r_2) = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} . \quad (5.16)$$

Warto zwrócić uwagę, że w wyrażeniu (5.14) na natężenie światła w punkcie P , oprócz natężeń światła emitowanego przez dwa źródła S_1 i S_2 występuje pewien dodatkowy wyraz mieszany (tzw. wyraz *interferencyjny*), którym się teraz zajmiemy dokładniej. Wyraz

interferencyjny może być zarówno dodatni i ujemny, zależnie od wartości parametru δ , zależnego od różnicy dróg $(r_1 - r_2)2$. Maksymalne i minimalne natężenia wyniosą odpowiednio:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} - \text{interferencja konstruktywna}, \delta = 2\pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} - \text{interferencja destruktywna}, \delta = 2\pi \left(m + \frac{1}{2}\right), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Jeśli i polaryzacje, i natężenia obu składowych fal są równe, $E_{01} = E_{02}$, czyli $I_1 = I_2 \equiv I_0$, to:

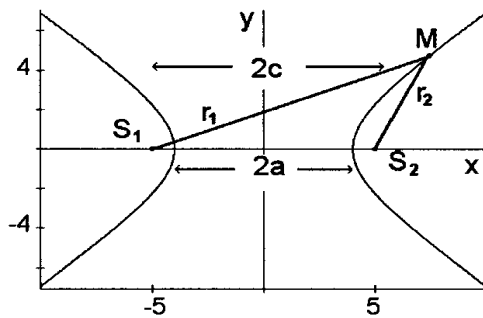
$$I = 2I_0(1 + \cos\delta) = 4I_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}, \quad (5.17)$$

przy czym warunki na interferencję konstruktywną i destrukcyjną są takie same jak poprzednio.

Zauważmy, że wykorzystując równanie (5.16), warunek na interferencję konstruktywną można zapisać w postaci:

$$r_1 - r_2 = \lambda \cdot m, \text{ gdzie } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.18)$$

a λ jest długością fali.



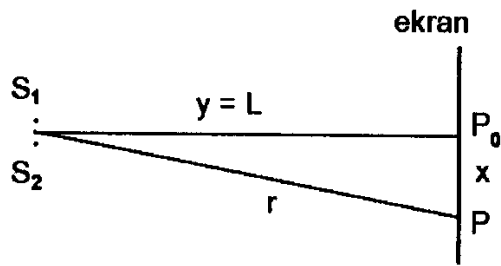
Zwróćmy uwagę, że postać tego warunku przypomina geometryczną definicję hiperboli: hiperbola jest to zbiór (czyli miejsce geometryczne) punktów M , dla każdego z których bezwzględna wartość różnicy odległości od dwóch danych punktów nazywanych *ogniskami hiperboli*, jest wielkością stałą.

Jak widać, ze wzoru (5.18), to właśnie w *ogniskach* hiperboli powinny znaleźć się *źródła światła* S_1 i S_2 . Równanie hiperboli w współrzędnych x, y ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.19)$$

gdzie $a = \lambda m / 2$ ($r_1 - r_2 = \lambda \cdot m = 2a$), $2c = d$, a $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Łatwo zauważyć, że pomiędzy prążkami jasnymi, dla których warunek konstruktywnej interferencji jest spełniony, wystąpią prążki ciemne, dla których spełniony będzie warunek interferencji destrukcyjnej. Znajdziemy położenia jasnych i ciemnych prążków na ekranie.



W płaszczyźnie xy współrzędna x będzie opisywać położenie prążka na ekranie, a współrzędna y oznaczać będzie odległość ekranu od źródeł światła, tak jak pokazano na rysunku.

Ponieważ, zgodnie z (5.19): $x = \pm a\sqrt{(y/b)^2 + 1}$, po pominięciu jedynki otrzymujemy przybliżony wzór $x \cong \pm ay/b$. Biorąc pod uwagę, że $a = \lambda m/2$, $y = L$, a odległość źródeł $d = 2c$, znajdujemy:

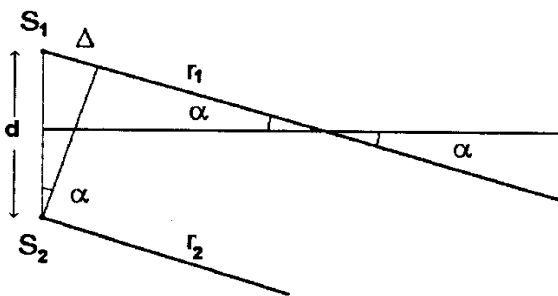
$$x_m = \frac{a}{b} y = \frac{\lambda m}{2\sqrt{c^2 - a^2}} L \approx m \frac{\lambda}{d} \cdot L . \quad (5.20)$$

Otrzymaliśmy wzór podający odległość na ekranie prążka rzędu m od prążka zerowego (w punkcie P_0).

Dla prążków ciemnych można łatwo pokazać, że

$$x_{m+\frac{1}{2}} \approx \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} \cdot L . \quad (5.21)$$

Otrzymaliśmy ogólne wzory podające odległości na ekranie prążków jasnych i ciemnych od prążka zerowego (w punkcie P_0).



Wzory (5.20) i (5.21) łatwo zrozumieć. Dla dostatecznie dużych L można przyjąć, że r_1 i r_2 są praktycznie równoległe i że różnica dróg dla obu promieni jest równa Δ . Mamy wówczas dla małych α jednocześnie (patrz rysunki):

$$\frac{r_1 - r_2}{d} = \frac{\Delta}{d} = \frac{m \cdot \lambda}{d} = \sin \alpha \approx \alpha , \quad (5.22)$$

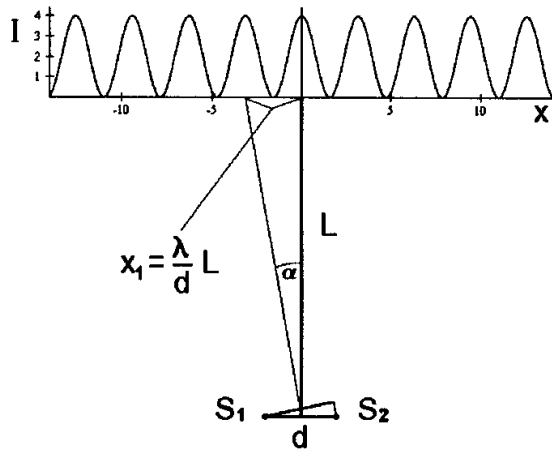
$$\frac{x}{L} = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha . \quad (5.23)$$

Ze wzorów (5.22) i (5.23) natychmiast wynika wzór (5.20).

Ponieważ, jak widać ze wzorów (5.22) i (5.23)

$$x \cong L \cdot \alpha = \frac{L}{d} \cdot (r_1 - r_2) ,$$

a



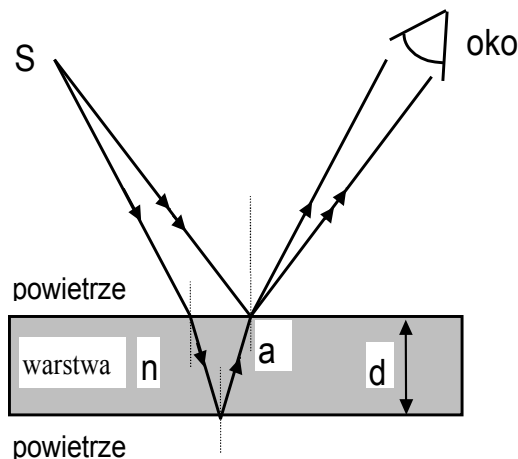
$$\delta = k(r_1 - r_2) ,$$

otrzymujemy następujący wzór na fazę funkcji opisującej rozkład natężeń na ekranie od współrzędnej x :

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{kd}{L} \cdot x .$$

Interferencja w cienkich błonkach

Barwy cienkich błonek, baniek mydlanych, plam np. oleju na wodzie są wynikiem interferencji. Na rysunku pokazana jest warstwa o grubości d i współczynniku załamania n . Warstwa jest oświetlona przez rozciągle źródło światła monochromatycznego. W źródle istnieje taki punkt S , że dwa promienie wychodzące z tego punktu mogą dotrzeć do oka po przejściu przez punkt a . Promienie te przebiegają różne drogi gdyż jeden odbija się od górnej, a drugi od dolnej powierzchni błonki. To czy punkt a będzie jasny czy ciemny zależy od wyniku interferencji fal w punkcie a . Fale te są spójne, bo pochodzą z tego samego punktu źródła światła. Jeżeli światło pada prawie prostopadłe to geometryczna różnica dróg pomiędzy obu promieniami wynosi prawie $2d$.



Można więc oczekiwać, że maksimum interferencyjne (punkt a jasny) wystąpi gdy odległość $2d$ będzie całkowitą wielokrotnością długości fali. Okazuje się, że tak nie jest z trzech powodów:

1) długość fali odnosi się do długości fali w błonce λ_n , a nie do jej długości w powietrzu λ . Oznacza to, że musimy rozważać drogi optyczne, a nie geometryczne. Przypomnijmy, że prędkość fali jest związana z częstotliwością (barwą) i długością fali wzorem: $v = \lambda \cdot \nu$.

2) Przy przejściu do innego ośrodka *zmienia się prędkość i długość fali, a częstotliwość pozostaje bez zmiany*. Ponieważ przy przejściu z powietrza do materiału o

współczynnika załamania n prędkość maleje n razy: $v = c/n$, to długość fali też maleje n razy: $\lambda_n = \lambda / n$.

3) Można wykazać, że fala odbijając się od ośrodka optycznie gęstszego (większe n) zmienia swoją fazę o π . Natomiast gdy odbicie zachodzi od powierzchni ośrodka rzadszego optycznie fala odbija się bez zmiany fazy. Oznacza to, że promień odbity od górnej powierzchni błonki zmienia fazę, a promień odbity od dolnej granicy nie.

Możemy teraz uwzględnić wszystkie te czynniki tj. różnice dróg *optycznych* oraz zmiany *faz* przy odbiciu. Dla dwóch promieni pokazanych na rysunku warunek na maksimum ma postać

$$2d = m\lambda_n + \lambda_n/2 - \text{interferencja konstruktywna}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Czynnik $\lambda_n/2$ opisuje zmianę fazy przy odbiciu (od górnej powierzchni) bo zmiana fazy o 180° jest równoważna różnicy dróg równej połowie długości fali. Ponieważ $\lambda_n = \lambda / n$ otrzymujemy więc

$$2dn = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda - \text{interferencja konstruktywna}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Analogiczny warunek na minimum ma postać

$$2dn = m\lambda - \text{interferencja destruktywna}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$