

## Wykład 2

---

### Równania Maxwella

---

Na poprzednich wykładach zapoznaliśmy z poszczególnymi równaniami pola elektromagnetycznego. Teraz zapiszemy je wszystkie w tradycyjnej formie zwanej *równaniami Maxwella*.

#### Całkowa postać równań Maxwella

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (2.1a)$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}, \quad (2.2a)$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV, \quad (2.3a)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.4a)$$

#### Różniczkowa postać równań Maxwella

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}] \equiv \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{H}] \equiv \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.2b)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \equiv \text{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.3b)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \equiv \text{div} \vec{B} = 0. \quad (2.4b)$$

Pierwsze równanie Maxwella (równanie (2.1a) albo (2.1b)) wyraża prawo indukcji Faradaya: *zmienny w czasie strumień magnetyczny jest źródłem wirowego pola elektrycznego*.

Z drugiego równania Maxwella (równanie (2.2a) albo (2.2b)) wynika, że *pole magnetyczne jest polem wirowym i źródłem tego pola są prądy przewodzenia oraz prądy przesunięcia*.

Trzecie równanie Maxwella (równanie (2.3a) albo (2.3b)) jest równoważne prawu Coulomba. Z niego również wynika, że *źródłem pola elektrycznego potencjalnego są ładunki elektryczne i linii pola elektrycznego zaczynają się i kończą się na ładunkach elektrycznych*.

Czwarte równanie Maxwella (równanie (2.4a) albo (2.4b)) oznacza że w przyrodzie *nie istnieją "ładunki" magnetyczne i linii pola magnetycznego są liniami zamkniętymi*.

W teorii Maxwella elektryczne i magnetyczne właściwości izotropowego środowiska są określane trzema wielkościami:

- 1) *przenikalnością dielektryczną*  $\epsilon$  substancji

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \cdot \vec{E}, \quad (2.5)$$

- 2) *przenikalnością magnetyczną*  $\mu$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H}, \quad (2.6)$$

- 3) *przewodnością elektryczną* właściwą  $\sigma$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} . \quad (2.7)$$

Układ czterech równań (2.1) - (2.4) oraz trzy równania *materialowe* (2.5) - (2.7) tworzą pełny układ równań teorii pola elektromagnetycznego Maxwella.

### Fale elektromagnetyczne. Równanie falowe

Maxwell po raz pierwszy udowodnił, że z równań pola elektromagnetycznego (2.1) - (2.4) wynika możliwość istnienia nawet w pustej przestrzeni (próżni) fal elektromagnetycznych, rozchodzących się z prędkością równą prędkości światła w próżni. Ten fakt pozwolił Maxwellowi założyć, że światło jest niczym innym, jak falą elektromagnetyczną.

Rozważmy elektromagnetyczną teorię światła Maxwella i najpierw zapiszmy równania Maxwella w izotropowym ośrodku nie zawierającej ładunków elektrycznych ( $\rho = 0$ ) i prądów przewodzenia ( $\vec{j} = 0$ ):

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (2.8)$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \quad (2.9)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \epsilon_0 \epsilon (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0 , \quad (2.10)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = \mu_0 \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) = 0 . \quad (2.11)$$

W równaniach (2.10) i (2.11) uwzględniliśmy, że dla izotropowych ośrodków  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \cdot \vec{E}$  i  $\vec{B} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H}$ .

Pomnóżmy obustronnie równania (2.8) i (2.9) wektorowe przez

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z :$$

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}]] = - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{B}] , \quad (2.12)$$

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}]] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{D}] . \quad (2.13)$$

Korzystając z tożsamości wektorowej ("bac" minus "cab")

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \equiv \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} ,$$

znajdujemy dla lewych części równań (2.12) i (2.13)

$$\left[ \vec{\nabla}_a \times \left[ \vec{\nabla}_b \times \vec{E} \right] \right] = \vec{\nabla}_b \cdot (\vec{\nabla}_a \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla}_a \cdot \vec{\nabla}_b) \cdot \vec{E} = -\Delta \cdot \vec{E}, \quad (2.14)$$

$$\left[ \vec{\nabla}_a \times \left[ \vec{\nabla}_b \times \vec{H} \right] \right] = \vec{\nabla}_b \cdot (\vec{\nabla}_a \cdot \vec{H}) - (\vec{\nabla}_a \cdot \vec{\nabla}_b) \cdot \vec{H} = -\Delta \cdot \vec{H}. \quad (2.15)$$

Tu uwzględniliśmy wzór (2.10)  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$  i wzór (2.11)  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) = 0$  oraz wzór

$$\Delta = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.16)$$

Dla prawych części równań (2.12) i (2.13), biorąc pod uwagę wzory (2.8) i (2.9), otrzymujemy

$$-\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{B}] = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{D}] = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (2.18)$$

Po podstawieniu równań (2.14), (2.15) i (2.17), (2.18) do równań (2.12) i (2.13) ostatecznie otrzymujemy

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.19a)$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.19b)$$

gdzie

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon \mu}. \quad (2.20)$$

Równania (2.19a) i (2.19b) są tak zwane *równania falowe*. Określają oni ruch falowy z prędkością  $v$ . Przed tym jak rozważać rozwiązania równań falowych rozpatrzmy przypadek próżni (pustej przestrzeni) dla której  $\varepsilon = \mu = 1$ . W tym przypadku, jak widać ze wzoru (2.20), prędkość fali jest określona tylko przez fundamentalne stałe  $\varepsilon_0$  i  $\mu_0$  i jest równa, jak okazuje się prędkości światła w próżni ( $\varepsilon_0 \approx 8,9 \cdot 10^{-12} C^2 / (N \cdot m^2)$ ,  $\mu_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-6} H / m$ )

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{8,9 \cdot 1,3}} \cdot 10^9 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

To, że wielkość  $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  pokrywa się z prędkością światła w próżni nie jest przypadkową i wynika z tego, że rozwiązania równań (2.19) reprezentują fale elektromagnetyczne, a światło jest właśnie niczym innym jako falami elektromagnetycznymi. W ośrodku, zgodnie z (2.20), prędkość fali elektromagnetycznej  $v$  jest mniejsza od prędkości fali w próżni i wynosi

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} . \quad (2.21)$$

Udowodnimy teraz, że rozwiązaniami równań (2.19a) i (2.19b) są fale elektromagnetyczne rozchodzące się z prędkością  $v$ .

W celu uproszczenia zapisu, zapiszmy równanie (2.19a) tylko dla  $y$  - składowej wektora  $\vec{E}$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.22)$$

i założmy, że  $\partial E_y / \partial x = \partial E_y / \partial y = 0$ . Wtedy z równania (2.22) mamy

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 . \quad (2.23)$$

Rozwiązanie równania (2.23) łatwo znaleźć wprowadzając nowe zmienne

$$\xi = z - v \cdot t , \quad \eta = z + v \cdot t . \quad (2.24)$$

Rozważając teraz  $E_y$  jako funkcję zmiennych  $\xi, \eta$  znajdujemy

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial \xi} + \frac{\partial E_y}{\partial \eta} , \quad (2.25a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v \cdot \left( \frac{\partial E_y}{\partial \xi} - \frac{\partial E_y}{\partial \eta} \right) . \quad (2.25b)$$

Ze wzorów (2.25) wynika, że

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} , \quad (2.26a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) . \quad (2.26b)$$

Korzystając ze wzorów (2.26) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial \xi \partial \eta} , \quad (2.27)$$

$$- \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial \xi \partial \eta} . \quad (2.28)$$

Po podstawieniu (2.27) i (2.28) do równania (2.23) znajdujemy

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 E_y}{\partial \xi \partial \eta} = 0 . \quad (2.29)$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem równania (2.29) jest superpozycja dwóch *dowolnych* funkcji  $\Psi_1(\eta)$  i  $\Psi_2(\xi)$

$$E_y(\xi, \eta) = \Psi_1(\xi) + \Psi_2(\eta) . \quad (2.30)$$

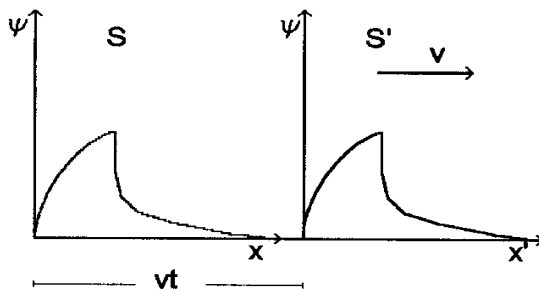
Istotnie, różniczkując (2.30) względem zmiennej  $\xi$  otrzymujemy

$$\frac{\partial E_y}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \equiv \Phi(\xi) . \quad (2.31)$$

Różniczkując następnie (2.31) względem zmiennej  $\eta$  uzyskujemy równanie (2.29).

Przez zmienne  $z$  i  $t$  (patrz wzór (2.24)) równanie (2.30) możemy zapisać w postaci

$$E_y(\xi, \eta) = \Psi_1(z - v \cdot t) + \Psi_2(z + v \cdot t) . \quad (2.32)$$



Rozważmy teraz jakiś dowolny punkt (załóżmy  $A$ ) na krzywej  $\Psi_1(z - v t)$ . Wtedy z równości  $z - v \cdot t = \text{const}$  wynika, że wzrostowi czasu  $t$  odpowiada również wzrost  $z$ . A zatem punkt  $A$  będzie przesuwiał się w dodatnim kierunku osi  $z$  z prędkością  $v$ .

A więc funkcja  $\Psi_1(z - v t)$  reprezentuje falę rozchodzącą się w dodatnim kierunku osi  $z$ . Odpowiednie, funkcja  $\Psi_2(z + v t)$  reprezentuje falę rozchodzącą się w ujemnym kierunku osi  $z$ . Udowodniliśmy więc, że równanie (2.23) jest równaniem fal rozchodzących się z prędkością światła w dodatnim i ujemnym kierunkach osi  $z$ .

W zagadnieniach praktycznych najważniejszymi są fale o kształcie

$$\Psi_{1,2} = \Psi_{1,2}^0 \cdot \cos[k(z \pm v \cdot t)] , \quad (2.33)$$

gdzie  $k = 2\pi / \lambda = 2\pi v / (\lambda \cdot v) = \omega / v$ .

W zapisie zespolonym fala (2.33) ma postać

$$\Psi_{1,2} = \Psi_{1,2}^0 \cdot \exp[i \cdot (kz \pm \omega \cdot t)] . \quad (2.34)$$

Powierzchni fazy stałej ( $kz \pm \omega \cdot t = const$ ) fali określonej wzorem (2.34) - *czoło fali*, są płaszczyznami prostopadłymi do kierunku rozchodzenia się fali, czyli są prostopadłe do osi  $Oz$ . Fali takie nazywamy *falami płaskimi*.

Fali postaci (2.33) nazywamy *monochromatycznymi (zależą tylko od jednej częstotliwości  $\omega$ ) i harmonicznymi (opisuje ich funkcja cos albo sin) falami*.

Fali płaskie są dobrym przybliżeniem w przypadku, gdy rozważamy punkty znajdujące się bardzo daleko od źródła fali. Gdyś jednak odległość od źródła nie jest wystarczająco duża, stosujemy przybliżenie *fali kulistej*. Kulista fala harmoniczna ma postać

$$\Psi(r, t) = \frac{\Psi_0}{r} \cdot \cos(kr - \omega \cdot t) , \quad (2.35a)$$

lub, w zapisie zespolonym:

$$\Psi(r, t) = \frac{\Psi_0}{r} \cdot \exp[i(kr - \omega \cdot t)] . \quad (2.35b)$$

W równaniach (2.35) wielkość  $r$  jest odległością punktu od źródła fali.

W przypadku fali kulistej powierzchni stałej fazy ( $kr - \omega \cdot t = const$ ) będą miały postać koncentrycznych powierzchni sferycznych, a nie płaszczyzn.

Oprócz fal płaskich i kulistych stosujemy też czasami przybliżenie fali walcowej. To przybliżenie jest dobrym w przypadku źródła liniowego, albo przy przejściu fali płaskiej przez nieskończenie długą i bardzo wąską szczelinę. Równanie fali walcowej harmonicznego wygląda tak samo jak równania (2.35). Jednak teraz w tych równaniach wielkość  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , a oś  $Oz$  jest osią symetrii walca, a także źródłem fali.

Rozważmy teraz falę płaską postaci

$$E_y = E_{y0} \cdot \exp[i(kz + \omega \cdot t)] , \quad E_x = E_z = 0 . \quad (2.36)$$

Z pierwszego równania Maxwella (2.1b) znajdujemy

$$\left[ \vec{\nabla} \times \vec{E} \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = - \frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{e}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{e}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{e}_z . \quad (2.37)$$

Skąd

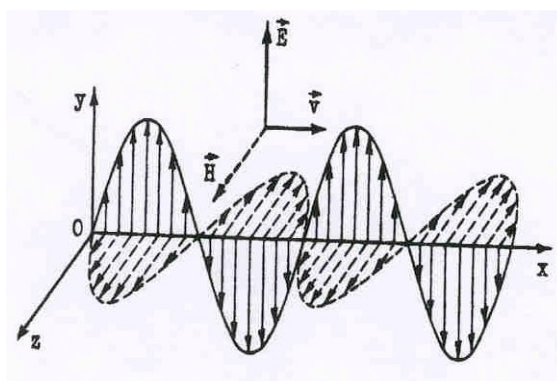
$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = ik \cdot E_y, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0. \quad (2.38)$$

Z dwóch ostatnich równań wynika, że

$$B_y = B_z = 0.$$

Całkując pierwsze z równań (2.38) względem czasu otrzymujemy

$$\begin{aligned} B_x(z,t) &= ikE_{y0} \int \exp[i(\omega t + kz)] dt = \\ &= \frac{k}{\omega} E_{y0} \cos(\omega t + kz) = \frac{1}{v} E_y(z,t). \end{aligned} \quad (2.39)$$



Tu uwzględniliśmy, że

$$k/\omega = 2\pi / (2\pi \cdot \lambda \cdot v) = 1/v.$$

Biorąc pod uwagę, że  $1/v = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}$  oraz

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H} \quad \text{wzór (2.39) możemy również}$$

zapisać w postaci

$$\sqrt{\mu_0 \mu} \cdot H_x(z,t) = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} \cdot E_y(z,t). \quad (2.40)$$

Z równań (2.36) i (2.40) wynika, że:

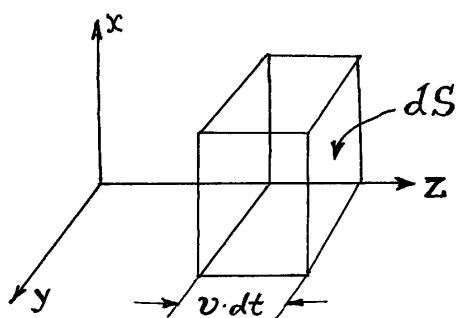
1. drgania pola elektrycznego i magnetycznego są związane między sobą; stąd te fale nazywamy falami *elektromagnetycznymi*;
2. fale elektromagnetyczne są falami *poprzecznymi*: wektory  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  znajdują się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali  $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$ ;
3. trójka wektorów  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  tworzy *trójkę wzajemnie prostopadłych wektorów*;
4. wzajemnie prostopadłe wektory  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  *drgają w jednej fazie*, czyli jednocześnie osiągają wartości zerowe i maksymalne.

### Wektor Poyntinga - Umowa

Rozważana wyżej fala elektromagnetyczna przenosi w kierunku osi  $z$  energię pola elektromagnetycznego. Prędkość przepływu energii w dowolnej fali elektromagnetycznej przez jednostkową powierzchnię opisuje tak zwany wektor *Poyntinga - Umowa*

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (2.41)$$

Udowodnimy wzór (2.41) na przykładzie fali elektromagnetycznej (2.36) i (2.39) rozchodzącej się w kierunku osi  $z$ .



W ciągu czasu  $dt$  przez powierzchnie  $dS$  prostopadłej do osi  $z$  przepływie energia zawarta w objętości  $dV = v \cdot dt \cdot dS$

$$dW = w \cdot (v \cdot dt \cdot dS) , \quad (2.42)$$

gdzie  $w$  - gęstość objętościowa energii pola elektromagnetycznego

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D}) + \frac{1}{2}(\vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \epsilon \cdot E^2 + \mu_0 \mu \cdot H^2) . \quad (2.43)$$

Z równania (2.40) wynika, że

$$\mu_0 \mu \cdot H^2(z, t) = \epsilon_0 \epsilon \cdot E^2(z, t) . \quad (2.44)$$

A zatem ze wzoru (2.43) znajdujemy

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}(\epsilon_0 \epsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2) = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \\ &= \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E \sqrt{\mu_0 \mu} H = \frac{1}{v} \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Po podstawieniu (2.45) do wzoru (2.42) otrzymujemy

$$dW = w \cdot (v \cdot dt \cdot dS) = dt \cdot dS \cdot \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] . \quad (2.46)$$

Skąd dla prędkości przepływu energii fali elektromagnetycznej przez jednostkową powierzchnie prostopadłą do kierunku propagacji fali uzyskujemy

$$|\vec{S}| = \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] . \quad (2.47)$$