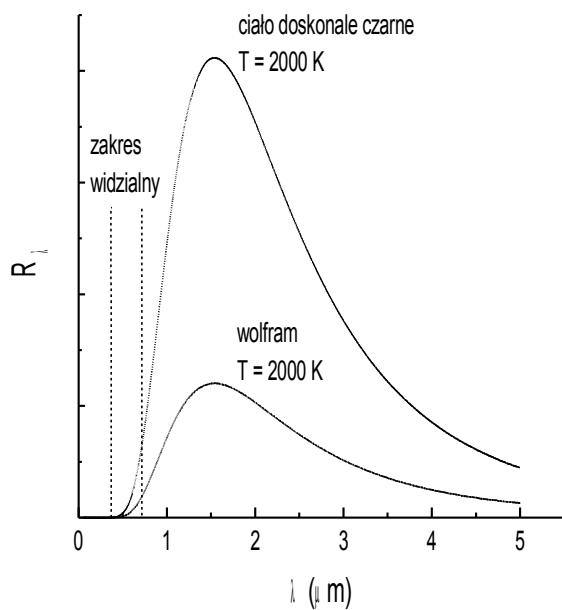


Wykład 10

Promieniowanie termiczne

Promieniowanie elektromagnetyczne wysyłane przez ogrzane (do pewnej temperatury) ciała nazywamy *promieniowaniem termicznym*. Wszystkie ciała *emitują* takie promieniowanie do otoczenia, a także z tego otoczenia je *absorbują*. Jeżeli ciało ma wyższą temperaturę od otoczenia to będzie się oziębiać ponieważ szybkość promieniowania przewyższa szybkość absorpcji. Gdy osiągnięta zostanie równowaga termodynamiczna wtedy te prędkości będą równe. Za pomocą spektrometru możemy zanalizować światło emitowane przez te źródła tzn. dowiedzieć się jak silnie i jakie długości fal wypromieniowuje. Dla przykładu, na rysunku poniżej pokazane jest widmo promieniowania dla taśmy wolframowej ogrzanej do $T = 2000\text{ K}$. Z przedstawionego wykresu i doświadczeń wynika, że:



- Widmo emitowane przez ciała stałe ma charakter *ciągły*,
- Szczegóły tego widma są prawie niezależne od rodzaju substancji,
- Widmo silnie zależy od temperatury.

Zwróćmy uwagę, że w zwykłych temperaturach większość ciał jest dla nas widoczna dlatego, że odbijają one (lub rozpraszają) światło, które na nie pada a nie dlatego, że ciała te wysyłają promieniowanie widzialne (świecą). Jeżeli nie pada na nie światło (np. w nocy) to są one niewidoczne.

Dopiero gdy ciała mają wysoką temperaturę wtedy świecą własnym światłem. Ale jak widać z rysunku i tak większość emitowanego promieniowania jest niewidzialna bo przypada na zakres promieniowania cieplnego (podczerwień). Dlatego ciała, świecące własnym światłem są bardzo gorące.

Wielkość R_λ przedstawiona na wykresie na osi pionowej nazywana jest *widmową zdolnością emisyjną promieniowania* i jest tak zdefiniowana, że wielkość $dW = R_\lambda d\lambda$

oznacza szybkość, z jaką jednostkowy obszar powierzchni wypromieniowuje energię odpowiadającą długościom fal zawartym w przedziale $\lambda, \lambda+d\lambda$.

Promieniowanie możemy scharakteryzować również wprowadzając zdolność emisyjną jako funkcję częstości, a nie długości fali R_ν . *Spektralna zdolność emisyjna promieniowania* R_ν jest tak zdefiniowana, że wielkość $dW = R_\nu d\nu$ oznacza szybkość, z jaką jednostkowy obszar powierzchni wypromieniowuje energię odpowiadającą częstościom fal zawartym w przedziale $\nu, \nu + d\nu$. Łatwo znaleźć związek między R_λ i R_ν . Przedziałowi częstości $d\nu$ odpowiada następujący przedział długości fal:

$$d\lambda = d\left(\frac{c}{\nu}\right) = -\frac{c}{\nu^2} \cdot d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} \cdot d\nu \quad (10.1)$$

Znak minus w tym równaniu oznacza, że ze wzrostem częstości ($d\nu > 0$) długość fali maleje ($d\lambda < 0$). Ponieważ interesuje nas jaka wartość bezwzględna przedziału $d\lambda$ odpowiada wartości bezwzględnej przedziału $d\nu$, będziemy dalej ten znak pomijali. Korzystając z określenia zdolności emisyjnych R_λ i R_ν możemy zapisać

$$R_\nu d\nu \equiv R_\lambda d\lambda \quad (10.2)$$

Po podstawieniu (10.1) do wzoru (10.2) znajdujemy

$$R_\nu d\nu = \frac{\lambda^2}{c} R_\lambda \cdot d\nu \quad (10.3)$$

Skąd mamy

$$R_\nu = \frac{\lambda^2}{c} R_\lambda \quad (10.4)$$

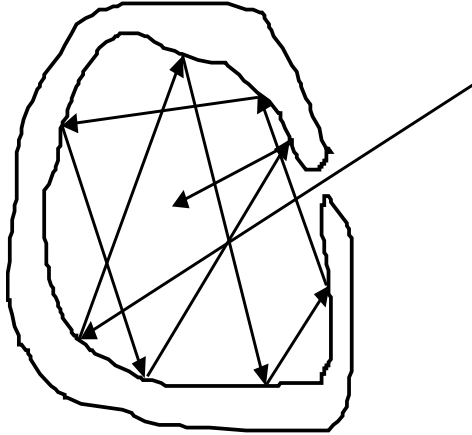
Dla charakterystyki całkowitej energii wysyłanego promieniowania w całym zakresie długości fal wprowadzamy wielkość, która nazywa się *całkowitą emisją energetyczną promieniowania* R_C

$$R_C = \int_0^\infty R_\lambda d\lambda = \int_0^\infty R_\nu d\nu \quad (10.5)$$

Ilościowe interpretacje widm promieniowania dowolnego ciała przedstawiają poważne trudności. Dlatego posługujemy się wyidealizowanym obiektem (modelem), a mianowicie

ogrzanym ciałem stałym, zwanym *ciałem doskonale czarnym*. Przykładem takiego ciała może być obiekt pokryty sadzą (obiekt nie odbija światła, jego powierzchnia absorbuje światło).

Ciało doskonale czarne



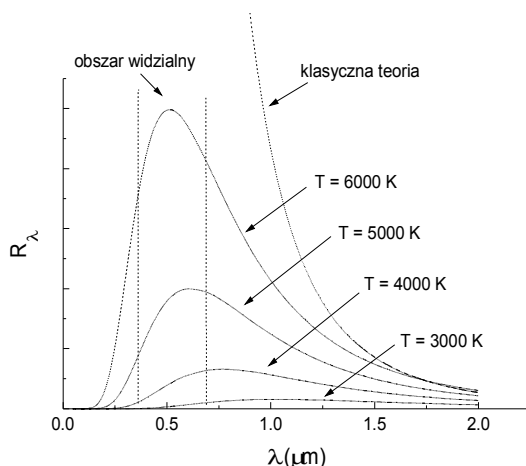
Ciałem doskonale czarnym nazywamy ciało, które w pełni pochłania całe padające na nie promieniowanie. Modelem ciała doskonale czarnego może być prawie zamknięta wnęka z niewielkim otworem. Światło wpadające przez otwór do wnętrza wnęki ulega wielokrotnemu odbiciu od ścianek przed tym jak wyjść przez otwór.

Z doświadczeń nad promieniowaniem ciał o właściwościach zbliżonych do ciał czarnych pokazują, że:

- Promieniowanie wychodzące z wnętrza takiego ciała przez otwór ma zawsze większe natężenie niż promieniowanie ze ścian bocznych,
- Dla danej temperatury emisja promieniowania wychodzącego z otworów jest *identyczna dla wszystkich źródeł promieniowania*, pomimo że dla zewnętrznych powierzchni te wartości są różne,
- Długość fali dla której przypada maksimum emisji jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury ciała (*prawo przesunięć Wiena*)

$$\lambda_m \cdot T = b , \quad (10.6)$$

gdzie $b = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ jest stałą Wiena.



- Emisja energetyczna promieniowania ciała doskonale czarnego (nie jego powierzchni) zmienia się wraz z temperaturą według *prawa Stefana*

$$R_C = \sigma T^4 , \quad (10.7)$$

gdzie σ jest uniwersalną stałą (stała Stefana - Boltzmanna) równą $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$.

Dla zewnętrznych powierzchni to empiryczne prawo ma postać:

$$R_C = e\sigma T^4, \quad (10.8)$$

gdzie zdolność emisyjna e jest wielkością zależną od substancji i, co jeszcze bardziej skomplikowane, od temperatury.

R_λ dla ciała doskonale czarnego zmienia się z temperaturą tak jak na rysunku powyżej.

Prawo Rayleigha - Jeansa promieniowania ciała doskonale czarnego

Na przełomie ubiegłego stulecia Rayleigh i Jeans wykonali obliczenia energii promieniowania we wnęce (czyli promieniowania ciała doskonale czarnego). Najpierw zastosowali oni klasyczną teorię pola elektromagnetycznego do pokazania, że promieniowanie wewnątrz wnęki ma charakter fal stojących (węzły na ściankach wnęki). Z ich obliczeń wynikało, że zdolność emisyjną ciała doskonale czarnego można wyrazić wzorem

$$R_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \bar{E}_\nu. \quad (10.9)$$

Tu \bar{E}_ν - wartość średnia energii fali stojącej o częstotliwości ν .

Następnie Rayleigh i Jeans założyli, że stojącą falą elektromagnetyczną ma dwa stopnie swobody: jeden stopień swobody jest związany z drganiami wektora natężenia pola elektrycznego a drugi stopień swobody określa drgania wektora indukcji magnetycznej. Dalej w oparciu o znane nam prawo *ekwipartycji* energii (na jeden stopień swobody przypada energia $kT/2$) otrzymali dla średniej energii $\bar{E}_\nu = 2 \cdot (kT/2) = kT$. Po podstawieniu tego wzoru do (10.9) znaleźli oni następujący wzór na spektralną zdolność emisyjną ciała czarnego:

$$R_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT. \quad (10.10)$$

Wzór (10.10) nazywa się wzorem Rayleigha - Jeansa.

Uzyskany wynik jest pokazany na wykresie rysunku wyżej (teoria klasyczna). Jak widać rozbieżność między wynikami doświadczalnymi i teorią jest duża. Dla fal długich (małych częstotliwości) wyniki teoretyczne są bliskie krzywej doświadczalnej, ale dla wyższych częstotliwości wyniki teoretyczne dążą do nieskończoności podczas gdy gęstość energii zawsze pozostaje skończona. Ten sprzeczny z rzeczywistością wynik rozważań klasycznych nazywany jest „*katastrofą w nadfiolecie*”.

Teoria Plancka promieniowania ciała doskonale czarnego

W 1900 roku Max Planck przedstawił Berlińskiemu Towarzystwu Fizycznemu wzór opisujący widmową zdolność emisyjną dający wyniki zgodne z doświadczeniem:

$$R_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} , \quad (10.11)$$

gdzie stała $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ zwana obecnie stałą Plancka.

Z porównania wzorów (10.11) i (10.9) wynika, że

$$\bar{E}_\nu = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} . \quad (10.12)$$

Wyprowadzając wzór (10.11) Planck założył, że atomy ścian zachowują się jak oscylatory elektromagnetyczne, które emitują (i absorbują) energię do wnętrza, z których każdy ma charakterystyczną częstotliwość drgań. Rozumowanie Plancka doprowadziło do przyjęcia dwóch radykalnych założeń dotyczących tych oscylatorów atomowych:

- Oscylator nie może mieć dowolnej energii, lecz tylko energie dane wzorem

$$E_n = n \cdot h\nu , \quad (10.13)$$

gdzie ν oznacza częstotliwość oscylatora, $n = 0,1,2,3,\dots$ - liczba całkowita (zwana obecnie liczbą kwantową).

Z powyższego wzoru wynika, że *energia jest skwantowana* i może przyjmować tylko ściśle określone wartości. Tu jest zasadnicza różnica bo teoria klasyczna zakładała dowolną wartość energii od zera do nieskończoności.

- Oscylatory nie wypromieniowują energii w sposób ciągły, lecz porcjami czyli *kwantami*. Kwanty są emitowane gdy oscylator przechodzi ze stanu o energii E_n do stanu o energii E_{n-1} :

$$\Delta E = h\nu \cdot \Delta n = h\nu . \quad (10.14)$$

Przy przejściu oscylatora ze stanu o energii E_{n-1} do stanu o energii E_n oscylator pochłania energię $h\nu$. Dopóki oscylator pozostaje w jednym ze swoich stanów kwantowych (stany stacjonarne) dopóty ani *nie emituje* ani *nie absorbuje energii*.

Korzystając z założeń Maxa Plancka wyprowadzimy teraz wzór (10.11). Przyjmiemy, że rozkład oscylatorów na możliwe dyskretne stany energetyczne E_n opisuje rozkład Boltzmann

$$p_n = C \cdot \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right). \quad (10.15)$$

Wielkość p_n określa prawdopodobieństwo odnalezienia oscylatora w stanie o energii E_n . We wzorze (10.15) stała C jest współczynnikiem wyznaczanym z warunku normowania

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1. \quad (10.16)$$

Po podstawieniu (10.15) do wzoru (10.16) znajdujemy

$$C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}. \quad (10.17)$$

Korzystając z rozkładu (10.15) znajdziemy teraz średnią energię oscylatora o częstotliwości ν

$$\bar{E}_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot nh\nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot \exp(-\beta E_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n)}. \quad (10.18)$$

Tu wprowadziliśmy oznaczenie: $\beta = 1/kT$. Skorzystamy teraz ze wzoru

$$\frac{d}{d\beta} \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n)\right) = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot \exp(-\beta E_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n)}$$

i zapiszmy wzór (10.18) w postaci

$$\begin{aligned} \bar{E}_\nu &= -\frac{d}{d\beta} \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta h\nu)\right) = \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln(1 + e^{-\beta h\nu} + e^{-2\beta h\nu} + \dots) = -h\nu \cdot \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-x}}\right). \end{aligned} \quad (10.19)$$

Tu skorzystaliśmy, że wzoru na sumę postępu geometrycznego

$$S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-nx} - 1)/(e^{-x} - 1) = 1/(1 - e^{-x}); \quad x = \beta h\nu.$$

Różniczkując ostatni wyraz w (10.19), znajdujemy

$$\begin{aligned}\bar{E}_\nu &= -h\nu \cdot \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) = -h\nu (1-e^{-x}) \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \\ &= h\nu \cdot \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{h\nu}{e^x-1} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}.\end{aligned}\quad (10.20)$$

Po podstawieniu (10.20) do wzoru Rayleigha-Jeansa (10.9) otrzymujemy słynny wzór Plancka

$$R_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \bar{E}_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}.\quad (10.21)$$

Dla małych częstotliwości ($h\nu \ll kT$) możemy zapisać $\exp(h\nu/kT) - 1 \approx h\nu/kT$ i wtedy wzór Plancka przechodzi we wzór Rayleigha-Jeansa:

$$R_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} \approx \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot kT.\quad (10.22)$$

Ze wzoru (10.21) wynika natychmiast prawo Stefana-Boltzmannia:

$$R_C = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1} = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}\right) \cdot T^4.\quad (10.23)$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}.\quad (10.24)$$

Porównując wzory (10.23) i (10.7) dla stałej Stefana-Boltzmannia otrzymujemy

$$\sigma = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}\right).\quad (10.25)$$

Wzór Plancka dla zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego wyrażonej za pomocą długości fali R_λ otrzymujemy ze wzoru (10.21) za pomocą tożsamości $\nu = c/\lambda$ i wzoru (10.4)

$$R_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} R_\nu = \frac{c}{\lambda^2} \frac{2\pi c^2}{\lambda^3 c^2} \frac{hc}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1}.\quad (10.26)$$

Ze wzoru (10.26) wynika prawo przesunięć Wiena. Istotnie różniczkując (10.26) względem λ znajdujemy równanie na maksimum R_λ

$$\begin{aligned} \frac{dR_\lambda}{d\lambda} &= 2\pi c^2 h \left(-\frac{5}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} + \frac{1}{\lambda^5} \cdot \frac{-\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) \cdot \left(-\frac{hc}{kT\lambda^2}\right)}{\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]^2} \right) = \\ &= 2\pi c^2 h \frac{x \cdot \exp(x) - 5 \cdot [\exp(x) - 1]}{\lambda^6 [\exp(x) - 1]^2} = 0 \end{aligned} \quad (10.27)$$

Skąd

$$xe^x - 5e^x + 5 = 0 \quad (10.28)$$

Pierwiastek tego równania można znaleźć graficznie albo korzystając z metod przybliżonych. Pierwiastek ten jest równy

$$x = \frac{hc}{\lambda_m kT} = 4,965 \quad .$$

Stąd stałej Wiena znajdujemy

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4,965 \cdot k} = b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ mK} \quad .$$

Zastosowanie prawa promieniowania w termometrii

Promieniowanie emitowane przez gorące ciało można wykorzystać do wyznaczenia jego temperatury. Jeżeli mierzy się całkowite promieniowanie, to można zastosować prawo Stefana-Boltzmann'a.

Jako przykład rozważmy jaką temperaturę będzie miała powierzchnia Ziemi, jeżeli przyjąć, że Ziemia jest ciałem doskonale czarnym, wypromieniowującym w przestrzeń właśnie tyle energii na jednostkę powierzchni i czasu ile pada nań promieniowania słonecznego? Średnia ilość energii (na jednostkę czasu) promieniowania słonecznego padającego na jednostkę powierzchni Ziemi wynosi 355 W/m^2 .

Z prawa Stefana-Boltzmann'a mamy

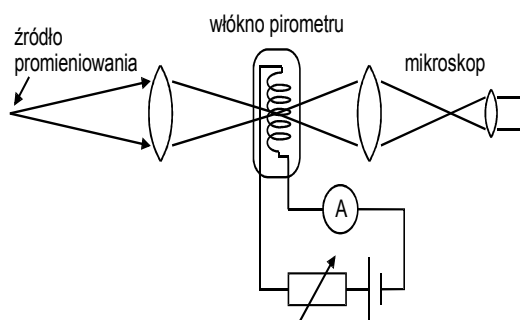
$$T = (R_c / \sigma)^{1/4} = \left(\frac{355}{5,67 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/4} = \sqrt[4]{62,6} \cdot 100 = 281 \text{ K} = 8^\circ \text{ C} \quad .$$

Okazuje się, że wynik ten jest bardzo dobrze zgodny z doświadczeniem.

Ponieważ dla większości źródeł trudno dokonać pomiaru całkowitego promieniowania więc mierzy się ich zdolność emisyjną dla wybranego zakresu długości fal. Z prawa Plancka

wynika, że dla dwu ciał o temperaturach T_1 i T_2 stosunek natężeń promieniowania o długości fali λ wynosi

$$\frac{I_\lambda(T_1)}{I_\lambda(T_2)} = \frac{R_\lambda(T_1)}{R_\lambda(T_2)} = \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT_2}\right) - 1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT_1}\right) - 1}. \quad (10.29)$$



Jeżeli T_1 przyjmujemy jako standardową temperaturę odniesienia to możemy wyznaczyć T_2 wyznaczając doświadczalnie stosunek $I_\lambda(T_1)/I_\lambda(T_2)$. Do tego celu posługujemy się urządzeniem, które nazywa się *pirometrem* (rysunek obok).

W tym urządzeniu obraz źródła (o nieznannej temperaturze) powstaje w miejscu gdzie znajduje się włókno żarowe pirometru. Dobieramy prąd żarzenia tak aby włókno stało się niewidoczne na tle źródła (świeci tak samo jasno). Ponieważ urządzenie jest wyskalowane możemy teraz odczytać temperaturę źródła.