

Wykład 1

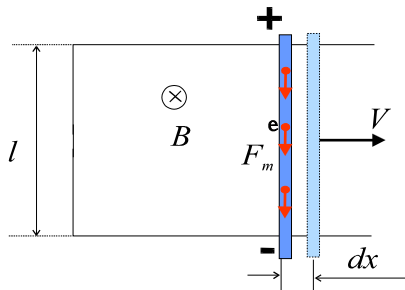
Związek między polami elektrycznymi i magnetycznymi

Prawo indukcji elektromagnetycznej

Po raz pierwszy związek między elektrycznymi i magnetycznymi polami wykrył w 1832 roku Faraday. Zjawisko, które odkrył Faraday nosi nazwę *indukcji elektromagnetycznej*. Na podstawie obserwacji Faraday doszedł do wniosku, że *indukowana w obwodzie siła elektromotoryczna E_i jest wziętej ze znakiem ujemnym szybkość, z jaką zmienia się strumień Φ_m przechodzący przez ten obwód:*

$$E_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} .$$

Żeby wytłumaczyć zjawisko indukcji elektromagnetycznej rozważmy ruch przewodzącego pręta w jednorodnym polu magnetycznym. Dla uproszczenia założmy, że odcinek porusza się ze stałą prędkością \vec{v} w płaszczyźnie prostopadłej do wektora indukcji magnetycznej \vec{B} . Na elektrony przewodzenia odcinka działa wówczas siła Lorentza:



$$\vec{F}_m = e \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] . \quad (1.1)$$

Pod działaniem siły Lorentza elektrony przemieszczają się wzdłuż przewodnika, w związku z czym ulega naruszeniu równomierność ich rozkładu w objętości przewodnika.

Między końcami odcinka powstaje różnica potencjałów, $\Delta \phi$, a wewnątrz niego - pole elektryczne

$$E = \frac{\Delta \phi}{l} . \quad (1.2)$$

Siła ($\vec{F}_e = -|e| \cdot \vec{E}$), z której działa pole (1.2) na elektrony odcinka przewodnika jest skierowana przeciwnie niż siła Lorentza. W stanie równowagi siły te równowagą się, a zatem

$$eE = evB .$$

Skąd, z uwzględnieniem (1.2), znajdujemy

$$\Delta \phi = lBv = Bl \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{d\Phi_m}{dt} . \quad (1.3)$$

Iloczyn $l dx = dS$ określa pole powierzchni zakreślonej przez przewodnik podczas jego ruchu w czasie dt , a $BdS = d\Phi_m$ określa strumień magnetyczny przez pole powierzchni dS .

Zgodnie z prawem Ohma dla odcinka ($I = (\Delta\varphi + \mathbf{E})/R_{21}$) w przypadku gdy $I = 0$ różnica potencjałów $\Delta\varphi$ równa się ze znakiem minus sile elektromotorycznej działającej na ruchomym odcinku przewodnika

$$\Delta\varphi = -\mathbf{E} \quad (1.4)$$

Ponieważ na tym odcinku nie występują źródła prądu, można przyjąć, że siła elektromotoryczna \mathbf{E} występująca we wzorze (1.4) to jest siła elektromotoryczna (SEM) indukcji $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_i$. A zatem, ze wzorów (1.3) i (1.4) mamy

$$\mathbf{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (1.5)$$

Wzór (1.5) ma identyczną postać z podstawowym prawem indukcji elektromagnetycznej. A więc, w oparciu o siłę Lorentza można wyjaśnić mikroskopowy mechanizm indukowanie prądu w przewodnikach poruszających się w stałym polu magnetycznym.

Wirowe pole elektryczne

W przypadku nieruchomych przewodników powstawanie SEM indukcji nie może być związane z siłą Lorentza. W celu zinterpretowania zjawiska indukcji elektromagnetycznej w przewodnikach nieruchomych należy przyjąć, że *zmienne pole magnetyczne wywołuje powstawanie pola elektrycznego, pod wpływem którego w obwodzie zamkniętym indukowany jest prąd elektryczny*. Indukowane pole elektryczne jest równie realne, jak pole wytwarzane przez ładunki statyczne i działa na ładunek próbny q z siłą $\vec{F} = q\vec{E}$. W związku z tym, korzystając z definicji siły elektromotorycznej możemy napisać

$$\mathbf{E}_i = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.6)$$

gdzie całkowaniem objęta jest cała długość L obwodu zamkniętego.

Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej

$$\mathbf{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{S}) = -\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{S} - \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} \quad (1.7)$$

SEM indukcji może powstać skutek zmiany kształtu obwodu i jego położenia w polu magnetycznym, a także w wyniku zależności indukcji magnetycznej \vec{B} od czasu. W przypadku nieruchomych przewodników kształt obwodu i jego położenie w polu magnetycznym nie ulegają zmianom, a zatem

$$\mathbf{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \equiv - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} . \quad (1.8)$$

Tu cząstkowa pochodna $\partial \Phi_m / \partial t$ oznacza, że przy różniczkowaniu po czasie uwzględniamy jedynie zależność od czasu indukcji magnetycznej.

Biorąc pod uwagę wzory (1.6) i (1.8) otrzymujemy

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} . \quad (1.9)$$

Ze wzoru (1.9) wynika, że *pole elektryczne wytwarzane przez zmienne w czasie pole magnetyczne jest polem wirowym*. (Przypomnimy, że dla pola wirowego cyrkulacja wektora pola wzdłuż obwodu zamkniętego nie jest równa zero. Przykładem pola wirowego jest pole magnetyczne.) Pole elektryczne wytwarzane przez ładunki elektryczne jest polem potencjalnym, ponieważ w tym przypadku $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. A zatem pole elektryczne może być jak potencjalnym, tak i wirowym. Źródłem pola elektrycznego potencjalnego są ładunki elektryczne, natomiast źródłem pola elektrycznego wirowego jest zmienny w czasie strumień pola magnetycznego.

Z uwzględnieniem (1.8) i twierdzenia Stokesa, wzór (1.9) możemy przepisać w postaci

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} . \quad (1.10)$$

Skąd dla wirowego pola elektrycznego uzyskujemy

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (1.11)$$

Prądy Foucaulta

Prądy indukowane powstające w masywnych przewodnikach znajdujących się w zmiennym polu magnetycznym nazywamy *prądami Foucaulta*. W maszynach i

transformatorach prądy indukowane wywołują silne nagrzewanie urządzeń i przyczyniają się do powstawania znacznych strat energii.

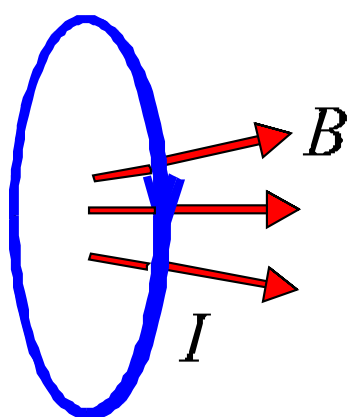
Indukcyjność własna obwodu

Dookoła każdego przewodnika z prądem istnieje pole magnetyczne. Własne pole magnetyczne obwodu przenika również przez powierzchnię S ograniczoną przez obwód, wytwarzając tym samym strumień magnetyczny

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.12)$$

Zgodnie z prawem Biota-Savarta element obwodu z prądem I wytwarza pole magnetyczne o indukcji wprost proporcjonalnej do I

$$\vec{B} = \vec{A}(\vec{r}) \cdot I \quad (1.13)$$



Tu

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

i całkowanie obejmuje całą długość L obwodu.

Po podstawieniu (1.13) do wzoru (1.12) otrzymujemy

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = I \cdot \int_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (1.14)$$

Wielkość

$$L = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_S d\vec{S} \int_L \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

zależy wyłącznie od jego geometrycznego kształtu i wymiarów, a także od przenikalności magnetycznej μ środowiska, w którym znajduje się obwód. Wielkość L nosi nazwę *indukcyjności obwodu*.

Wzór (1.14) wyrażony przez indukcyjność obwodu przyjmuje postać

$$\Phi_m = L \cdot I \quad (1.15)$$

W układzie SI jednostką indukcyjności jest *henr*. $1 H = 1 \text{ Wb/A}$.

Zjawisko samoindukcji

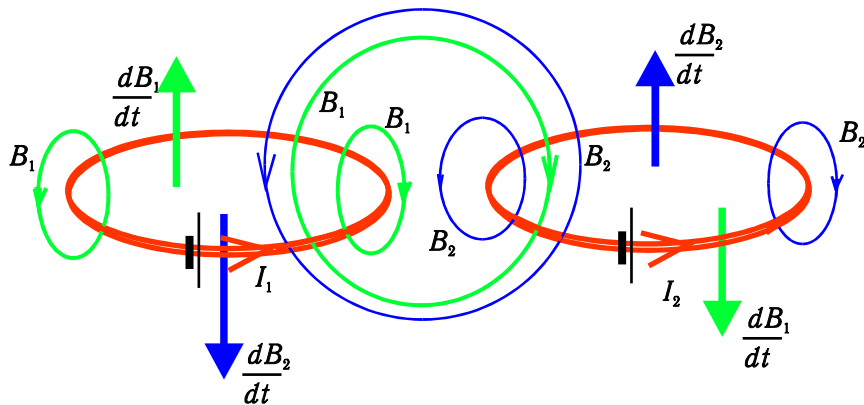
Jeżeli w obwodzie płynie zmienny prąd, wówczas zmienny w czasie strumień magnetyczny $\Phi_m = L \cdot I$ wzbudza w obwodzie SEM indukcji. Zjawisko to nazywa się *samoindukcją albo indukcją własną*. Jeśli obwód prądu nie ulega odkształceniu, to indukcyjność obwodu pozostaje stała i SEM indukcji E_s , zgodnie z prawem Faradaya, wynosi

$$E_s = -L \cdot \frac{dI}{dt} . \quad (1.16)$$

Pod działaniem siły elektromotorycznej samoindukcji pojawia się prąd indukowany przeciwdziałający, według prawa Lenza, zmianie prądu w obwodzie: spowalnia jego wzrost lub malenie.

Indukcja wzajemna

Zjawisko *indukcji wzajemnej* polega na wzbudzaniu SEM indukcji w przewodnikach umieszczonych w pobliżu obwodu prądu zmiennego. Rozważmy dwa obwody i niech w pierwszym z tych obwodów płynie zmienny prąd o natężeniu I_1 , a w drugim obwodzie płynie zmienny prąd o natężeniu I_2 .



Zgodnie z prawem Biota-Savarta indukcja pola magnetycznego obwodu jest proporcjonalna do natężenia prądu płynącego w obwodzie. Jeżeli oznaczymy przez Φ_{21} strumień magnetyczny pola magnetycznego prądu I_1 , przez powierzchnię, ograniczoną przez drugi obwód, to zgodnie z prawem Biota-Savarta strumień Φ_{21} jest wprost proporcjonalny do natężenia prądu I_1

$$\Phi_{21} = L_{21} \cdot I_1 . \quad (1.17)$$

Współczynnik L_{21} nazywamy *indukcyjnością wzajemną* tych dwóch obwodów. Indukcyjność wzajemna zależy jedynie od kształtu geometrycznego, wymiarów i położenia wzajemnego obu obwodów, a także od przenikalności magnetycznej ośrodka, w którym znajdują się obwody.

Strumień magnetyczny Φ_{22} pola magnetycznego prądu I_2 , przez powierzchnie, ograniczoną przez drugi obwód, zgodnie z (1.15) wynosi

$$\Phi_{22} = L_{22} \cdot I_2 . \quad (1.18)$$

Tu $L_{22} \equiv L_2$ jest indukcyjnością drugiego obwodu.

Biorąc pod uwagę (1.17) i (1.18) dla całkowitego strumienia pola magnetycznego przez powierzchnie, ograniczoną przez drugi obwód, znajdujemy

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = L_{22} \cdot I_2 + L_{21} \cdot I_1 . \quad (1.19)$$

W podobny sposób dla całkowitego strumienia pola magnetycznego przez powierzchnie, ograniczoną przez pierwszy obwód, otrzymujemy

$$\Phi_1 = \Phi_{12} + \Phi_{11} = L_{12} \cdot I_2 + L_{11} \cdot I_1 . \quad (1.20)$$

Tu $L_{11} \equiv L_1$ jest indukcyjnością pierwszego obwodu, a $L_{12} = L_{21}$ jest *indukcyjnością wzajemną* tych dwóch obwodów. Równość $L_{12} = L_{21}$ wynika z tego, że $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ jeżeli $I_1 = I_2$.

Gdy kształt, wymiary i położenie wzajemne obwodów pozostają stałe, wówczas indukcyjności $L_{11}, L_{22}, L_{12} = L_{21}$ pozostają stałe i z podstawowego prawa indukcji elektromagnetycznej znajdujemy dla SEM \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 indukowanych w pierwszym i drugim obwodach

$$\mathbf{E}_1 = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = - L_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} - L_{12} \frac{\partial I_2}{\partial t} , \quad (1.21)$$

$$\mathbf{E}_2 = - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = - L_{12} \frac{\partial I_1}{\partial t} - L_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} . \quad (1.22)$$

**Energia własna prądu elektrycznego. Energia pola magnetycznego.
Gęstość objętościowa energii pola magnetycznego**

Przy zmianie prądu elektrycznego w obwodzie, którego indukcyjność wynosi L , a opór elektryczny - R , powstaje SEM samoindukcji, przeciwdziałająca zmianom prądu. Zgodnie z prawem Ohma prąd I w obwodzie wynosi

$$I = \frac{E + E_s}{R}, \quad (1.23)$$

gdzie E oznacza SEM źródła prądu, a E_s - SEM samoindukcji.

Uwzględniając (1.16), przekształcimy wzór (1.23) do postaci

$$E = I \cdot R - E_s = IR + L \frac{dI}{dt}. \quad (1.24)$$

Mnożąc (1.24) przez $I dt$ otrzymujemy następujący wzór na pracę wykonaną przez źródło prądu w czasie dt

$$E \cdot I dt = I^2 R + LI \cdot dt. \quad (1.25)$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania (1.25) określa zwykłą pracę Lenza - Joule'a, wydatkowaną na nagrzewanie obwodu. Drugi wyraz - to dodatkowa praca uwarunkowana zjawiskami indukcyjnymi. Oznaczmy przez W_m pracę dodatkową, wydatkowaną na powiększenie prądu w obwodzie od zera do wartości I

$$W_m = \int_0^I LI dI = \frac{L \cdot I^2}{2}. \quad (1.26)$$

Wielkość

$$W_m = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{L \cdot \Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (1.27)$$

nazywa się *energiją własną prądu I , płynącego w obwodzie o indukcyjności L* .

Zwiększenie prądu w przewodniku wywołuje zwiększanie indukcji pola magnetycznego. A zatem można przypuszczać, że energia własna prądu (1.27) jest niczym innym jak energią pola magnetycznego. Znajdziemy energią własną prądu I płynącego w długim solenoidzie. Pole magnetyczne długiego solenoidu (zwojnicy) wynosi

$$B = \mu_0 \mu \cdot I \cdot n, \quad (1.28)$$

gdzie $n = N/l$ - liczba zwojów przypadających na jednostkę długości.

Jeżeli N oznacza liczbę zwojów, to wypadkowy strumień przechodzący przez wszystkie zwoje zwojownicy jest równy

$$\Phi_m = N \cdot B \cdot S = n l S \cdot \mu_0 \mu \cdot I \cdot n = \mu_0 \mu \cdot n^2 V \cdot I, \quad (1.29)$$

gdzie $V = lS$ - objętość solenoidu.

Korzystając ze wzoru (1.15) ($\Phi_m = L \cdot I$) dla indukcyjności solenoidu znajdujemy

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \mu_0 \mu \cdot n^2 V. \quad (1.30)$$

Po podstawieniu (1.30) do wzoru (1.27) otrzymujemy

$$W_m = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \cdot n^2 I^2 \cdot V. \quad (1.31)$$

Ze wzoru (1.31) dla *gęstości objętościowej energii pola magnetycznego solenoidu* otrzymujemy

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \cdot n^2 I^2 = \frac{1}{2 \mu_0 \mu} B^2 = \frac{1}{2 \mu_0 \mu} (\vec{B} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H}). \quad (1.32)$$

Tu uwzględniliśmy wzór (1.28) oraz związek $\vec{B} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H}$.

Równanie (1.32) jest słuszne ogólnie, mimo że wyprowadziliśmy je tylko dla solenoidu. Zgodnie z tym równaniem *jeżeli w punkcie przestrzeni istnieje pole magnetyczne o indukcji \vec{B} , to możemy uważać, że w punkcie tym jest zmagazynowana energia w ilości*

$\frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H})$ na jednostkę objętości.

Jeżeli pole magnetyczne nie jest jednorodnym polem, to energię własną prądu określa wyrażenie

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV, \quad (1.33)$$

gdzie całkowaniem objęta jest cała objętość V pola magnetycznego.

Prąd przesunięcia. Uogólnione prawo Ampère'a

Dotychczas rozważaliśmy dwa rodzaje prądów elektrycznych: prąd przewodzenia, związany z ruchem uporządkowanym ładunków swobodnych i prąd konwekcyjny, związany z ruchem naładowanych cząstek (ciał) w próżni. Okazuje się, że istnieje inny rodzaj prądów, który nie jest związany z ruchem ładunków elektrycznych. Prądy te odkrył Maxwell nazywają się oni *prądami przesunięcia*.

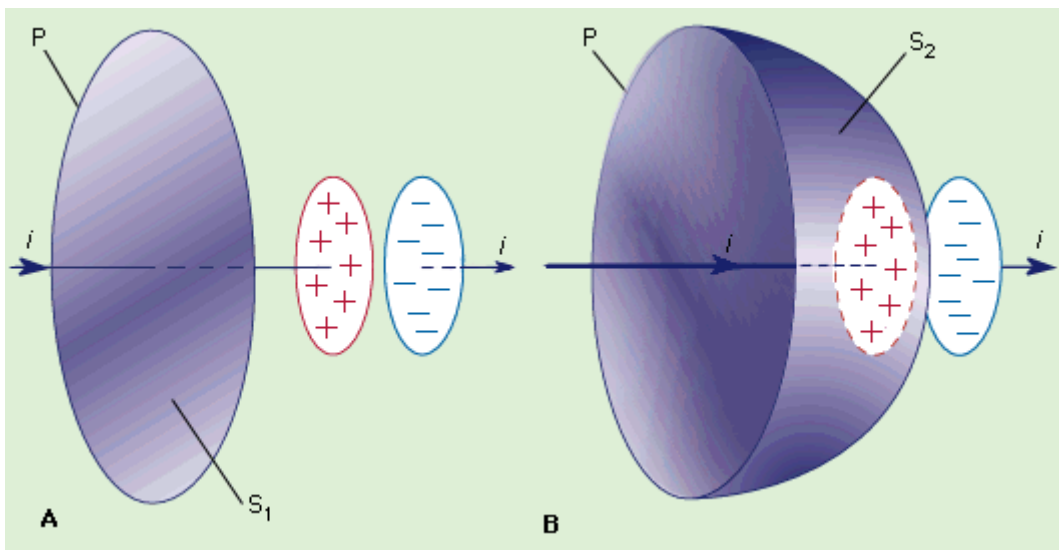
Istnienie prądów przesunięcia wynika z rozważania następującego przykładu. Kondensator płaski dołączony jest do źródła prądu zmiennego. Z prawa przepływu prądu mamy

$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I, \quad (1.34)$$

gdzie $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ oznacza prąd przewodzenia płynący przez powierzchnię S rozpiętą na obwodzie zamkniętym P . Jeżeli rozważmy powierzchnię S_1 (rysunek A), to przez tą powierzchnię przepływa prąd przewodzenia I , a zatem zgodnie z (1.34)

$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I, \quad (1.35)$$

Jeżeli teraz rozważmy powierzchnię S_2 (rysunek B), która również jest rozpięta na obwodzie zamkniętym P ale przechodzi między okładkami kondensatora, to cyrkulacja wektora \vec{H} wzdłuż konturu P pozostanie bez zmian, natomiast przez powierzchnię S_2 prąd przewodzenia nie płynie, a zatem



$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (1.36)$$

Otrzymaliśmy więc dwa sprzecznych wyniki (wzory (1.35) i (1.36)).

Z tej sprzeczności możemy wnioskować, że prawo Ampère'a nie jest słuszne dla prądów zmiennych w czasie. Jednak Maxwell wysunął hipotezę, że ten wniosek nie jest prawidłowy i prawo Ampère'a jest słuszne i w przypadku prądów zmiennych w czasie. Dla prądów zmiennych w czasie musimy jednak uogólnić prawo Ampère'a, zakładając, że oprócz prądów przewodzenia istnieją też tak zwane prądy przesunięcia nie związane z przemieszczeniem ładunków elektrycznych.

Mechanizm powstawania prądów przesunięcia łatwo zrozumieć rozważając prawo Gaussa dla zamkniętej powierzchni S , składającej się z powierzchni S_1 i S_2 : $S = S_1 + S_2$ (patrz rysunek)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q, \quad (1.37)$$

gdzie Q jest ładunkiem jednej z okładek kondensatora.

Gdy przez kondensator płynie prąd zmienny zachodzi rozładowanie i ładowanie kondensatora, wskutek czego ładunek okładki kondensatora nie będzie stałym w czasie. Ze wzoru (1.37) wynika, że zmienny w czasie ładunek wywołuje zmienne w czasie pole elektryczne i zmiany wektora indukcji pola elektrycznego określa wzór

$$\frac{dQ}{dt} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (1.38)$$

Z porównania wyrażenia (1.38) z równaniem ciągłości

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (1.39)$$

gdzie \vec{j} jest gęstością prądu przewodzenia, otrzymujemy

$$\oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (1.40)$$

Z równania (1.40) wynika, że oprócz gęstości prądu przewodzenia \vec{j} jest składnik $\partial \vec{D} / \partial t$, który ma wymiar gęstości prądu. Maxwell zaproponował nazwać ten składnik *gęstością prądu przesunięcia*:

$$\vec{j}_{przes} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \quad (1.41)$$

Zgodnie z hipotezą Maxwella prąd przesunięcia tak samo jak zwykły prąd przewodzenia wytwarza pole magnetyczne. A zatem prawo Ampère'a (1.34) musimy uogólnić, wprowadzając do jego prawej strony prąd przesunięcia

$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{calc} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{przes}) \cdot d\vec{S} = I + I_{przes} , \quad (1.42)$$

gdzie $I_{przes} = \int_S \vec{j}_{przes} \cdot d\vec{S}$ jest prądem przesunięcia, który płynie przez powierzchnię S rozpiętą na krzywej P .

Z uogólnionej postaci prawa Ampère'a (1.42) łatwo udowodnić, że cyrkulacja wektora \vec{H} przy ładowaniu (albo rozładowaniu) kondensatora nie zależy od wyboru powierzchni S rozpiętej na krzywej P . Istotnie dla zamkniętej powierzchni $S = S_1 + S_2$ ze wzoru (1.40) otrzymujemy

$$\oint_S \vec{j}_{calc} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{j}_{przes} \cdot d\vec{S} = -I + I_{przes} = 0 . \quad (1.43)$$

Tu znak minus pochodzi z tego, że prądy I i I_{przes} w (1.43) rozważamy jako wielkości dodatnie, a zatem jeden z prądów musi być dodatni, a drugi - ujemny.

Skąd

$$I = I_{przes} . \quad (1.44)$$

Biorąc pod uwagę wzór (1.44) i uwzględniając, że

$$\int_{S_1} \vec{j}_{calc} \cdot d\vec{S} = I \quad \text{i} \quad \int_{S_2} \vec{j}_{calc} \cdot d\vec{S} = I_{przes} ,$$

otrzymujemy

$$\int_{S_1} \vec{j}_{calc} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{j}_{calc} \cdot d\vec{S} . \quad (1.45)$$

Z punktu widzenia teorii Maxwella i zgodnie ze wzorem (1.40) ($\oint_S (\vec{j} + \vec{j}_{przes}) \cdot d\vec{S} = 0$)

obwody prądów zmiennych są obwodami zamkniętymi: przez te odcinki obwodu, gdzie brak jest przewodników, na przykład między okładkami kondensatora, "płynie" prąd przesunięcia.