

Wykład 9

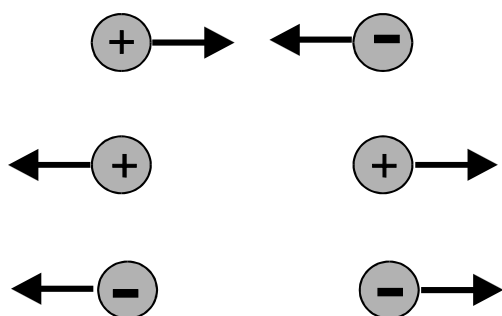
Elementy elektromagnetyzmu

Oddziaływanie elektromagnetyczne jest jednym z najważniejszych w przyrodzie i pozwala wyjaśnić nie tylko zjawiska elektryczne i magnetyczne ale też siły zespajające materię na poziomie atomów, cząsteczek.

Poznanie zjawisk elektromagnetycznych zaczniemy od elektrostatyki. *Elektrostatyka* zajmuje się badaniem właściwości i wzajemnego oddziaływania *nieruchomych* ładunków.

Fundamentalne właściwości ładunków

Elektryczne oddziaływania zachodzą między cząstkami, które posiadają tak zwany ładunek elektryczny. Z doświadczeń wynika, że ładunki mogą być dwóch różnych znaków i ciała niosące ładunki jednoimienne odpychają się natomiast ciała niosące ładunki różnoimienne przyciągają się.



Z doświadczeń wynikają trzy fundamentalne właściwości ładunku elektrycznego:

1. Ładunek elektryczny może przybierać jedynie wartości będące - co do modułu - wielokrotnością ładunku elektronu:

$$q = n \cdot e, \quad (\text{IX.1})$$

Ładunki jednoimienne odpychają się a ładunki różnoimienne przyciągają się

W układzie SI jednostką ładunku jest *kulomb* (C). Wartość ładunku elektronu w układzie SI wynosi

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} C .$$

Właściwość (IX.1), czyli dyskretność ładunku elektrycznego nosi nazwę *kwantyzacji ładunku*. Mówimy, że ładunek elektryczny jest wielkością *skwantowaną*.

2. Całkowity ładunek elektryczny układu odosobnionego, tzn. suma algebraiczna ładunków ujemnych i dodatnich układu, jest wielkością inwariantną (stałą). Właściwość ta nazywa się *prawem zachowania ładunku elektrycznego*.

3. Wartość ładunku elektrycznego nie zależy od tego czy ładunek jest ruchomy, czy nieruchomy. Mówimy więc, że ładunek elektryczny jest wielkością *relatywistycznie inwariantny*.

Pole elektryczne. Prawo Coulomba. Natężenie i linii pola elektrycznego.

Jedynym sposobem wykrycia i zmierzenia ładunków elektrycznych jest badanie oddziaływania zachodzącego między ciałami naładowanymi. Istnienie w przestrzeni pola elektromagnetycznego możemy wykryć obserwując zachowanie małego (punktowego) ładunku elektrycznego - *ładunku próbnego*. Z doświadczeń wynika, że jeżeli w przestrzeni istnieje pole elektryczne, to na mały próbny ładunek q działa siła wprost proporcjonalna do q

$$\vec{F}(x, y, z) = q \cdot \vec{E}(x, y, z) . \quad (\text{IX.2})$$

Wektor $\vec{E}(x, y, z)$ jest funkcją współrzędnych x, y, z punktu, w którym znajduje się ładunek q i nazywa się wektorem *natężenia pola elektrycznego*.

W 1785 roku Coulomb udowodnił doświadczalnie, że siła z której ładunek q_1 działa na ładunek q_2 wynosi

$$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12} , \quad (\text{IX.3})$$

gdzie \vec{r}_{12} jest wektorem skierowanym od ładunku q_1 ku ładunkowi q_2 . Stała k we wzorze (IX.3) zależy wyłącznie od stosowanego układu jednostek. W układzie SI

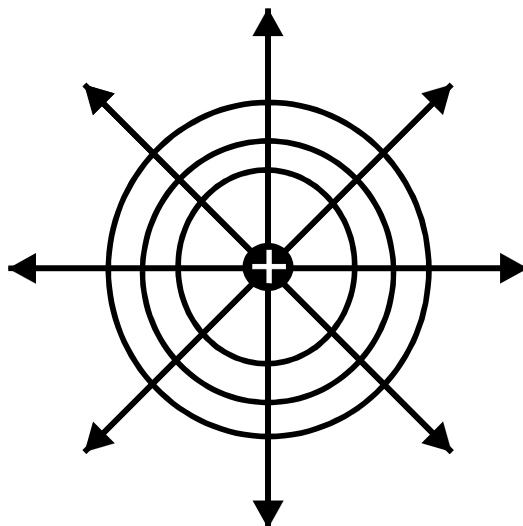
$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2 . \quad (\text{IX.4})$$

W tym wzorze współczynnik $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$ nosi nazwę *przenikalności elektrycznej próżni*.

Umieścimy ładunek $q \equiv q_1$ w początku układu odniesienia. Wtedy rozważając drugi ładunek $q_2 \equiv q_{pr}$ jako ładunek próbny ze wzoru (IX.3) widzimy, że ładunek q jest źródłem pola elektrycznego o natężeniu

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}}{q_{pr}} = k \cdot \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} . \quad (\text{IX.5})$$

Poglądowym sposobom graficznego przedstawienia pola elektrycznego jest rysowanie *linii natężenia pola*. Linii natężenia pola elektrycznego rysujemy w następujący sposób: 1) styczna do linii pola w dowolnym punkcie określa zwrot natężenia pola, który pokrywa się ze strzałką linii pola; 2) linie pola wykreśla się tak, aby liczba linii na jednostkę powierzchni przekroju była proporcjonalna do wielkości $|\vec{E}|$. Linii natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez dodatni ładunek są przedstawione na rysunku niżej.



Korzystając ze wzoru (IX.5) można udowodnić, że wektor natężenia pola elektrycznego równomiernie naładowanej płytki jest prostopadły do powierzchni płytki, a jego wartość bezwzględna wynosi

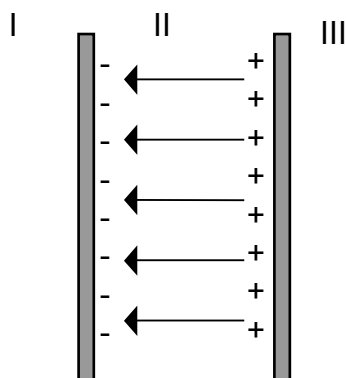
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} . \quad (\text{IX.6})$$

Tu $\sigma = q/S$ - iloraz całkowitego ładunku elektrycznego płytki i jej pola powierzchni, nazywa się *gęstością powierzchniową ładunku*.

Na praktyce często są wykorzystane urządzenia zawierające dwie naładowane powierzchni o przeciwnych ładunkach. Takie urządzenia noszą nazwę *kondensatorów* i w zależności od kształtu okładek kondensatory dzielą się na płaskie, kuliste i cylindryczne. Kondensatory posiadają bardzo ważną właściwość: *pole elektryczne kondensatora jest całkowicie zmagazynowane wewnątrz kondensatora*. Udowodnimy to na przykładzie tak zwanego kondensatora płaskiego.

Płaski kondensator składa się z dwóch równoległych płyt. Pole wytwarzane przez płytę "po lewej stronie" (rysunek) jest, zgodnie z (IX.6), równe $E_{\text{minus}} = \sigma / 2\epsilon_0$ i skierowane ku

płyty. Pole wytwarzane przez płytę po prawej stronie jest równe $E_{plus} = \sigma / 2\epsilon_0$ i skierowane jest od płyty.



Zatem w obszarze I

$$E_I = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = 0 ,$$

w obszarze II

$$E_{II} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} , \quad (\text{IX.7})$$

w obszarze III

$$E_{III} = \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0 .$$

Różnica potencjałów i pojemność elektryczna

Siła kulombowska jest siłą potencjalną, a zatem dla tej siły możemy wprowadzić funkcję skalarną, która nosi nazwę *potencjału*. Funkcja potencjalna pola elektrostatycznego wytwarzanego ładunkiem q jest równa

$$\varphi(x, y, z) = k \cdot \frac{q}{r} . \quad (\text{IX.8})$$

Różnica potencjałów dwóch punktów pola elektrostatycznego x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 liczbowo jest równa pracę po przemieszczeniu jednostkowego dodatniego ładunku elektrycznego od punktu x_1, y_1, z_1 do punktu x_2, y_2, z_2

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{i=1}^n \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} . \quad (\text{IX.9})$$

Korzystając ze wzorów (IX.7) i (IX.9) łatwo znaleźć różnicę potencjałów między okładkami płaskiego kondensatora

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{i=1}^n E_i \cdot \Delta x_i = E \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{d}{S} . \quad (\text{IX.10})$$

Ważną charakterystyką kondensatora jest jego *pojemność elektryczna*, którą określa wzór

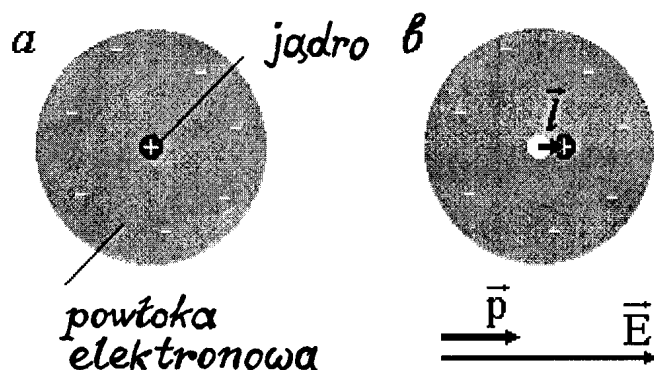
$$C = \frac{q}{U} . \quad (\text{IX.11})$$

Tu $q > 0$ - ładunek jednej z okładek i $U = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ jest różnicą potencjałów między okładkami kondensatora. Biorąc pod uwagę (IX.10) dla płaskiego kondensatora otrzymujemy

$$C = \frac{q}{U} = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} . \quad (\text{IX.12})$$

Pole elektryczne w materii. Polaryzacja dielektryka. Podatność i przenikalność elektryczna

Każde ciało jest zbudowane z elektronów (ujemnie naładowanych cząstek) i jąder atomowych (dodatnie naładowanych cząstek). A zatem jeżeli umieścimy ciało w polu elekt -



rycznym, wówczas jądra atomów zaczną przesuwać się, zgodnie z prawem Coulomba, wzdłuż linii pola. Natomiast ujemne ładunki (elektrony) zaczną przesuwać się w kierunku przeciwnym. W deformowanym w polu elektrycznym atomie

środek ładunków ujemnych nie pokrywa się ze środkiem ładunków dodatnich, a zatem mówimy, że w polu elektrycznym atom (albo molekula) staje się *dipolem elektrycznym* indukowanym o momencie dipolowym

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l} . \quad (\text{IX.13})$$

Dipole indukowane ustawione są od razu równoległe do linii pola elektrycznego. Po wyłączeniu pola elektrycznego cząstki wracają do stanu wyjściowego, a dielektryk traci indukowany moment dipolowy.

A więc każde ciało przy wprowadzeniu w obręb pola elektrycznego uzyskuje makroskopowy elektryczny moment dipolowy. To zjawisko nosi nazwę *polaryzacji*, a mechanizm polaryzacji w znacznym stopniu zależy od tego, z jakich cząstek jest zbudowany dielektryk.

Jeżeli w cząstkach dielektryka środki ładunków dodatnich i ujemnych pokrywają się ze sobą, to takie cząstki nazywamy *niepolarnymi*, a dielektryk zbudowany z tych cząstek będziemy nazywały *dielektrykiem niepolarnym*.

Niektóre cząstki (na przykład molekuly wody H_2O) wskutek asymetrycznej budowy posiadają nawet w zerowym polu elektrycznym moment dipolowy. Takie cząstki nazywamy *polarnymi*, a dielektryki zbudowane z polarnych cząstek będziemy nazywały *dielektrykami polarnymi*.

W zewnętrznym polu elektrycznym każdy mały element objętości ciała ΔV w wyniku polaryzacji uzyskuje dipolowy moment elektryczny

$$\Delta \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad (\text{IX.14})$$

gdzie N oznacza liczbę dipoli zawartych w objętości ΔV dielektryka, a \vec{p}_i - moment elektryczny i -tego dipolu.

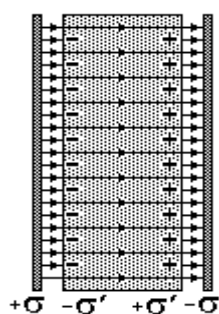
Wektorem polaryzacji nazywamy wielkość

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \right) \equiv \frac{d\vec{p}}{dV} \left[\frac{C}{m^2} \right]. \quad (\text{IX.15})$$

Dipole elektryczne \vec{p}_i wytwarzają w spolaryzowanym ciele swoje pole elektryczne - pole polaryzacji \vec{E}' . Zgodnie z zasadą superpozycji pole polaryzacji \vec{E}' oraz zewnętrzne pole elektryczne \vec{E}_0 , pochodzące od ładunków znajdujących się poza ciałem, tworzą we wnętrzu ciała wypadkowe pole elektryczne o natężeniu

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (\text{IX.16})$$

Dla tego, żeby znaleźć pole elektryczne (IX.16) w ciele, rozpatrzmy płaski kondensator między okładkami którego znajduje się ciało. Pole elektryczne \vec{E}_0 wytwarzane przez ładunki kondensatora określa wzór (IX.7) i jest skierowane od lewej okładki kondensatora ku prawej okładce. W wyniku polaryzacji ciała (w polu elektrycznym kondensatora) na jego powierzchni powstają ładunki elektryczne: na lewej powierzchni ujemne końce dipoli elektrycznych, natomiast na prawej powierzchni - dodatni ładunki spolaryzowanych dipoli elektrycznych. We wnętrzu ciała około ujemnego końca dipolu znajduje się w pobliżu dodatni koniec sąsiedniego spolaryzowanego dipolu, wskutek czego wypadkowy ładunek wewnątrz ciała wynosi zero.



Nie skompensowane ładunki elektryczne na powierzchni dielektryka nazywamy *ładunkami związanymi*. Właśnie ładunki związane na powierzchni spolaryzowanego ciała są źródłem pola polaryzacji \vec{E}' . Oznaczając przez σ' gęstość powierzchniową ładunku występującego na powierzchni ciała (ładunku związanego) dla natężenie pola polaryzacji możemy zapisać

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \quad (\text{IX.17})$$

Zwróćmy uwagę, że pole polaryzacji \vec{E}' ma kierunek przeciwny do pola zewnętrznego \vec{E}_0 . A zatem, zgodnie z (IX.16), natężenie pola elektrycznego wypadkowego wewnątrz ciała jest mniejsze od natężenia pola zewnętrznego \vec{E}_0 .

Można udowodnić, że gęstość powierzchniowa ładunku związanego i wartość bezwzględna polaryzacji są równe

$$\sigma' \equiv P. \quad (\text{IX.18})$$

Po podstawieniu (IX.18) do wzoru (IX.17) i uwzględnieniu, że wektor polaryzacji \vec{P} jest równoległy do pola zewnętrznego \vec{E}_0 , a zatem ma kierunek przeciwny niż pole polaryzacji \vec{E}' znajdujemy

$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{IX.19})$$

Z doświadczeń wynika, że dla większości z dielektryków wektor polaryzacji $\vec{P}(x, y, z)$ jest wprost proporcjonalny do natężenia pola elektrycznego działającego na cząstki we wnętrzu dielektryka

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E} = \epsilon_0 \kappa \cdot (\vec{E}_0 + \vec{E}') . \quad (\text{IX.20})$$

Współczynnik κ nosi nazwę *podatności dielektrycznej* substancji.

Po podstawieniu (IX.20) do wzoru (IX.19) otrzymujemy

$$\vec{E}' = -\kappa \cdot (\vec{E}_0 + \vec{E}') . \quad (\text{IX.21})$$

Skąd

$$\vec{E}' = -\frac{\kappa}{1 + \kappa} \cdot \vec{E}_0 . \quad (\text{IX.22})$$

Biorąc pod uwagę wzór (IX.22) dla pola elektrycznego we wnętrzu dielektryka otrzymujemy

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \frac{\vec{E}_0}{1 + \kappa} . \quad (\text{IX.23})$$

Wprowadzając pojęcie *przenikalności elektrycznej* ϵ :

$$\varepsilon = 1 + \kappa , \quad (\text{IX.24})$$

wzór (IX.23) możemy zapisać w postaci

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon} . \quad (\text{IX.25})$$

Wektor indukcji pola elektrycznego

Ważną rolę w elektromagnetyzmie ciał odgrywa wektor indukcji pola elektrycznego

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} . \quad (\text{IX.26})$$

Z definicji (IX.26), z uwzględnieniem wzoru (IX.25), wynika ważna właściwość wektora \vec{D} :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_0 , \quad (\text{IX.27})$$

a zatem pole wektora indukcji elektrycznej w próżni (\vec{D}_0) i w substancji (\vec{D}) pozostają bez zmian.

Prąd elektryczny. Natężenie prądu elektrycznego

Prądem elektrycznym nazywa się uporządkowany ruch ładunków elektrycznych w przestrzeni. Prąd powstający w przewodniku nazywany *prądem przewodzenia*. Uporządkowany ruch ładunków elektrycznych, czyli prąd obserwuje się również, gdy ciało naładowane albo wiązka ładunków elektrycznych poruszają się w próżni. Tego rodzaju prąd elektryczny nosi nazwę *prądu konwekcyjnego*.

Za kierunek przepływu prądu elektrycznego przyjmuje się umownie kierunek ruchu dodatnich ładunków elektrycznych, chociaż w rzeczywistości w przewodnikach nośnikami prądu są elektrony. Rozważmy przewodnik, w którym płynie prąd i niech przez dowolny przekrój poprzeczny ΔS przewodnika w ciągu krótkiego czasu Δt przechodzi ładunek ΔQ . Natężeniem prądu elektrycznego przepływającego przez przekrój ΔS nazywamy wielkość

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \equiv \frac{dQ}{dt} . \quad (\text{IX.28})$$

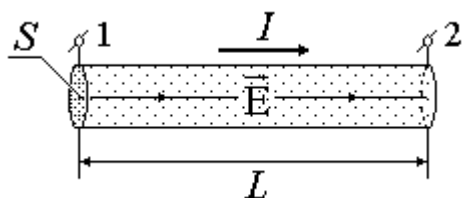
Jednostką natężenia prądu w układzie jednostek SI jest *amper (A)*: $1 A = 1 C / 1 s$.

Prawo Ohma dla odcinka obwodu

Rozważmy odcinek przewodnika o długości L i stałym przekroju poprzecznym S . Jeżeli przez przewodnik płynie stały i jednorodny prąd o natężeniu I , a napięcie (różnica

potencjałów) pomiędzy końcowymi punktami wynosi U , to z doświadczeń wynika, że między U oraz I istnieje prosty związek

$$U = R \cdot I \quad (\text{IX.29})$$



Wielkość R , określona wzorem (IX.29) nazywa się *oporem przewodnika* a zależność oporu od L i S określa wzór:

$$R \equiv \rho \cdot \frac{L}{S} \quad (\text{IX.30})$$

W układzie jednostek SI jednostką oporu jest *om* (Ω): $1\Omega = 1V/1A$.

Wielkość ρ we wzorze (IX.30) nosi nazwę *oporności właściwej (rezystywności)* i jest charakterystyką przewodnika. Wzór (IX.29) zapisany w postaci

$$I = \frac{U}{R} \quad (\text{IX.31})$$

wyraża *prawo Ohma dla odcinka przewodnika*: prąd o natężeniu I płynący przez przewodnik jest proporcjonalny do napięcia pomiędzy końcami przewodnika, a odwrotnie proporcjonalny do oporu przewodnika.

Siły uboczne. Uogólniona postać prawa Ohma. Siła elektromotoryczna

W celu podtrzymywania w obwodzie prądu stałego w obwodzie musi istnieć źródło prądu. Jeżeli w obwodzie nie istniało źródło prądu, to siły oddziaływania kulomboskiego szybko doprowadziłyby do zniknięcia pola elektrycznego we wnętrzu przewodnika. O ile siły kulombowskie wywołują łączenie ładunków różnoimiennych, co powoduje zrównywanie potencjałów i zaniku pola elektrycznego w przewodniku, o tyle siły działające w źródle prądu muszą powodować rozdzielanie przestrzenne ładunków różnoimiennych. Jest, zatem rzeczą zrozumiałą, że to nie mogą być siły kulombowskie. Siły, które działają w źródłach prądu nazywamy *siłami ubocznymi*. W odróżnieniu od sił kulombowskich, siły uboczne przenoszą na przykład dodatnie ładunki nie wzdłuż linii pola elektrycznego a w przeciwnym kierunku. A zatem siły uboczne zawsze wykonują prace po przemieszczeniu ładunków w kierunku przeciwnym do kierunku działania sił elektrostatycznych. Praca sił ubocznych powstaje kosztem energii wydatkowanej przez źródło prądu. W ogniwach galwanicznych to jest energia zachodzących w ogniwie reakcji chemicznych. W prądnicach elektrycznych praca sił ubocznych powstaje kosztem zmiany energii mechanicznej.

Siły uboczne działają tylko we wnętrzu źródła prądu. Odcinki obwodu, na których istnieją ogniwa i na ładunki działają siły uboczne będziemy nazywały *niejednorodnym*. W celu scharakteryzowania sił ubocznych wprowadźmy pojęcie *natężenia pola sił ubocznych*. Natężeniem pola sił ubocznych w pewnym punkcie A będziemy nazywały wektor \vec{E}^* określony wzorem

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}_u}{q} . \quad (\text{IX.32})$$

Tu \vec{F}_u jest siłą uboczną, która działa na ładunek dodatni q , umieszczony w punkcie A .

Siły uboczne wykonują przy przemieszczeniu ładunku q na niejednorodnym odcinku 1- 2 obwodu pracę

$$A_{12} = E_{21} \cdot q . \quad (\text{IX.33})$$

Wielkość E_{21} jest charakterystyką wyłącznie źródła prądu i nie zależy od elementów podłączonych do źródła prądu. Wielkość E_{21} nazywa się *siłą elektromotoryczną źródła prądu*.

Dla niejednorodnego odcinka obwodu, na którym oprócz sił kulombowskich pola elektrycznego na ładunki działają również siły uboczne, prawo Ohma przyjmuje postać

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_{21}}{R_{21}} \equiv \frac{U + E_{21}}{R_{21}} . \quad (\text{IX.34})$$

Tu $U = \varphi_1 - \varphi_2$ jest napięcie na końcach odcinka obwodu, a $R_{12} = R + r$, gdzie r jest oporem wewnętrznym źródła prądu, a R jest oporem zewnętrznej części obwodu elektrycznego

Prawo Joule'a - Lenza

W przypadku, gdy prąd elektryczny w obwodzie jest stały praca sił ubocznych jest w całości wydatkowana na nagrzewanie całego obwodu. Fizyczny mechanizm tego zjawiska jest dość prosty. Wskutek niesprężystego zderzenia elektronów swobodnych z cząstkami przewodnika i ogniwa elektrony tracą część energii swojego uporządkowanego ruchu. Energia przekazywana przy takich zderzeniach przechodzi w energię kinetyczną cząstek, wskutek czego temperatura przewodnika i ogniwa wzrasta.

Dla zamkniętego obwodu z prądem, moc cieplną, czyli energię cieplną, która zostaje wydzielona w jednostce czasu w obwodzie określa prawo Joule'a - Lenza

$$P = I^2 R + I^2 r . \quad (\text{IX.35})$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania (IX.35) określa moc cieplną wydzieloną na oporze zewnętrznym R . Zaś drugi wyraz jest mocą ciepła, które zostaje wydzielono na oporze wewnętrznym r , czyli mocą ciepła ogrzewającego źródło prądu. Dla korzystającego ze źródeł prądu elektrycznego ciepło wydzielono wewnątrz źródła prądu jest bezużytecznym, jest ciepłem straconym. Praktyczne znaczenie (na przykład w grzejnikach elektrycznych) ma ciepło wydzielono na zewnętrznej części obwodu. Moc ciepła wydzielonego na zewnętrznym oporze R nazywa się *mocą użyteczną*.