

## Wykład 7

---

### Mechanika płynów

---

Z makroskopowego punktu widzenia powszechnie przyjęty jest podział materii na ciała stałe i płyny. Pod pojęciem substancji, która może płynąć, czyli może znacznie zmieniać swoje rozmiary i kształt, rozumiemy ciecze i gazy. Dla ciał sztywnych, mających określony rozmiar i kształt, sformułowaliśmy mechanikę ciał sztywnych. Do rozwiązywania zagadnień z mechaniki płynów musimy wprowadzić nowy formalizm, ponieważ płyny łatwo zmieniają kształt, a w przypadku gazów przyjmują objętość równą objętości naczynia.

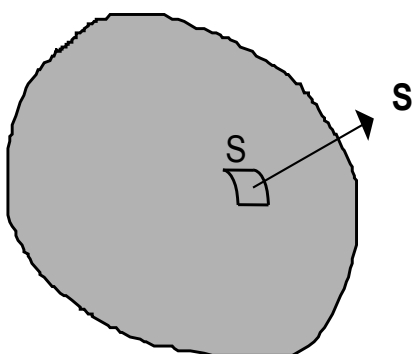
#### Statyka płynów. Ciśnienie i gęstość

Na powierzchni dowolnego ciała (ciało stałe albo ciecz) istnieją tak zwane *siły powierzchniowe*. Siły te są związane z tym, że na granice ciała - próżnia (albo powietrze) atomy albo molekuly ciała oddziałują tylko z atomami (molekułami), które znajdują się wewnątrz ciała, wskutek czego powstaje wypadkowa siła na powierzchni ciała skierowana we wewnątrz ciała. Różnica w działaniu siły powierzchniowej na płyn i na ciało stałe polega na tym, że dla cieczy, znajdującej się w stanie statycznym albo stanie równowagowym, siła powierzchniowa musi być zawsze prostopadła do powierzchni płynu, podczas gdy w ciele stałym może mieć dowolny kierunek. W płynie, który nie znajduje się w stanie równowagowym, styczna składowa siły powierzchniowej powoduje ślizganie się po sobie warstw płynu, wskutek czego płyn zmienia swój kształt, rozmiary i płynie. Stan równowagowy, statyczny powstaje wtedy, gdy styczna składowa siły powierzchniowej znika. Siłę działającą na jednostkę powierzchni prostopadłej do siły powierzchniowej nazywamy *ciśnieniem* i oznaczamy literą  $P$ . Ponieważ ciśnienie jest w stanie równowagi cieczy zawsze prostopadłe do jej powierzchni, ciśnienie w płynie jest wielkością skalarną.

W układzie SI jednostką ciśnienia jest (*pascal*),  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ . Innymi jednostkami są bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ), atmosfera ( $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$ ), mm Hg ( $760 \text{ mm Hg} = 1 \text{ atm}$ ).

Płyn znajdujący się pod ciśnieniem wywiera siłę na każdą powierzchnię będącą z nim w kontakcie. Rozważmy zamkniętą powierzchnię zawierającą płyn. Dowolny element powierzchni płynu  $S$  (rys.VII.1) może być reprezentowany przez wektor  $\vec{S}$ . Długość tego wektora wybieramy równą polu powierzchni, kierunek zaś wybieramy prostopadłym do powierzchni i mającym zwrot na zewnątrz. Wtedy siła  $\vec{F}$  wywierana przez płyn na ten element powierzchni wynosi

$$\vec{F} = p \cdot \vec{S} . \quad (\text{VII.1})$$



Rys.VII.1. Wektor  $\vec{S}$ .

Do opisu płynów stosujemy pojęcie gęstości  $\rho$ :

$$\rho = \frac{m}{V} . \quad (\text{VII.2})$$

Tu  $m$  jest masą płynu, a  $V$  jej objętością.

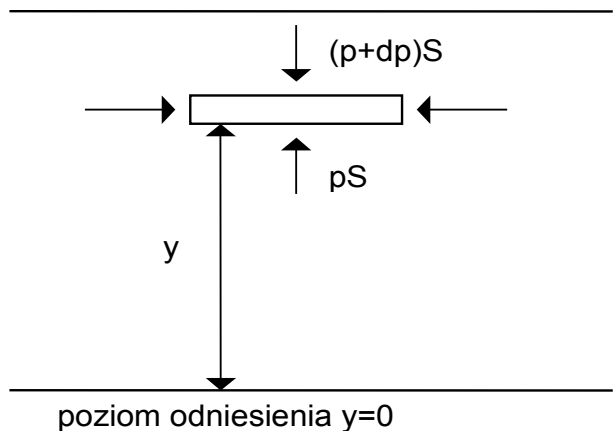
Gęstość zależy od wielu czynników takich jak temperatura, ciśnienie. W tabeli przedstawiony jest zakres wartości gęstości spotykanych w przyrodzie.

Materiał	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
przestrzeń międzygwiazdna	$10^{-18} - 10^{-21}$
najlepsza próżnia laboratoryjna	$10^{-17}$
powietrze (1 atm 0 °C)	1.3
powietrze (50 atm 0 °C)	6.5
Ziemia: wartość średnia	$5.52 \cdot 10^3$
Rdzeń	$9.5 \cdot 10^3$
Skorupa	$2.8 \cdot 10^3$
Białe karły	$10^8 - 10^{15}$
jądro uranu	$10^{17}$

### Ciśnienia wewnątrz nieruchomego płynu, znajdującego w polu grawitacyjnym Ziemi

Gdy płyn znajduje się w równowadze (nie płynie) to jego każda część jest w równowadze. Rozpatrzmy element płynu w kształcie cienkiego dysku znajdującego się w odległości  $y$  od poziomu odniesienia (rys.VII.2). Grubość dysku wynosi  $dy$ , a powierzchnia każdej strony wynosi  $S$ . Masa takiego elementu jest równa  $\rho \cdot dV = \rho \cdot Sdy$ , a jego ciężar  $\rho g \cdot Sdy$ . Siły poziome działające na ten element, wywołane jedynie przez ciśnienie płynu, równoważą się. Siły pionowe są wywoływane nie tylko przez ciśnienie płynu, ale też przez jego ciężar. Rozważany element płynu nie jest przyspieszany, zatem wypadkowa siła działająca nań musi być zerem. Dla zachowania równowagi w pionie trzeba, więc aby:

$$pS = (p + dp)S + \rho g Sdy , \quad (\text{VII.3})$$



Rys.VII.2. Ciśnienie wewnątrz płynu

a stąd

$$\frac{dp}{dy} = -\rho \cdot g < 0 . \quad (\text{VII.4})$$

Równanie (VII.4) pokazuje, że ciśnienie zmienia się ze zmianą wysokości  $dy$ . Gdy wysokość rośnie, tzn.  $dy > 0$  wtedy, jak widać ze wzoru (VII.4),  $dp < 0$ , tzn. ciśnienie w płynie ze wzrostem wysokości maleje.

Z doświadczeń wynika, że *ciecze są praktycznie nieściśliwe*, czyli  $\rho$  jest stałe i nie zależy od  $y$ . A zatem jeśli różnice w wysokości nie są na tyle duże żeby uwzględniać zmiany przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi  $g$ , możemy dla jednorodnej cieczy zapisać rozwiązanie równania (VII.4) w postaci:

$$p = -\rho g \cdot y + C . \quad (\text{VII.5})$$

Tu stała  $C$  zależy od tego jak wybraliśmy poziom odniesienia  $y = 0$ . Jeżeli powierzchnia cieczy jest swobodna, właśnie ona stanowi naturalny poziom odniesienia. Wtedy ciśnienie  $p(y = 0) = C$  na powierzchni cieczy jest równe ciśnieniu atmosferycznemu  $p_0$ . Teraz  $y$  we wzorze (VII.5) opisuje położenie (głębokość) pewnego poziomu w cieczy, a zatem  $y < 0$ . Oznaczając głębokość poniżej poziomu cieczy przez  $h \equiv -y$ , wzór (VII.5) możemy zapisać w postaci:

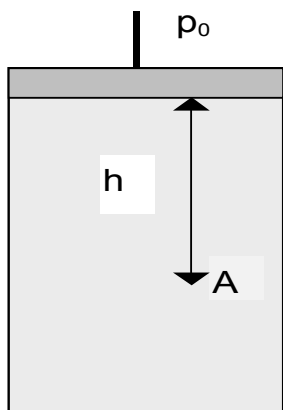
$$p = p_0 + \rho g \cdot h . \quad (\text{VII.6})$$

Związek (VII.6) nie tylko pokazuje, że ciśnienie rośnie wraz z głębokością ale też, że jest jednakowe dla punktów o tej samej głębokości.

Dla gazów  $\rho$  jest małe i różnica ciśnień w dwóch punktach jest zazwyczaj do pominięcia i dlatego można przyjmować, że ciśnienie gazu w naczyniu jest wszędzie jednakowe. Nie jest to jednak prawdziwe, gdy mamy do czynienia ze znaczną różnicą wysokości (gdy wnosimy się na przykład w atmosferze). Ciśnienie zmienia się wtedy znacznie, zmienia się też  $\rho$ . Np. na wysokości około 6 km ciśnienie wynosi 0.5 atm. Dla porównania na głębokości morza 6 km ciśnienie wynosi 600 atm.

## Prawo Pascala i prawo Archimedesesa

Rozważmy ciecz w naczyniu zamkniętym tłokiem, na który możemy działać ciśnieniem zewnętrznym  $p_0$  (rys.VII.3).



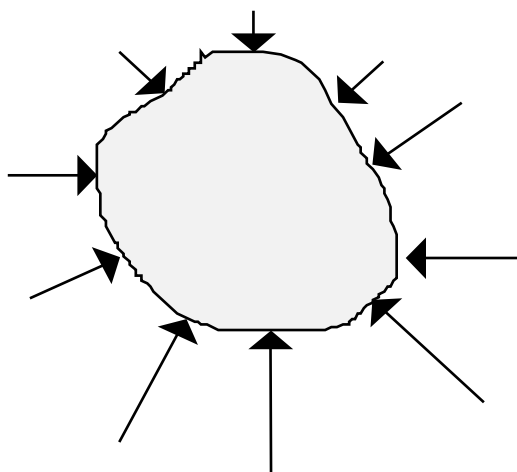
Rys.VII.3. Ściskanie płynu.

W każdym punkcie  $A$  znajdującym się na głębokości  $h$  od górnej powierzchni cieczy, ciśnienie jest określone wzorem (VII.6). Zwiększymy ciśnienie zewnętrzne o wartość  $\Delta p_0$ . Ponieważ, ciecze są nieściśliwe więc gęstość pozostaje praktycznie bez zmian i dlatego ciśnienie teraz wynosi

$$p = p_0 + \Delta p_0 + \rho g \cdot h . \quad (\text{VII.7})$$

Wynik (VII.7) został po raz pierwszy sformułowany przez Blaise Pascala i nazywa się *prawem Pascala*. Prawo to formułuje się następująco: *ciśnienie wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane niezmiennione na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia*.

Prawo to jest konsekwencją praw mechaniki płynów podobnie jak *prawo Archimedesesa*. Kiedy ciało jest zanurzone w całości lub częściowo w spoczywającym płynie (cieczy lub gazie) to płyn ten wywiera ciśnienie na każdą, będącą z nim w kontakcie, część powierzchni ciała (rys.VII.4). Wypadkowa siła jest skierowana ku górze i nazywa się *siłą wyporu*.



Rys.VII.4. Siły działające na zanurzone ciało.

Ponieważ ciśnienie wywierane na ciało nie zależy od materiału, z którego zrobiono ciało, więc zastąpmy w naszym rozumowaniu rozpatrywane ciało przez ten sam płyn, co płyn otoczenia. Na ten płyn będzie działało to samo ciśnienie, co na ciało, które zastąpił. Poza tym płyn będzie nieruchomy. Stąd działająca nań siła będzie równa ciężarowi płynu i skierowana ku górze tak, żeby ten ciężar zrównoważyć.

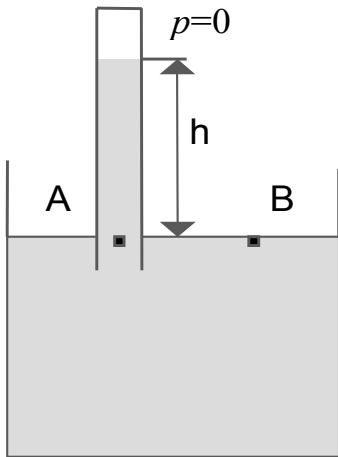
Otrzymujemy prawo Archimedesesa: *ciało w całości lub częściowo zanurzone w płynie jest wypierane ku górze siłą równą ciężarowi wypartego przez to ciało płynu*. Tak, więc:

$$F_{wyporu} = m_{wypartego\ plynu} \cdot g = \rho V g , \quad (\text{VII.8})$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu, a  $V$  objętością części zanurzonej ciała.

### Pomiar ciśnienia (barometr)

Evangelista Torricelli wynalazł w 1643 r barometr rtęciowy i tym samym podał sposób pomiaru ciśnienia atmosferycznego. Barometr Torricellego składa się z rurki wypełnionej rtęcią ( $\rho = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ), którą odwracamy nad naczyniem z rtęcią tak jak na rys.VII.5.



Rys.VII.5. Barometr

Ciśnienia w punktach  $A$  i  $B$  muszą być jednakowe bo punkty te są na jednakowej wysokości. Zgodnie z naszymi uprzednimi rozważaniami możemy zapisać

$$p_A = \rho g \cdot h , \quad (\text{VII.9a})$$

$$p_B = p_{atm} . \quad (\text{VII.9b})$$

Ponieważ  $p_B = p_A$  ze wzorów (VII.9) mamy

$$h = \frac{p_{atm}}{\rho g} . \quad (\text{VII.10})$$

Jeżeli ciśnienie atmosferyczne jest  $p_{atm} = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 101325 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$ , ze wzoru (VII.10) znajdujemy:

$$h = \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{101325}{13.6 \cdot 10^3 \cdot 9.8} = 0.76 \text{ mHg} .$$

Więc mierząc wysokość słupa rtęci mierzymy wielkość ciśnienia atmosferycznego.

### Dynamika płynów. Ogólny opis przepływu płynów

Znane są dwa podejścia do opisu ruchu płynu. Pierwsze wymaga "podzielenia" płynu na nieskończenie małe cząstki (elementy objętości) i śledzenie za ruchem tych elementów. Oznacza to, że dla każdej cząstki mamy współrzędne  $x, y, z$  i ich zależność od czasu. W ten sposób skonstruować można opis ruchu płynu (ten sposób wprowadził Joseph Louis Lagrange w końcu XVIII w). Drugie podejście zaproponowane przez Leonharda Eulera jest bardziej wygodne. Zamiast opisywać historię każdej z cząstek rozważamy gęstość płynu i jego prędkość w każdym punkcie przestrzeni i w każdej chwili czasu. Czyli podajemy  $\rho(x, y, z, t)$

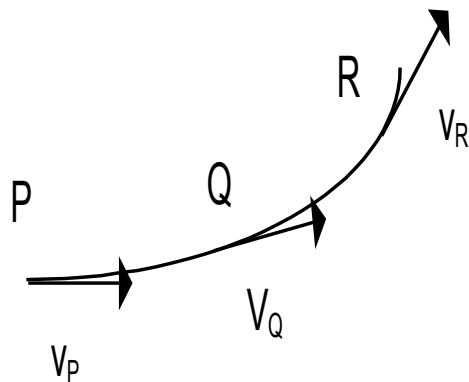
oraz  $\vec{v}(x, y, z, t)$ . Oznacza to, że koncentrujemy się tylko na zmianach z czasem w wybranym punkcie przestrzeni gęstości i prędkości płynu.

Na wstępie rozpatrzmy pewne ogólne właściwości charakteryzujące przepływ.

- Przepływ może być *ustalony* lub *nieustalony*. Ruch płynu jest ustalony, kiedy prędkość płynu  $\vec{v}$  jest w dowolnie wybranym punkcie stała w czasie tzn. każda cząstka przechodząca przez dany punkt zachowuje się tak samo. Warunki takie osiąga się przy niskich prędkościach.
- Przepływ może być *wirowy* lub *bezwirowy*. Przepływ jest bezwirowy, gdy w żadnym punkcie cząstka nie ma wypadkowej prędkości kątowej względem tego punktu. Można sobie wyobrazić małe kółko z łopatkami zanurzone w przepływającym płynie. Jeżeli kółko nie obraca się to przepływ jest bezwirowy, w przeciwnym razie ruch jest wirowy.
- Przepływ może być *ściśliwy* lub *nieściśliwy*. Zazwyczaj przepływ cieczy jest nieściśliwy (stała  $\rho$ ). Przepływ gazu też może być nieściśliwy tzn. zmiany gęstości są nieznaczne. Np. ruch powietrza względem skrzydeł samolotu podczas lotu z prędkością mniejszą od prędkości głosu jest przepływem nieściśliwym.
- Przepływ może być *lepki* lub *nielepki*. Lepkość w ruchu płynów jest odpowiednikiem tarcia w ruchu ciał stałych (lepkość smarów).

W naszych rozważaniach ograniczymy się do przepływów *ustalonych*, *bezwirowych*, *nieściśliwych* i *nielepkich*. To znacznie upraszcza matematykę.

Nasze rozważania rozpoczniemy od wprowadzenia pojęcia *linii prądu* (rys.VII.6).



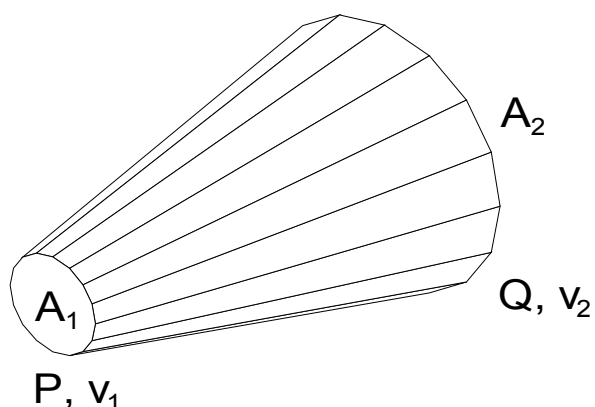
Rys.VII.6. Linia prądu

W przepływie ustalonym  $\vec{v}$  jest stała w czasie w danym punkcie. Rozważmy punkt  $P$  wewnątrz płynu. Każda cząstka ma tam taką samą prędkość. To samo dla punktów  $Q$  i  $R$ . Jeżeli prześledzimy tor jednej cząstki to prześledziliśmy zarazem tor każdej cząstki przechodzącej przez  $P$ . Tor tej cząstki nazywamy linią prądu. Linia prądu jest równoległa do prędkości płynu.

Żadne linie prądu nie mogą się przecinać, bo istniałaby niejednoznaczność w wyborze drogi przez cząstkę (a przepływ jest ustalony). Jeżeli wybierzemy pewną skończoną liczbę linii prądu to taką wiązkę nazywamy *strugą prądu*. Brzegi składają się z linii prądu więc *płyn nie*

może przepływać przez brzegi strugi. Płyn wchodzący jednym końcem strugi musi opuścić ją drugim.

Na rysunku VII.7 prędkość cząstek w punkcie  $P$  wynosi  $v_1$  a pole przekroju strugi  $A_1$ . W punkcie  $Q$  odpowiednio  $v_2$  i  $A_2$ . W czasie  $\Delta t$  element płynu przebywa odległość  $v\Delta t$ . Masa płynu przechodzącego przez  $A_1$  w czasie  $\Delta t$  wynosi



Rys.VII.7. Struga prądu

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t ,$$

ponieważ  $A_1 v_1 \Delta t$  stanowi objętość elementu płynu. Wprowadzamy strumień masy jako  $\Delta m / \Delta t$ . Wtedy otrzymujemy dla punktów  $P$  i  $Q$  odpowiednio

$$\Delta m_1 / \Delta t = \rho_1 A_1 v_1 ,$$

oraz

$$\Delta m_2 / \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 .$$

Ponieważ nie ma po drodze (między punktami  $P$  i  $Q$ ) żadnych "źródeł" ani "ścieków", więc strumienie mas muszą być sobie równe

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 .$$

Jeżeli płyn jest nieściśliwy to  $\rho_1 = \rho_2$  i wtedy

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 ,$$

czyli

$$A v = const .$$

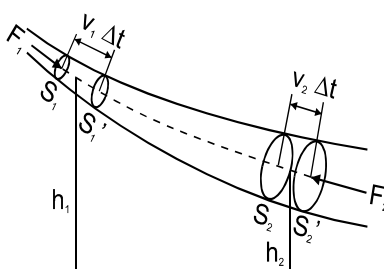
Z równania powyższego wynika, że prędkość płynu nieściśliwego przy ustalonym przepływie jest odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju. Linie prądu muszą się zagęszczać w węższej części, a rozrzedzać w szerszej. Tzn. rzadko rozmieszczone linie oznaczają obszary niskiej prędkości, linie rozmieszczone gęsto obszary wysokiej prędkości.

Ponadto warto zauważyć, że skoro cząstki zwalniają przepływając z  $P$  do  $Q$  ( $v_1 > v_2$ ) to poruszają się ruchem jednostajnie opóźnionym. Opóźnienie to może być wywołane grawitacją lub różnicą ciśnień, ale wystarczy wziąć jako przykład strugę poziomą, w której

gravitacja się nie zmienia, aby dojść do wniosku, że ciśnienie jest największe tam gdzie prędkość najmniejsza (w przepływie ustalonym).

### Równanie Bernoulliego

Rozważmy ustalony, nieściśliwy przepływ płynu przez rurę (rys.VII.8). Ciecz na rysunku płynie w stronę prawą. W czasie  $\Delta t$  powierzchnia  $S_1$  przemieszcza się o odcinek  $v_1\Delta t$  do położenia  $S_1'$ . Analogicznie powierzchnia  $S_2$  przemieszcza się o odcinek  $v_2\Delta t$  do położenia  $S_2'$ . Na powierzchnię  $S_1$  działa siła  $F_1 = p_1 \cdot S_1$  a na powierzchnię  $S_2$  siła  $F_2 = p_2 \cdot S_2$ . Zwróćmy uwagę, że efekt sumaryczny przepływu płynu przez rurkę polega na przeniesieniu pewnej objętości  $V$  płynu ograniczonej powierzchniami  $S_1S_1'$  do położenia  $S_2S_2'$ .



Rys.VII.8. Nieściśliwy przepływ płynu przez rurę.

Twierdzenie o pracy i energii mówi, że praca wykonana przez wypadkową siłę jest równa zmianie energii układu. Siłami, które wykonują pracę są  $F_1$  i  $F_2$ . Obliczamy, więc pracę tych sił

$$A = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = (p_1 - p_2) V ,$$

oraz zmianę energii strugi

$$\Delta E = \left( \frac{m v_2^2}{2} + m g h_2 \right) - \left( \frac{m v_1^2}{2} + m g h_1 \right) .$$

Ponieważ



$$A = \Delta E ,$$

to przy założeniu nieściśliwości płynu ( $\rho = const$ ) otrzymujemy

$$(p_1 - p_2) \cdot V = \left( \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \right) - \left( \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right).$$

Biorąc pod uwagę, że  $\rho = m/V$ , związek ten można przekształcić do postaci

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 ,$$

czyli

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gy = const. \quad (\text{VII.11})$$

Równanie to nosi nazwę *równania Bernoulliego* dla przepływu ustalonego, nielepkiego i nieściśliwego. Jest to podstawowe równanie mechaniki płynów. Może być stosowane do wyznaczenia prędkości płynu na podstawie pomiarów ciśnienia (rurka Venturiego, rurka Pitota).

### Lepkość

W cieczech rzeczywistych ruchomych zawsze istnieje tarcie między sąsiednimi warstwami, które nazywamy *lepkością*. Pomiar prędkości przepływu cieczy w rurce wykazują, że prędkość przepływu jest maksymalna w środku rury, zmniejszając do zera około ścianek rury. Ciecz w takim przypadku składa się z małych cylindrycznych warstw między którymi, wskutek różnicy prędkości warstw, zachodzi tarcie. Przepływ cieczy w postaci takich warstw nazywamy *laminarnym*. Z doświadczeń wynika, że przy laminarnym przepływie moduł siły tarcia działającej na granicy dwóch warstw na powierzchnię  $S$  warstwy cylindrycznej (czyli powierzchni równoległej do prędkości ruchu cieczy) wynosi

$$F = \eta \cdot \left| \frac{dv}{dr} \right| \cdot S . \quad (\text{VII.12})$$

Tu współczynnik  $\eta$  nazywa się lepkością cieczy, a  $dv/dr$  określa zmiany prędkości przepływu cieczy w kierunku prostopadłym po powierzchni  $S$ . Siła tarcia (VII.12) między dwoma warstwami ma kierunek zgodny lub przeciwny z kierunkiem ruchu cieczy i powoduje wyrównanie prędkości różnych warstw.

Przepływ laminarny jest przepływem ustalonym i obserwuje się w przypadku małych prędkości cieczy. Jeżeli będziemy zwiększały prędkość przepływu cieczy, to przy określonej wartości prędkości przepływ cieczy staje się niestacjonarny. W tym przypadku prędkości cząstek cieczy w każdym punkcie cieczy zmieniają się przypadkowo. Takie chaotyczne zachowanie się cieczy nosi nazwę *turbulencji*. Charakter przepływu cieczy - laminarny albo turbulentny, zależy od wartości bezwymiarowego parametru

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (\text{VII.13})$$

Parametr (VII.13) nazywa się *liczbą Reynoldsa*. We wzorze (VII.13)  $\rho$  jest gęstość cieczy,  $v$  - średnia prędkość przepływu cieczy,  $l$  - promień poprzecznego przekroju rury.

Okazuje się, że jeżeli  $\text{Re} < 1000$ , przepływ cieczy będzie laminarny. Warto podkreślić uniwersalny charakter tej liczby, co oznacza, że przepływ wszystkich cieczy (różne  $\rho$  i  $\eta$ ) z różnymi prędkościami i w różnych rurach (różne  $l$ ) będzie laminarny jeżeli  $\text{Re} < 1000$ . Jednak jeżeli  $\text{Re} > 1000$  ruch cieczy staje się turbulentnym, chaotycznym.