Wykład 5

Podstawy szczególnej teorii względności

Zasada względności

Na wykładzie drugim udowodniliśmy, że gdy jeden inercjalny układ odniesienia porusza się ze stałą prędkością względem drugiego inercjalnego układu odniesienia to każde przeprowadzone przez nas doświadczenie przebiega tak samo w jednym i drugim układzie. Jednocześnie jakakolwiek zmiana prędkości układu natychmiast jest przez nas zauważana. To prawo przyrody znane jest jako *zasada względności* było sformułowano jeszcze za czasów Galileusza:

Prawa przyrody (fizyki również) są takie same bez względu na to, czy obserwujemy je z układu inercjalnego nie poruszającego się, czy z ruchomego układu inercjalnego (czyli układu poruszającego się względem pierwszego układu bez przyśpieszenia).

Jeżeli rozważymy dwa inercjalne układy odniesienia K i $K^{/}$ i układ $K^{/}$ porusza się względem układu K ze stałą prędkością V wzdłuż osi Ox ($Oy = Oy^{/}, Oz = Oz^{/}$), to z mechaniki klasycznej wynika, że *wzory przekładające wyniki obserwacji jednego obserwatora na spostrzeżenia drugiego* mają postać

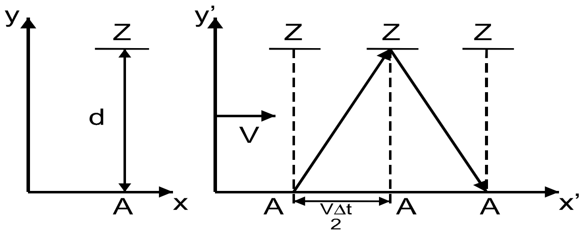
$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \ . \tag{V.1}$$

Te równania noszą nazwę *transformacji Galileusza*.

Prawie do końca dziewiętnastego wieku uważano, że stosując powyższe wzory do opisu doświadczeń, otrzymamy takie same wyniki, niezależnie od układu inercjalnego w którym to doświadczenie opisujemy. Okazało się jednak, że nie jest to prawdą. Najpierw stwierdzono, że przekształcenia Galileusza zastosowane do równań Maxwella – podstawowych równań teorii elektromagnetyzmu, nie dają tych samych wyników dla różnych układów inercjalnych. W szczególności z równań Maxwella wynika, że *prędkość światła, określająca prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni, jest podstawową stałą przyrody i powinna być taka sama w każdym układzie odniesienia*. Oznacza to na przykład, że gdy impuls światła rozchodzący się w próżni w kierunku osi Ox jest obserwowany przez dwóch obserwatorów, to zarówno obserwator nieruchomy jak poruszający się z prędkością V (względem pierwszego) zmierzą identyczną prędkość impulsu c = 2.998· 10^8 m/s. Tymczasem zgodnie z transformacją Galileusza i ze zdrowym rozsądkiem powinniśmy otrzymać wartość $(c-V)$. Wszystkie prowadzone doświadczenia, w których próbowano podważyć równania Maxwella, dały wynik negatywny i musimy uznać, że *prędkość światła w próżni jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.* Rozpatrzmy teraz niektóre wnioski wynikające ze stałości prędkości światła.

Dylatacja czasu

Załóżmy, że w rakiecie znajduje się przyrząd wysyłający impuls światła z punktu *A*, który następnie odbity przez lustro *Z*, odległe od *A* o *d* powraca do punktu *A*, gdzie jest rejestrowany (rys.V.1 po lewej stronie). Czas Δt jaki upływa między wysłaniem światła, a jego zarejestrowaniem przez obserwatora będącego w rakiecie jest oczywiście równy $\Delta t = 2d/c$. Teraz to samo zjawisko opisujemy z układu nieruchomego, względem którego rakieta porusza się w prawo z prędkością *V.* Chcemy, w tym układzie, znaleźć czas $\Delta t^{/}$ przelotu światła z punktu *A* do zwierciadła i z powrotem do *A*. Jak widać na rysunku (po prawej stronie) światło przechodząc od punktu *A* do zwierciadła *Z* porusza się po linii o długości S:



Rys.V.1

$$S = \sqrt{\left(V\frac{\Delta t^{/}}{2}\right)^2 + d^2} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{V}{c}\Delta t^{/}\right)^2 + \left(\frac{2d}{c}\right)^2} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{V}{c}\Delta t^{/}\right)^2 + (\Delta t)^2} \quad . \qquad \text{(V.2)}$$

Zatem czas potrzebny na przebycie drogi *AZA* (tj. dwóch odcinków *S*) wynosi: $\Delta t^{/} = 2S/c$. Z uwzględnieniem (V.2) znajdujemy:

$$\Delta t^{/} = \sqrt{\left(\frac{V}{c}\Delta t^{/}\right)^2 + (\Delta t)^2} \quad .$$

Skąd

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \ , \tag{V.3}$$

albo

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \ . \tag{V.4}$$

Ze wzoru (V.4) wynika, że warunek stałości prędkości światła w różnych układach odniesienia może być spełniony tylko wtedy gdy, czas pomiędzy dwoma zdarzeniami obserwowanymi i mierzonymi z różnych układów odniesienia jest różny. A zatem, *każdy obserwator stwierdzi,* że *poruszający się zegar idzie wolniej* ($\Delta t < \Delta t'$) *niż identyczny zegar w spoczynku*. To zjawisko *dylatacji czasu* jest własnością samego czasu i dlatego spowolnieniu ulegają wszystkie procesy fizyczne gdy są w ruchu. Dotyczy to również reakcji chemicznych, więc i np. biologicznego starzenia się.

Transformacja Lorentza i skrócenie długości

Jeżeli rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia K i K' i układ K porusza się względem układu K' ze stałą prędkością V wzdłuż osi Ox' ($Oy = Oy', Oz = Oz'$), to *wzory przekładające wyniki obserwacji jednego obserwatora na spostrzeżenia drugiego*, które uwzględniają stałość prędkości światła, mają postać

$$x' = \frac{x+Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t+\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{V.5}$$

$$x = \frac{x'-Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \frac{t'-\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{V.6}$$

Tu $\beta = V/c$. Równania (V.5) i (V.6) noszą nazwę równań *transformacji Lorentza.* Łatwo sprawdzić, że jeżeli $\beta \equiv (V/c) \to 0$ przekształcenia Lorentza przechodzą w przekształcenia Galileusza (V.1).

Omówimy teraz niektóre wnioski wynikające z transformacji Lorentza. Jako przykład, rozważmy rakietę, poruszającą się z prędkością V, wzdłuż osi $Ox = Ox^{/}$ i niech w tej rakiecie (układ K) leży pręt o długości $L = \Delta x = x_2 - x_1$. Długość pręta L w układzie, w którym pręt spoczywa będziemy nazywali *własną długością pręta*. Znajdziemy, jaką długość tego pręta $L^{/} = \Delta x^{/} = x_2^{/} - x_1^{/}$ zaobserwuje obserwator w układzie nieruchomym $K^{/}$.

Załóżmy, że pomiar długości pręta polega na zarejestrowaniu dwóch zjawisk zachodzących równocześnie (względem układu nieruchomego $K^{/}$) na końcach pręta (np. zapalenie się żarówek). Ponieważ żarówki zapalają się w tym samym czasie (dla obserwatora w układzie nieruchomym $K^{/}$) to $\Delta t^{/} = 0$. Uwzględniając te warunki otrzymujemy na podstawie transformacji Lorentza (V.6)

$$L \equiv \Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta x^{/} \equiv \frac{L^{/}}{\sqrt{1-\beta^2}} \ ,$$

albo

$$L^{/} = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \ . \tag{V.7}$$

A zatem długość pręta $L^{/}$ oceniana z układu, względem którego pręt się porusza, jest krótsza od jego własnej długości L.

Czas własny i efekt dylatacji czasu

Ze wzoru (V.4) wynika, że jeżeli jako układ K rozważymy układ sztywno związany z poruszającą się cząstką, to czas t jest związany z czasem $t^{/}$ dowolnego układu inercjalnego $K^{/}$ za pomocą wzoru

$$t = t^{/} \cdot \sqrt{1-\beta^2} = const \ . \tag{V.8}$$

Ze wzoru (V.8) wynika, że czas t ma wyróżnione znaczenie: ten czas obliczony według wzoru (V.8) nie zależy od żadnego obserwatora inercjalnego, chociaż każdy z obserwatorów będzie miał swój czas $t^{/}$, a prędkość cząstki V względem różnych układów będzie różna. Czas t, czyli czas mierzony w układzie odniesienia, w którym cząstka spoczywa, nazywamy *czasem własnym* i będziemy oznaczali ten czas literą τ. Ze wzoru (V.68) wynika, że czas własny ruchomej cząstki „płynie” wolniej niż czas t mierzony w układzie odniesienia K . Ten efekt zmniejszenia tempa upływu czasu nosi nazwę *dylatacji czasu*. Ze wzoru (V.8) wynika, że dla światła $(\upsilon = c)$ czas „własny” w ogóle „nie płynie”.

Relatywistyczne dodawanie prędkości

Znajdziemy teraz wzory łączące prędkości ruchomej cząstki w dwóch inercjalnych układach odniesienia. Niech znów układ K porusza się względem układu $K^{/}$ wzdłuż osi $Ox^{/}$ z prędkością V . Ze wzorów (V.5) mamy

$$dx^{/} = \frac{dx + Vdt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy^{/} = dy \ , \quad dz^{/} = dz \ , \quad dt^{/} = \frac{dt + \frac{V}{c^2}dx}{\sqrt{1-\beta^2}} . \qquad \text{(V.9)}$$

Prędkości cząstki w układach K i $K^{/}$ określają wzory: $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$, $\vec{\upsilon}^{/} = d\vec{r}^{/}/dt^{/}$. A zatem dzieląc pierwsze trzy równości (V.9) przez czwartą otrzymujemy

$$\upsilon_x^{/} = \frac{dx^{/}}{dt^{/}} = \frac{\upsilon_x + V}{1 + \frac{\upsilon_x V}{c^2}} \ , \quad \upsilon_y^{/} = \frac{dy^{/}}{dt^{/}} = \frac{\upsilon_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon_x V}{c^2}} \ , \quad \upsilon_z^{/} = \frac{dz^{/}}{dt^{/}} = \frac{\upsilon_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon_x V}{c^2}} \ . \qquad \text{(V.10)}$$

Wzory (V.10) określają prawo składania prędkości w relatywistycznej mechanice. W przypadku, gdy $c \to \infty$ wzory te przechodzą we wzory mechaniki klasycznej: $\upsilon_1 = \upsilon_{1^{/}} + V$, $\upsilon_2 = \upsilon_{2^{/}}$, $\upsilon_3 = \upsilon_{3^{/}}$.

Dynamika relatywistyczna. Czterowektory prędkości i pędu

Cechą charakterystyczną w mechanice Newtona jest absolutny charakter czasu, co oznacza, że czas nie zależy od wybranego inercjalnego układu odniesienia. W mechanice Newtona prędkość cząstki określa wektor styczny do trajektorii cząstki: $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$. Oznaczając wektor za pomocą strzałki, podkreślamy, że w mechanice klasycznej wektor możemy rozpatrywać jako obiekt geometryczny nie zależny od wyboru osi współrzędnych. Mówiąc o wektorze wyobrażamy sobie zorientowaną w przestrzeni strzałkę o określonej długości. Dowolny obrót układu osi współrzędnych nie zmienia kierunku i długości wektora. Od wybranego układu odniesienia zależą tylko składowe wektora.

W mechanice relatywistycznej trajektorię cząstki określają 4 - wymiarowym wektorem (*czterowektorem*) wodzącym $\vec{\rho}$. W abstrakcyjnej przestrzeni, która wprowadził Minkowski, oprócz trzech przestrzennych kartezjańskich osi współrzędnych dodajemy jeszcze jedną oś czasową. Zakładamy, iż w tej przestrzeni Minkowskiego istnieją cztery jednostkowy wektory $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ takie, że

$$(\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) = \begin{matrix} +1 & dla \quad \mu = \nu = 0, \\ -1 & dla \quad \mu = \nu = 1,2,3, \\ 0 & dla \quad \mu \neq \nu. \end{matrix} \tag{V.11}$$

Przez współrzędne wektor wodzący $\vec{\rho}$ w wybranej bazie jednostkowych wektorów ($\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) możemy zapisać w postaci

$$\vec{\rho} = x_0 \cdot \vec{e}_0 + x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 \ . \tag{V.12}$$

Tu $x_0 = ct$, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$ i $x_3 \equiv z$ są współrzędne czterowektora $\vec{\rho}$.

Podobnie jak w zwykłej przestrzeni Euklidesa, będziemy rozpatrywali dowolny wektor w przestrzeni Minkowskiego jako obiekt geometryczny. Kierunek i długość wektora wodzącego $\vec{\rho}$ jest inwariantny względem przekształceń Lorentza. Jednak czas w mechanice relatywistycznej w różnych inercjalnych układach odniesienia jest różny. Z tego powodu powstaje pytanie – jak określić wektor prędkości punktu materialnego, żeby ten wektor był niezależny od wybranego inercjalnego układu odniesienia. Wiemy, że niezależnym od układu odniesienia jest własny czas cząstki τ. A więc, jeżeli czterowektor prędkości $\vec{u}$ określimy jako

$$\vec{u} = \frac{d\vec{\rho}}{d\tau} \ , \tag{V.13}$$

to ten wektor będzie relatywistyczne inwariantnym. Współrzędne tego wektora zależą oczywiście od wybranego układu odniesienia. Uwzględniając, że $x_0 = ct$ i $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ ze wzorów (V.12) i (V.13) otrzymujemy

$$u_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \tag{V.14a}$$

$$u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \tag{V.14b}$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \tag{V.14c}$$

$$u_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{\upsilon_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{V.14d}$$

Tu $\upsilon_1 = dx/dt$, $\upsilon_2 = dy/dt$, $\upsilon_3 = dz/dt$ są to składowe „zwykłego” trójwymiarowego wektora prędkości $\vec{\upsilon}$ cząstki w wybranym inercjalnym układzie K.

W mechanice Newtona pęd punktu materialnego jest iloczynem trójwymiarowego wektora prędkości i jego masy m_0: $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$. W mechanice relatywistycznej uogólnia się pojęcie pędu i pęd jest iloczynem czterywektora prędkości $\vec{u}$ i jego masy m_0

$$\vec{p} = m_0\vec{u} \ . \tag{V.15}$$

Korzystając ze wzorów (V.14) składowe czterowektora pędu możemy zapisać w następujący sposób

$$p_0 = mc \ , \tag{V.16}$$

$$p_i = m\upsilon_i \qquad (i = 1,2,3) \ . \tag{V.17}$$

Tu wielkość

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{V.18}$$

nazywa się *masą relatywistyczną cząstki*. Masa m_0 nazywa się *masą spoczynkową cząstki.*

Przez składowe wektor pędu relatywistycznego cząstki ma postać

$$\vec{p} = p_0 \cdot \vec{e}_0 + p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + p_3 \cdot \vec{e}_3 \ . \tag{V.19}$$

Korzystając ze wzorów (V.19) i (V.11) natychmiast otrzymujemy, że

$$(\vec{p} \cdot \vec{p}) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m_0^2c^2 \tag{V.20}$$

jest niezmiennikiem relatywistycznym.

Związek między masą i energią

Rozważmy teraz ruch relatywistyczny cząstki $(\upsilon \approx c)$ w pewnym układzie inercjalnym K. Można udowodnić, że dla zmiennych przestrzennych pędu równanie ruchu ma postać równania Newtona

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \ . \quad (i = 1,2,3) \tag{V.21}$$

Jednak, w mechanice relatywistycznej składowe przestrzenne pędu określają wzory (V.17). Praca elementarna siły $\vec{F}$ dla małego przesunięcia punktu materialnego o $d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot dt$ wynosi

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot \vec{F} dt = \vec{\upsilon} \cdot d\vec{p} \ . \tag{V.22}$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru (V.21): $d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$.

Biorąc pod uwagę wzory (V.17) i (V.22) można udowodnić (patrz załącznik *) na końcu tego wykładu), że praca elementarna wykonana przez działającą na punkt materialny siły $\vec{F}$, która jak wiemy jest równa przyrostowi energii kinetycznej punktu, wynosi

$$dE \equiv dA = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \equiv d\left(mc^2\right) \ . \tag{V.23}$$

Wynika stąd słynny wzór Einsteina określający związek między masą i energią cząstki

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{V.24}$$

W przypadku małych prędkości $(\beta = \upsilon / c << 1)$, korzystając z rozwinięcia $(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \beta^2/2 + \cdots$ w szereg potęgowy względem υ / c, otrzymujemy

$$E = m_0 c^2 (1 - \frac{\upsilon^2}{c^2})^{-1/2} = m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \cdots) \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2 \ . \tag{V.25}$$

Ze wzoru (V.25) wnioskujemy, że nawet nieruchoma cząstka $(\upsilon = 0)$ posiada energię $E_0 = m_0 c^2$. Energia ta nazywa się *energią spoczynkową* cząstki.

Biorąc pod uwagę, że $p_0 = mc$ i korzystając ze wzorów (V.20) i (V.24) znajdziemy związek między energią a trójwymiarowym pędem

$$E^2 = m^2c^4 = p_0^2c^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2 \ , \tag{V.26}$$

gdzie $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Ze wzoru (V.26) wynika, że jeżeli masa spoczynkowa cząstki jest równa zeru $(m_0 = 0)$, to energię i pęd cząstki określa związek

$$E = cp \ . \tag{V.27}$$

Zerową masę spoczynkową posiadają tylko cząstki poruszające się z prędkością światła. W nowoczesnej fizyce przykładem cząstki poruszającej się z prędkością światła jest cząstka światła – *foton*. Dla fotonu $p = h\nu / c$, gdzie ν - częstość fali świetlnej, h - stała Plancka, a zatem ze wzoru (V.27) otrzymujemy słynny wzór Plancka - Einsteina określający związek między częstością ν i energią E fotonu

$$E = h\nu \ . \tag{V.28}$$

---

*) Wyprowadzenie wzoru (V.23).

Oznaczając $x = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$ i korzystając ze wzoru $dx = -\frac{1}{2}(1-\beta^2)^{-3/2}(-2\beta d\beta)$ znajdujemy

$$d\vec{p} = d[\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}] = m_0 \cdot d(\vec{\upsilon} \cdot x) = m_0 \cdot \left(x \cdot d\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon} \cdot dx\right) =$$

$$= m_0 \cdot \left[\frac{d\vec{\upsilon}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \vec{\upsilon} \cdot \frac{\beta \cdot d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right] = m_0 \cdot \frac{(1-\beta^2)d\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}\beta d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \ . \tag{A.1}$$

Mnożąc (A.1) skalarnie przez $\vec{\upsilon}$ i biorąc pod uwagę, że $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \upsilon d\upsilon = d(\upsilon^2/2)$ otrzymujemy

$$dA = \vec{\upsilon} \cdot d\vec{p} = m_0 \cdot \frac{(1-\beta^2)(\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}) + (\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon})\beta d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} =$$

$$= m_0 \frac{\upsilon \cdot d\upsilon - \beta^2 d(\upsilon^2/2) + \upsilon^2 d(\beta^2/2)}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_0 \frac{\upsilon d\upsilon}{(1-\beta^2)^{3/2}} \ . \tag{A.2}$$

Oznaczając $y = \beta^2$ i korzystając ze wzoru

$$d(1-y)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1-y)^{-3/2}(-dy) = \frac{dy}{2(1-y)^{3/2}} \quad ,$$

znajdujemy ze wzoru (A.2)

$$dA = m_0 c^2 \frac{1}{2} \frac{d(y)}{(1-y)^{3/2}} = m_0 c^2 \cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = d(mc^2) \quad . \qquad \text{(A.3)}$$