

Wykład 4

Ruch w układach nieinercjalnych

Prawa Newtona są słuszne jedynie w układach inercjalnych. Ściśle mówiąc *układami inercjalnymi nazywamy takie układy odniesienia, które albo spoczywają, albo poruszają się ze stałą prędkością względem średnich pozycji gwiazd stałych*. Wybór układu odniesienia należy do nas i dotychczas rozważaliśmy ruch tylko w układach inercjalnych. W praktyce jednak często spotykamy się również z układami nieinercjalnymi. Nieinercjalnym układem jest na przykład układ odniesienia połączony z kabiną spadającej windy, albo układ odniesienia obracający się względem gwiazd stałych (na przykład układ związany z Ziemią). Dlatego żeby otrzymać równania ruchu w nieinercjalnych układach odniesienia musimy zbadać, jak przekształcają się współrzędne, prędkości i przyspieszenia przy przejściu od układu odniesienia inercjalnego do drugiego układu nieinercjalnego.

Siły bezwładności

Rozważmy dwa układy odniesienia: inercjalny układ K i nieinercjalny układ K' , który porusza się względem układu K z przyspieszeniem \vec{a}_0 . Niech położenie punktu materialnego o masie m określa w układzie K' wektor wodzący \vec{r}' , a położenie tego samego punktu materialnego w układzie K określa wektor wodzący \vec{r} (rys.IV.1). Wtedy możemy zapisać

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' , \quad (\text{IV.1})$$

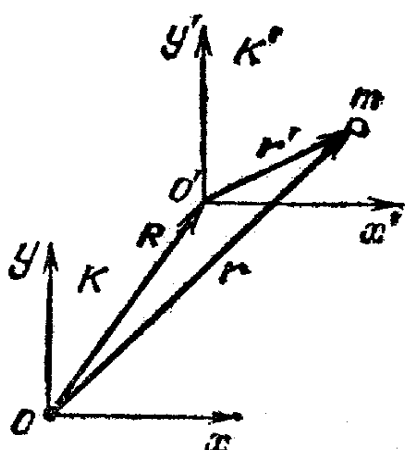
gdzie wektor \vec{R} określa położenie początku układu K' względem układu K .

Ze wzoru (IV.1) znajdujemy, że przyspieszenia punktu materialnego w układzie K oraz w układzie K' są związane ze sobą

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' . \quad (\text{IV.2})$$

Mnożąc równanie (IV.2) przez masę punktu materialnego m otrzymujemy

$$m\vec{a} = m\vec{a}_0 + m\vec{a}' . \quad (\text{IV.3})$$



Rys.IV.1

Względem układu inercjalnego K ruch punktu materialnego dany jest równaniem

$$m\vec{a} = \vec{F} . \quad (\text{IV.4})$$

Tu \vec{F} jest siłą rzeczywistą, która działa na punkt materialny w inercyjnym układzie K .

Podstawiając do (IV.4) zamiast $m\vec{a}$ wyrażenie (IV.3) otrzymujemy

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 . \quad (\text{IV.5})$$

Równanie (IV.5) jest to równanie ruchu punktu materialnego poruszającego się względem nieinercyjnego układu odniesienia K' . Ze wzoru (IV.5) wynika, że przyspieszenie punktu \vec{a}' względem układu nieinercyjnego K' powstaje jak w wyniku działania siły rzeczywistej \vec{F} pochodzącej od innych ciał fizycznych (albo pól fizycznych), a także w wyniku ruchu z przyspieszeniem układu K' względem układu K . Przyspieszenie punktu, związane z przyspieszeniem układu K' względem układu K , możemy traktować jako wynik działania siły pozornej

$$\vec{F}' = -m\vec{a}_0 , \quad (\text{IV.6})$$

dla której nie możemy wskazać źródła fizycznego w postaci ciała, albo pola.

Z uwzględnieniem (IV.6) równanie ruchu punktu materialnego w układzie nienercyjnym K' możemy zapisać w postaci

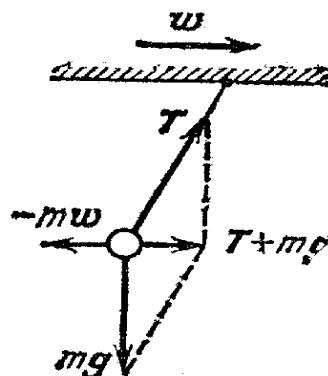
$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}' . \quad (\text{IV.7})$$

Równanie (IV.7) jest podobne do równania Newtona (IV.4) a zatem mechanikę klasyczną Newtona możemy stosować do nieinercyjnych układów odniesienia *pod warunkiem, że wprowadzimy siły nienewtonowskie (pозorne)*, które nazywamy *siłami bezwładności*. Siła bezwładności nie ma odpowiadającej jej siły reakcji, ponieważ nie jest związana z oddziaływaniem dwóch ciał. Inaczej mówiąc, siły bezwładności, w przeciwieństwie do sił oddziaływania rzeczywistych, nie spełniają trzeciej zasady Newtona. Jednak wprowadzenie sił pozornych daje nam możliwość na stosowanie mechaniki klasycznej do opisu zdarzeń, które chcemy rozważać w układach poruszających się z przyspieszeniem.

Zadanie 1. W wagonie pociągu stojącego na stacji wisi na nici kulka o masie m . W pewnej chwili pociąg zaczyna ruch z przyspieszeniem \vec{w} . Rozważyć, co się dzieje z kulką z punktu widzenia obserwatora znajdującego się w wagonie i z punktu widzenia obserwatora znajdującego się na powierzchni Ziemi.

Rozwiązanie: Gdy pociąg stoi na stacji obaj obserwatorzy widzą to samo: kulka wisi pionowo na nici. W tym przypadku na kulkę działa siła grawitacyjna $\vec{F}_g = m\vec{g}$ skierowana w dół, którą równoważy siła naprężenia nici skierowana do góry.

Gdy pociąg zaczyna ruch, koniec górny nici zaczyna poruszać się razem z wagonem, wskutek czego nić zostaje odchylona od położenia pionowego (rys.IV.2). To powoduje, że wektor siły naprężenia \vec{T} nici nie będzie równoważył siły grawitacyjnej \vec{F}_g a wypadkowa rzeczywista siła $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$ będzie skierowana w kierunku ruchu wagonu.



Rys.IV.2

Wskutek działania siły \vec{F} kulka zacznie poruszać się w kierunku ruchu pociągu. Odchylenie nici od pionowego położenia zatrzyma się, gdy wartość bezwzględna tej siły wypadkowej będzie wynosiła $|\vec{F}| = mw$. A zatem z punktu widzenia obserwatora znajdującego się na powierzchni Ziemi kulka porusza się w kierunku ruchu pociągu z przyspieszeniem \vec{w} .

Wagon jest układem nieinercyjnym, a zatem w wagonie na kulkę oprócz siły rzeczywistej $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{w}$ działa siła pozorna $\vec{F}_{in} = -m\vec{w}$. Siła pozorna $\vec{F}_{in} = -m\vec{w}$ równoważy siłę rzeczywistą $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{w}$. A zatem z punktu widzenia obserwatora znajdującego się w wagonie kulka pozostaje w spoczynku, ale nić zostaje odchylona od położenia pionowego.

Odśrodkowa siła bezwładności

Rozważmy teraz obracającą się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ karuzelę, na której do osi obrotu karuzeli jest przymocowana sprężyna z kulką na końcu (rys.IV.3). Jeżeli karuzela jest nieruchoma, sprężyna pozostaje w stanie nie zdeformowanym i ma długość l_0 . Obserwator stojący na Ziemi zauważy, że gdy karuzela zaczyna obracać się dookoła swojej osi, kulka rozciąga sprężynę do jakiejś długości R (rys.IV.3) i potem kulka zaczyna poruszać się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$. W stanie rozciągniętym sprężyny na kulkę działa siła sprężystości skierowana ku osi obrotu karuzeli (rys.IV.3)

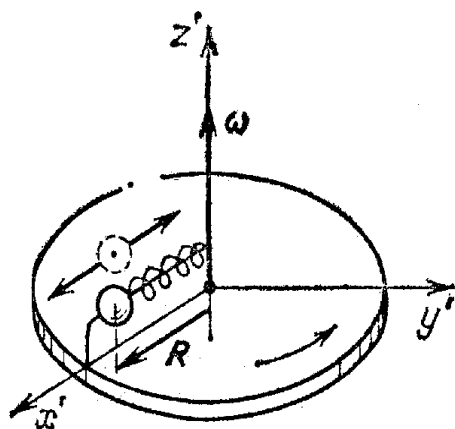
$$\vec{F}_{spr} = -k\left(1 - \frac{l_0}{R}\right) \cdot \vec{R} . \quad (IV.8)$$

Z rozważań dotyczących ruchu obrotowego przeprowadzonych na poprzednich wykładach wiemy, że ruch obrotowy po okręgu o promieniu R jest ruchem z przyspieszeniem dośrodkowym (patrz wzór (III.12))

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \cdot \vec{R} = -\left(\frac{v}{R}\right)^2 \cdot \vec{R} . \quad (IV.9)$$

A zatem, zgodnie z drugą zasadą Newtona przyspieszenie dośrodkowe \vec{a}_r jest spowodowane tym, że na kulkę działa siła sprężystości (IV.8)

$$\vec{F}_{spr} = m\vec{a}_r = -m\omega^2 \cdot \vec{R} . \quad (IV.10)$$



Rys.IV.3

Obserwator znajdujący się na karuzeli, czyli znajdujący się w nieinercyjnym układzie odniesienia stwierdzi, że kulka względem niego jest nieruchoma. Jeżeli ten obserwator studiował drugie prawo Newtona, to powie, że kuleczka znajduje się w spoczynku, bo działają na nią dwie równoważące siły: siła sprężystości oraz równoważąca ją *siła odśrodkowa*

$$\vec{F}_{ods} = m\omega^2 \cdot \vec{R} . \quad (IV.11)$$

Obserwator stojący na Ziemi nie zauważy działania żadnej siły odśrodkowej i rzeczywiście z jego punktu widzenia ta siła nie istnieje. A zatem siła odśrodkowa jest siłą pozorną i powstaje w układzie odniesienia K' tylko wskutek tego, że ten układ jest układem nieinercyjnym. Siła pozorna tak samo jak siła rzeczywista może wykonywać pracę i jeżeli nie byłoby sprężyny ($\vec{F}_{spr} = 0$), to siła odśrodkowa spowodowałaby, że kuleczka poruszałaby się w stronę krawędzi karuzeli.

Wprowadźmy wektor $\vec{\omega}$, który jest skierowany prostopadle do płaszczyzny obrotu, ma wartość bezwzględną ω i zwrot określony regułą prawoskrętnej śruby. Wtedy w postaci wektorowej siłą odśrodkową (IV.11) możemy zapisać wzorem

$$\vec{F}_{ods} = -m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{R}]] = -m[\vec{\omega} \times \vec{v}] . \quad (IV.12)$$

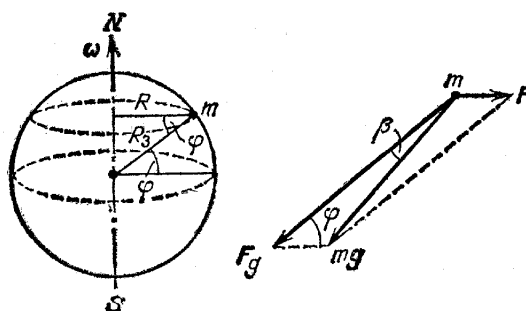
Istotnie, biorąc pod uwagę, że wektor \vec{v} jest prostopadły do wektora \vec{R} znajdujemy, że wektor $-\vec{\omega} \times \vec{v}$ ma wartość bezwzględną $m\omega^2 \cdot R$ i zwrot zgodny ze zwrotem wektora \vec{R} .

Siła odśrodkowa działająca w nieinercyjnym układzie odniesienia K' nie zależy od prędkości ciała w tym układzie (patrz wzór (IV.11), a zatem siła odśrodkowa działa tak samo na ciała nieruchome jak i ruchome w układzie K' .

Siła ciężkości i ciężar ciała

Wskutek rotacji Ziemi dookoła swej osi, na powierzchni Ziemi na dowolne ciało o masie m oprócz siły grawitacyjnej \vec{F}_g skierowanej ku środkowi Ziemi, działa siła odśrodkowa (na rys.IV.4 ta siła oznaczona jest jako F). Z rys.IV.4 widać, że wartość bezwzględna siły odśrodkowej jest równa

$$F_{ods} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_z \cdot \cos\varphi \quad . \quad (IV.13)$$



Rys.IV.4

Wypadkowa siła, która działa na ciało o masie m będzie równa sumie wektorowej siły grawitacyjnej \vec{F}_g i siły odśrodkowej (rys.IV.4). Właśnie tą siłę nazywamy ciężarem ciała i oznaczamy jako $m\vec{g}$. Z prawego rysunku IV.4 widać, że

$$mg \cdot \sin\beta = F \cdot \sin\varphi \quad . \quad (IV.14)$$

Skąd

$$\sin\beta = \frac{F \cdot \sin\varphi}{mg} \quad . \quad (IV.15)$$

Po podstawieniu do (IV.15) wzoru (IV.13) ostatecznie mamy

$$\sin\beta = \frac{m\omega^2 R_z \cdot \cos\varphi \sin\varphi}{mg} = \frac{\omega^2 R_z}{2g} \cdot \sin 2\varphi \quad . \quad (IV.16)$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi$.

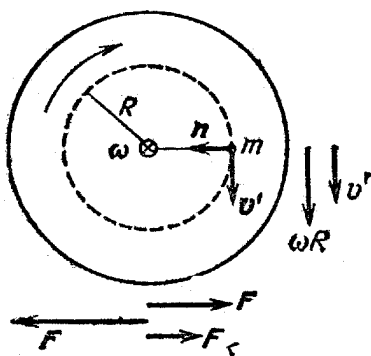
Po podstawieniu do (IV.16) $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$, $R_Z = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ otrzymujemy

$$\sin \beta = 0.0018 \cdot \sin 2\varphi \quad . \quad (\text{IV.17})$$

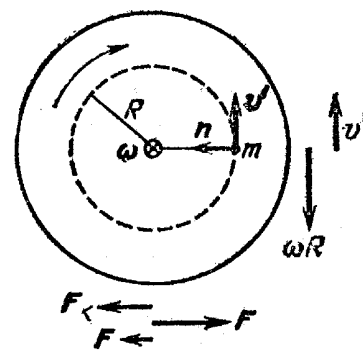
Z tego wzoru wynika, że siła ciężkości pokrywa się z siłą przyciągania ziemskiego tylko na biegunach Ziemi, gdy siła odśrodkowa znika. Na równiku różnica między siłą ciężkości i siłą grawitacyjną jest największa, ponieważ tutaj te siły mają przeciwny zwrot. Ta różnica wynosi $mg - m\omega^2 R = mg(1 - \omega^2 R/g) = mg(1 - 0.36 \cdot 10^{-2})$. A więc nawet na równiku siła ciężkości różni się od siły przyciągania ziemskiego tylko o 0.35 %.

Siłą Coriolisa

Jeżeli w układzie nieinercyjnym K' ciało o masie m porusza się z prędkością \vec{v}' , to na ciało zaczyna działać dodatkowa siła pozorna (siła bezwładności), która nazywa się *siłą Coriolisa*. Dlatego, żeby wyprowadzić wzór na siłę Coriolisa rozważmy układ nieinercyjny K' obracający się ze stałą prędkością kątową ω dookoła osi Oz układu inercyjnego K i niech w tym układzie znajduje się karuzela poruszająca się ze stałą prędkością kątową ω' (względem układu K') dookoła osi $Oz' // Oz$. Układ odniesienia związany z karuzelą będziemy oznaczali jako układ K'' .



Rys.IV.5a



Rys.IV.5b

Jeżeli w układzie K'' znajduje się ciało o masie m , to z punktu widzenia obserwatora znajdującego się w układzie K' na ciało działa siła dośrodkowa

$$\vec{F}'_{dos} = m\vec{a}' \quad . \quad (\text{IV.18})$$

gdzie $\vec{a}' = -\omega'^2 \vec{R}$ jest przyspieszeniem ciała w układzie K' , które pokrywa się z przyspieszeniem dośrodkowym.

Natomiast obserwator znajdujący się w inercjalnym układzie K widzi, że ciało o masie m obraca się dookoła osi Oz ze stałą prędkością kątową $(\omega + \omega')$, a zatem ten obserwator stwierdzi, że na ciało musi działać siła dośrodkowa

$$\vec{F}_{dos} = -m(\omega + \omega')^2 \cdot \vec{R} = -m\omega^2 \vec{R} - m\omega'^2 \vec{R} - 2m\omega\omega' \vec{R} . \quad (IV.19)$$

Wprowadzając jednostkowy wektor $\vec{n} = -\vec{R}/R$ i uwzględniając iż $v' = \omega' R$ zapiszmy wzór (IV.19) w postaci

$$\vec{F}_{dos} = -m\omega^2 \vec{R} - m\omega'^2 \vec{R} + 2m\omega v' \cdot \vec{n} . \quad (IV.20)$$

Biorąc pod uwagę wzór (IV.18), wzór (IV.20) możemy zapisać w postaci

$$\vec{F}_{dos} = -m\omega^2 \vec{R} + m\vec{a}' + 2m\omega v' \cdot \vec{n} . \quad (IV.21)$$

W układzie inercjalnym K istnieją tylko siły rzeczywiste, a zatem dla siły dośrodkowej (IV.21) musi być źródło realne. W przypadku kulki na sprężynie źródłem tej siły jest sprężyna.

Oznaczając tą siłą realną jako $\vec{F} \equiv \vec{F}_{dos}$ ze wzoru (IV.21) otrzymujemy

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2 \vec{R} - 2m\omega v' \cdot \vec{n} . \quad (IV.22)$$

Równanie (IV.22) jest równaniem ruchu ciała o masie m w nieinercyjnym układzie odniesienia K' w przypadku gdy ciało porusza się z prędkością v' . W tym równaniu, oprócz siły rzeczywistej \vec{F} występują jeszcze dwie dodatkowe pozorne siły bezwładności skierowane wzdłuż wektora \vec{R} .

Porównując drugi człon w (IV.22) ze wzorem (IV.11) widzimy, że ten człon opisuje siłę odśrodkową, działanie której zauważy obserwator w układzie K' . Ten człon nie zależy od prędkości ciała v' w układzie K' . Trzeci człon w (IV.22) nosi nazwę *siły Coriolisa* i ta pozorna siła działa w układzie K' tylko na ruchome ciała. W postaci wektorowej siła Coriolisa może być zapisana jako

$$\vec{F}_C = 2m \cdot [\vec{v}' \times \vec{\omega}] . \quad (IV.23)$$

Istotnie, wartość bezwzględna iloczynu wektorowego jest równa $|\vec{v}' \times \vec{\omega}| = v' \omega$, a zwrot zależy od tego jak skierowany jest wektor \vec{v}' względem wektora $\vec{\omega}$. Jeżeli wektor prędkości

\vec{v}' ma zwrot pokazany na rys.IV.5a, to siła Coriolisa jest skierowana wzdłuż wektora \vec{R} . Jeżeli wektor prędkości \vec{v}' ma zwrot przeciwny, to siła Coriolisa jest skierowana ku osi obrotu układu K' , czyli wzdłuż wektora \vec{n} .

Wzór (IV.23) na siłę Coriolisa otrzymaliśmy zakładając, że wektor \vec{v}' jest prostopadły do wektora $\vec{\omega}$. Okazuje się, że ten wzór jest słuszny też w ogólnym przypadku, kiedy wzajemna orientacja wektorów \vec{v}' i $\vec{\omega}$ jest dowolna.

Ze wzoru (IV.23) wynika, że siła Coriolisa znika w trzech przypadkach:

- gdy punkt materialny jest sztywno związany z układem K' ($\vec{v}' = 0$);
- gdy układ K' porusza się ruchem postępowym względem układu K ($\vec{\omega} = 0$);
- gdy punkt materialny porusza się w układzie K' z prędkością \vec{v}' równoległą do prędkości kątowej $\vec{\omega}$ ($\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$).

W 1851 r. Foucault po raz pierwszy wykazał, że jeżeli obserwować drgania wahadła w wybranym na powierzchni Ziemi nieruchomym układzie odniesienia, to płaszczyzna, w której zachodzą drgania wahadła obraca się względem tego nieruchomego układu odniesienia. W ten sposób można doświadczalnie udowodnić, znajdując się na powierzchni Ziemi, że Ziemia obraca się wokół swojej osi.

Podsumowując możemy powiedzieć, że przy rozwiązywaniu zagadnień mechanicznych istnieją dwa możliwe sposoby: (1) możemy wybrać inercjalny układ odniesienia i rozważyć jedynie siły rzeczywiste działające na ciało, tzn. siły wywierane przez konkretne ciało albo pole fizyczne (grawitacyjne, elektromagnetyczne itd.) lub (2) możemy przejść do nieinercjalnego układu odniesienia i rozważyć nie tylko siły rzeczywiste, lecz również odpowiednio zdefiniowane pozorne siły bezwładności, tzn. siły, które nie są związane z żadnym z ciał (albo z polem) znajdującym się w jego otoczeniu. Siły pozorne powstające w układzie nieinercjalnym wydają się obserwatorowi znajdującemu się w tym układzie zupełnie realne, mimo, że nie potrafi on wskazać żadnego źródła fizycznego (ciała albo pola) tej siły. W układzie inercjalnym siły pozorne znikają. Wybór jednej z możliwości rozważania zagadnień mechanicznych i w ogóle zagadnień fizycznych jest jedynie kwestią wygody.