Wykład 3

Kinematyka i dynamika ruchu obrotowego punktu materialnego

Ruch po okręgu

Rozważmy ruch punktu materialnego po okręgu. W tym przypadku położenie punktu A na okręgu możemy również określić za pomocą współrzędnych x, y, z w wybranym dowolnie układzie kartezjańskim. Jednak dogodniej jest określić położenie punktu A na okręgu za pomocą kąta φ (rys.III.1). *Chwilową prędkością kątową* albo *kołową* nazywa się pochodną kąta φ względem czasu t

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \equiv \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi} \ . \qquad \text{(III.1)}$$

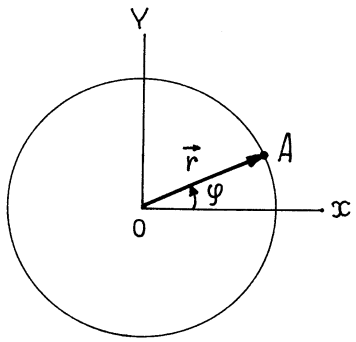
Udowodnimy, że jeżeli $\omega = \omega_0 = const$, czyli prędkość kątowa jest stała wtedy

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \ . \qquad \text{(III.2)}$$

Tu φ_0 - wartość kąta φ w chwili początkowej $t = t_0 = 0$.

Istotnie po podstawieniu (III.2) do wzoru (III.1) otrzymujemy:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\omega_0 (t + \Delta t) + \varphi_0] - [\omega_0 t + \varphi_0]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega_0 \cdot \Delta t}{\Delta t} = \omega_0 = const \ . \qquad \text{(III.3)}$$



Rys.III.1. Ruch obrotowy

Ruch po okręgu ze stałą prędkością kątową nazywamy *ruchem jednostajnym obrotowym*. Czas, po upływie, którego punkt materialny wykonuje jeden obrót nazywamy *okresem ruchu obrotowego*. Okres ruchu obrotowego oznaczamy dużą literą T. Korzystając z definicji okresu, ze wzoru (III.2) otrzymujemy ($t_0 = 0$):

$$\varphi(t_0 + T) \equiv 2\pi + \varphi_0 = \omega_0 \cdot T + \varphi_0 \ .$$

Skąd mamy

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \ . \qquad \text{(III.4)}$$

Wielkość odwrotna do okresu

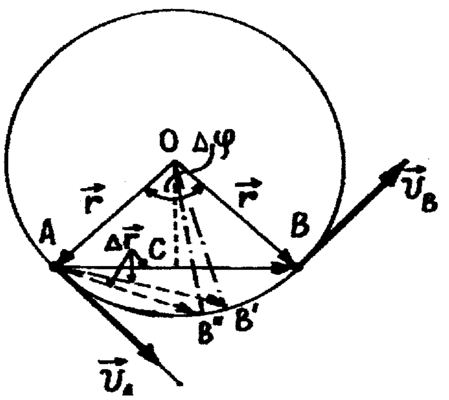
$$\nu_0 = \frac{1}{T} \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} \quad . \tag{III.5}$$

nazywa się *częstością ruchu obrotowego*. Łatwo wyjaśnić sens fizyczny częstości ν_0. W czasie równym okresowi $t = T$ punkt materialny wykonuje jeden obrót. A zatem w jednostce czasu punkt materialny wykonuje $\nu_0 = 1/T$ obrotów. Na przykład, jeżeli $T = 1/100$ sekundy, to w czasie jednej setnej sekundy punkt wykonuje jeden obrót, a w czasie 1 sekundy punkt materialny wykonuje 100 obrotów. Więc częstość $\nu_0 = 1/T$ jest liczbą obrotów punktu materialnego w jednostce czasu. Częstość mierzymy w hercach (Hz). 1 Hz = 1 s^{-1}.

W ogólnym przypadku prędkość kątowa ω może zależeć od czasu. Zmiany prędkości kątowej w czasie określa *chwilowe przyspieszenie kątowe*:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega} \quad . \tag{III.6}$$

Znajdziemy związek między chwilową prędkością liniową i chwilową prędkością kątową, określoną wzorem (III.1).



Rys.III.2.

Niech w chwili początkowej $t = t_0 = 0$ punkt materialny znajduje się na okręgu w punkcie A, a w chwili $t = \Delta t$ - w punkcie B (rys.III.2). Jeżeli rozważamy bardzo mały czas $t = \Delta t$, długość łuku AB jest w przybliżeniu równa długości cięciwy AB. Przybliżenie to jest tym lepiej spełnione, im bardziej zmniejszmy odcinek czasowy Δt. Wtedy dla chwilowej liniowej prędkości punktu możemy zapisać

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t} \quad . \tag{III.7}$$

Z rys.III.2 widać, że

$$AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \approx 2 \cdot r \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = r \cdot \Delta\varphi \quad . \tag{III.8}$$

Tu skorzystaliśmy z przybliżenia, że dla małych kątów $\sin\alpha \approx \alpha$.

Po podstawieniu (III.8) do (III.7) znajdujemy

$$\upsilon = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega \ . \tag{III.9}$$

Ze wzoru (III.9) otrzymujemy, że w przypadku ruchu punktu materialnego po okręgu ze stałą prędkością kątową $\omega_0 = const$, bezwzględna wartość prędkości liniowej $\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}|$ jest też stała.

Z rys.III.2 wynika, że gdy $\Delta t \to 0$ wektor przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ dąży do stycznej w punkcie A. A zatem prędkość chwilowa w punkcie A jest wektorem stycznym do krzywej w tym punkcie, czyli jest prostopadła do wektora wodzącego punktu $\vec{r}$. Z rys.III.2 wynika również, że prędkość liniowa $\vec{\upsilon}$ punktu materialnego poruszającego się po okręgu ciągle zmienia swój kierunek. A zatem ruch po okręgu jest ruchem z przyspieszeniem.

Znajdziemy teraz przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się po okręgu, w przypadku, gdy prędkość linowa $|\vec{\upsilon}| = const$. Rozważmy znów dwa punkty A i B (rys.III.3). Z podobieństwa trójkątów AOB i DBE (rys.III.3) wynika, że wektor $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_B - \vec{\upsilon}_A$, który pokrywa się z wektorem $\overrightarrow{DE}$ ma długość

$$\begin{aligned} DE &= 2 \cdot DF = 2 \cdot \upsilon \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \\ &\approx 2 \cdot \upsilon \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = \upsilon \cdot \Delta\varphi \end{aligned} \ . \tag{III.10}$$

A zatem dla długości wektora przyspieszenia możemy zapisać:

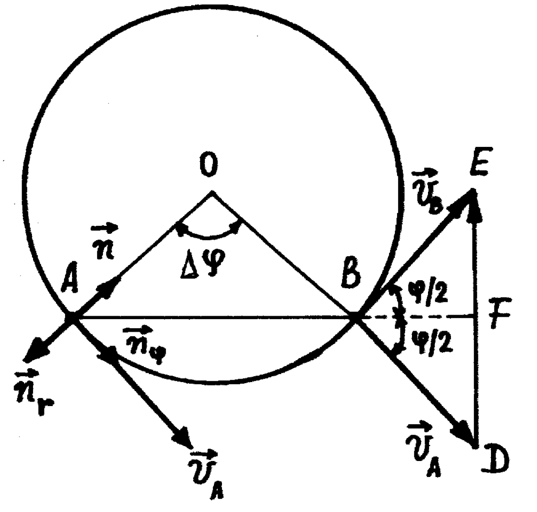
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{DE}{\Delta t} = \upsilon \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \upsilon \cdot \omega \ . \tag{III.11}$$

Biorąc pod uwagę wzór (III.9), ze wzoru (III.10) mamy

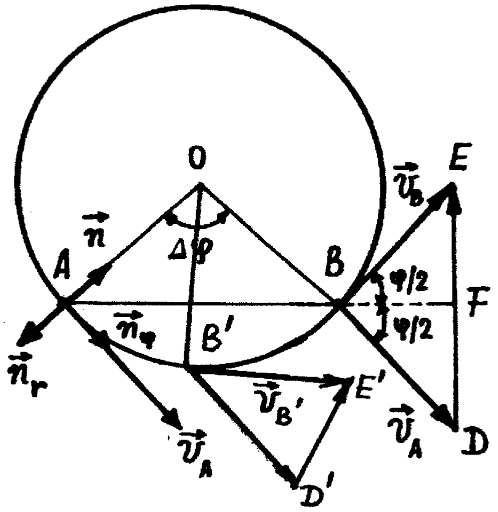
$$a = \upsilon \cdot \omega = \frac{\upsilon^2}{r} \ . \tag{III.12}$$

Kierunek wektora przyspieszenia (III.12) pokrywa się z kierunkiem wektora $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_B - \vec{\upsilon}_A = \overrightarrow{DE}$, który przy $\Delta t \to 0$ jest prostopadły do wektora prędkości $\vec{\upsilon}$ w punkcie

A (rys.III.4). A zatem wektor przyspieszenia $\vec{a}$ punktu materialnego jest równoległy do wektora wodzącego $\vec{r}$, ale zwrot wektora $\vec{a}$ jest przeciwny do zwrotu wektora $\vec{r}$. Dlatego przyspieszenie to nosi nazwę *przyspieszenia radialnego* lub *przyspieszenia dośrodkowego* i oznacza się $\vec{a}_r$.



Rys.III.3.



Rys.III.4.

Podsumowując możemy powiedzieć, że ruch obrotowy punktu materialnego po okręgu ze stałą prędkością odbywa się ze stałym dośrodkowym przyspieszeniem skierowanym ku środkowi okręgu. Bez tego dośrodkowego przyspieszenia ciało (punkt materialny) poruszałoby się wzdłuż wektora prędkości $\vec{\upsilon}$. Istnienie dośrodkowego przyspieszenia $\vec{a}_r$ powoduje, że ciało ciągle „spada" na środek okręgu a poruszający się punkt materialny pozostaje na okręgu.

Moment pędu i moment siły. Równanie ruchu obrotowego. Prawo zachowania momentu pędu.

Ważnymi charakterystykami ruchu obrotowego ciała materialnego są moment pędu oraz moment siły. *Moment pędu* punktu materialnego względem początku układu współrzędnych określa wzór

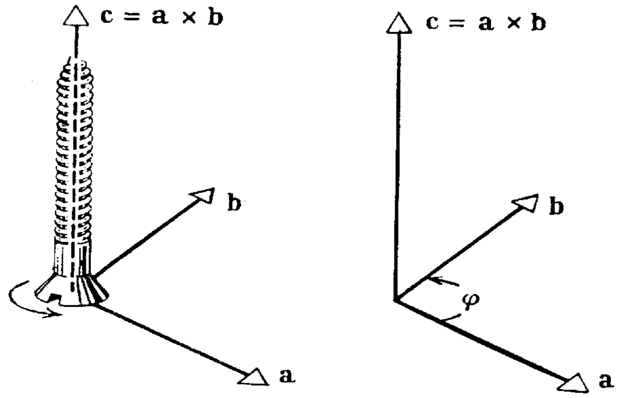
$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \ . \qquad \text{(III.13)}$$

Tu wielkość $[\vec{r} \times \vec{p}]$ oznacza tak zwany iloczyn wektorowy wektorów $\vec{r}$ oraz $\vec{p}$. W matematyce *iloczynem wektorowym* dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, oznaczanym jako $\vec{a} \times \vec{b}$ (albo

[$\vec{a}\times\vec{b}$]) nazywamy wektor $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez te dwa wektory (rys.III.5). Wartość bezwzględna wektora $\vec{c}$ określa równanie

$$c=|\vec{c}|=ab\cdot\sin\varphi \ , \tag{III.14}$$

gdzie φ jest mniejszym kątem zawartym między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zwrot wektora $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ określa reguła prawoskrętnej śruby: kierunek poruszania się śruby prawoskrętnej (od wektora $\vec{a}$ do wektora $\vec{b}$) określa zwrot wektora $\vec{c}$ (rys.III.5).



Rys.III.5.

Różniczkując wzór (III.13) względem czasu otrzymujemy następujące równanie ruchu dla wektora momentu pędu

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}]+[\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}]=[\vec{r}\times\vec{F}] \ . \tag{III.15}$$

Tu uwzględniliśmy, że $d\vec{p}/dt=\vec{F}$ (druga zasada Newtona), a iloczyn wektorowy $[d\vec{r}/dt\times\vec{p}]=\vec{0}$, ponieważ wektor $\vec{\upsilon}=d\vec{r}/dt\equiv\vec{p}/m$ jest równoległy do wektora pędu $\vec{p}$.

Wielkość

$$\vec{M}=[\vec{r}\times\vec{F}] \tag{III.16}$$

nazywamy *momentem siły.*

Po podstawieniu (III.16) do wzoru (III.15) otrzymujemy równanie określające zmiany w czasie momentu pędu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad . \tag{III.17}$$

Równanie (III.17) jest podstawowym równaniem opisującym ruch obrotowy i nazywa się *równaniem ruchu obrotowego*.

Ruch w polu sił centralnych

Siłą centralną nazywamy taką siłę, którą możemy zapisać w postaci

$$\vec{F} = k \cdot \vec{r} \quad , \tag{III.18}$$

gdzie $k = f(x, y, z)$ jest skalarną funkcją współrzędnych punktu, a wektor wodzący $\vec{r}$ określa położenie punktu materialnego względem centrum siły centralnej. Przykładem siły centralnej jest siła grawitacyjna działająca na Ziemie ze strony Słońca (centrum siły) oraz siła Coulomba działająca w atomie na ładunek elektryczny elektronu ze strony ładunku jądra atomowego.

Dla siły centralnej tor punktu materialnego znajduje się zawsze w płaszczyźnie. Udowodnimy to twierdzenie.

Najpierw ze wzoru (III.16) wynika, że jeżeli siła działająca na punkt materialny jest siłą centralną, to

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = k[\vec{r} \times \vec{r}] = 0 \quad ,$$

skąd

$$\vec{L} = const \quad . \tag{III.19}$$

A zatem moment pędu siły centralnej jest wielkością zachowaną

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = const \quad . \tag{III.20}$$

Mnożąc (III.20) skalarnie przez $\vec{r}$ otrzymujemy

$$(\vec{L} \cdot \vec{r}) = 0 \quad . \tag{III.21}$$

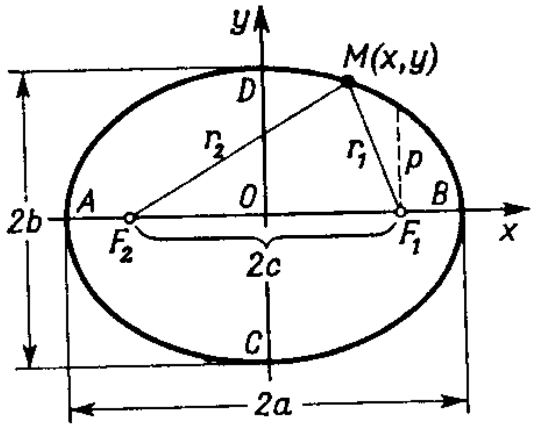
Istotnie, wektor $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, zgodnie z określeniem iloczynu wektorowego, jest wektorem prostopadłym do wektora wodzącego $\vec{r}$, czyli kąt α między wektorem $\vec{L}$ i wektorem $\vec{r}$ jest równy 90^0. A zatem iloczyn skalarny $(\vec{L} \cdot \vec{r}) = \left|\vec{L}\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot \cos 90^0 = 0$, ponieważ $\cos 90^0 = 0$.

Z określenia momentu pędu i iloczynu wektorowego wynika, że wektor $\vec{r}$ jest zawsze prostopadły do $\vec{L}$. Ponieważ, zgodnie z (III.19) dla sił centralnych wektor $\vec{L}$, ma stały kierunek, to więc wektor $\vec{r}(t)$ będzie zawsze znajdował się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\vec{L}$.

Prawa Keplera. Prawa rządzące ruchem planet

Przykładem siły centralnej jak mówiliśmy wyżej jest siła grawitacyjna. Prawa, które rządzą ruchem planet, ustanowił Kepler analizując doświadczalne dane dotyczące obserwacji ruchu planet w latach 1609-1619. Te prawa mówią, że:

1. Każda planeta porusza się po elipsie, w której w jednym z ognisk znajduje się Słońce.



Rys.III.6. Elipsa

Elipsą nazywamy taką zamkniętą krzywą na płaszczyźnie, dla której suma odległości od dwóch punktów F_1 i F_2, które nazywamy *ogniskami*, do dowolnego punktu M jest wielkością stałą (rys.III.6):

$$F_1M + F_2M = 2a \ . \qquad \text{(III.22)}$$

Równanie elipsy ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \qquad \text{(III.23)}$$

2. Prędkość polowa względem Słońca każdej planety jest stała (oczywiście dla różnych planet prędkości polowe będą różne).

3. *Iloraz kwadratów okresów (T) obiegu poszczególnych planet i sześcianów wielkiej półosi (a) jest stały i dla wszystkich planet jednakowy*

$$\frac{T^2}{a^3} = const \ . \qquad \text{(III.24)}$$

Udowodnienie prawa pierwszego i trzeciego wymaga trochę zaawansowanej matematyki. Udowodnienie prawa drugiego Keplera jest dość proste.

Już wiemy, że w przypadku siły centralnej wektor momentu pędu $\vec{L}$ jest prostopadły do płaszczyzny, w której znajdują się wektory $\vec{r}$ i $\vec{\upsilon}$. Prędkość liniowa υ jest związana z prędkością kątową wzorem (III.9), a zatem dla wartości bezwzględnej wektora momentu pędu otrzymujemy

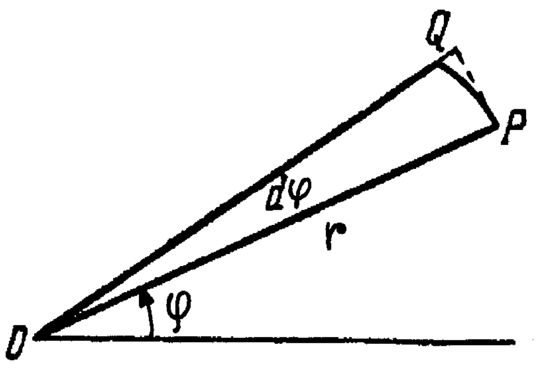
$$\left|\vec{L}\right| \equiv L = rp = rm\upsilon = m\omega \cdot r^2 = m\dot{\varphi} \cdot r^2 \ . \qquad \text{(III.25)}$$

Tu $\dot{\varphi} = d\varphi / dt = \omega$ - prędkość kątowa.

Z uwzględnieniem wzoru (III.25) prawo zachowania momentu pędu dla sił centralnych przyjmuje postać

$$L = mr^2\dot{\varphi} = const \ . \qquad \text{(III.26)}$$

Z prawa zachowania (III.26) i wynika drugie prawo Keplera. Rozważmy punkt materialny, który za okres czasu $t, t+dt$ przechodzi od punktu P do punktu Q (rys.III.7). Jeżeli dt jest bardzo małym to pole powierzchni prostokątnego trójkąta OPQ będzie polem, które zakreśla wektor $\vec{r}$ w chwili dt. Pole tego trójkąta wynosi:



Rys.III.7.

$$d\sigma = \frac{1}{2}(OP)\cdot(PQ) = \frac{1}{2}r[r \cdot \sin(d\varphi)] \ .$$

Dla małych odcinków czasowych dt, a zatem małych kątów $d\varphi$ możemy skorzystać ze wzoru $\sin(d\varphi) \cong d\varphi$ i zapisać

$$d\sigma \cong \frac{1}{2}r^2 d\varphi \ .$$

Skąd wynika, że

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \ . \qquad \text{(III.27)}$$

Wielkość $d\sigma/dt$ nazywamy *prędkością polową* (*albo wycinkową, sektorową*).

Przez prędkość polową wzór (III.26) możemy zapisać w postaci

$$L = 2m\frac{d\sigma}{dt} = const \ . \qquad \text{(III.28)}$$

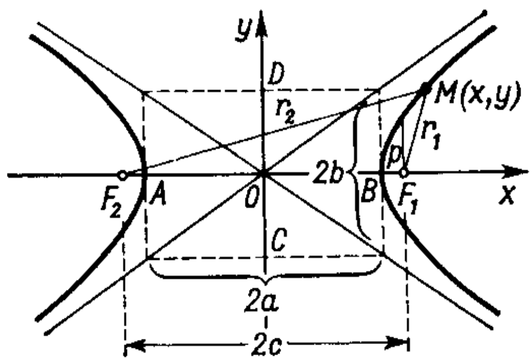
Ze wzoru (III.28) wynika, że dla sił centralnych, *prędkość polowa (sektorowa) jest wielkością stałą (zachowaną)*. Innymi słowy - wektor wodzący punktu zakreśla równe pola w tych samych odcinkach czasu.

Nie wszystkie ciała niebieski poruszają się po elipsom. Na przykład komety poruszają się po *hiperbole* lub *parabole* (określenie tych krzywych podajemy niżej).

Jeżeli całkowita energia ciała niebieskiego $E > 0$, to torem planety będzie *jedna z gałęzi hiperboli* (rys.III.8). W tym przypadku energia kinetyczna ciała jest większa niż wartość bezwzględna jego energii potencjalną: $T > |U|$.

Hiperbolą nazywamy taką nie zamkniętą krzywą na płaszczyźnie, dla której bezwzględna różnica odległości od dwóch punktów F_1 i F_2, które nazywamy *ogniskami*, do dowolnego punktu M jest wielkością stałą (rys.III.8):

$$F_1M - F_2M = 2a \quad . \tag{III.29}$$



Rys.III.8. Hiperbola

Równanie hiperboli ma postać:

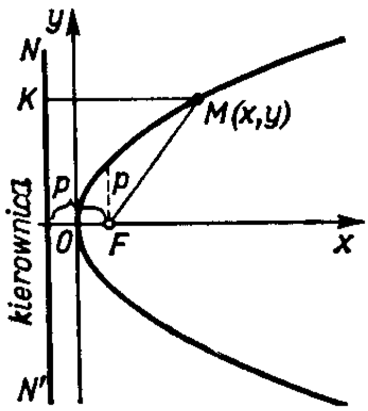
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \tag{III.30}$$

W przypadku, gdy $E = 0$ orbitą ciała będzie *parabola* (rys.III.9)**.** *Parabolą* nazywamy taką nie zamkniętą krzywą na płaszczyźnie, dla której odległości dowolnego punktu M od punktu F, który nazywamy *ogniskiem*, i od prostej, którą nazywamy *kierownicą*, są równe siebie (rys.III.9):

$$FM = KM \quad . \tag{III.31}$$

Równanie paraboli ma postać:

$$y^2 = 2px \quad . \tag{III.32}$$



Rys.III.9. Parabola