Wykład 2

Mechanika Newtona

Dynamika jest nauką, która zajmuję się ruchem ciał z uwzględnieniem sił, które działają na ciało. Podstawą mechaniki klasycznej są trzy *doświadczalne* zasady, które po raz pierwszy zostały sformułowane przez Newtona w 1687 roku.

Pierwsza zasada dynamiki. Inercjalne układy odniesienia. Siły rzeczywiste i pozorne.

Pierwsza zasada dynamiki albo zasada bezwładności brzmi: *Istnieją takie układy odniesienia, w których punkt materialny znajduje się w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego, dopóki siły działające na ten punkt nie zmienią tego stanu.* Siła tutaj, która może zmienić ruch bezwładny punktu materialnego, jest miarą oddziaływania ciała z drugimi ciałami materialnymi albo z polami fizycznymi. Siły takie nazywamy *siłami rzeczywistymi*. Dla sił rzeczywistych zawsze możemy wskazać źródło fizyczne (ciało albo pole fizyczne) tej siły.

Z pierwszej zasady Newtona wynika, że jeżeli na *punkt materialny* nie działa żadna siła, to punkt materialny porusza się ze stałą prędkością wzdłuż prostej a wektor wodzący tego punktu jest funkcją liniową czasu (patrz wzór (I.11))

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{\upsilon} \cdot t \ . \tag{II.1}$$

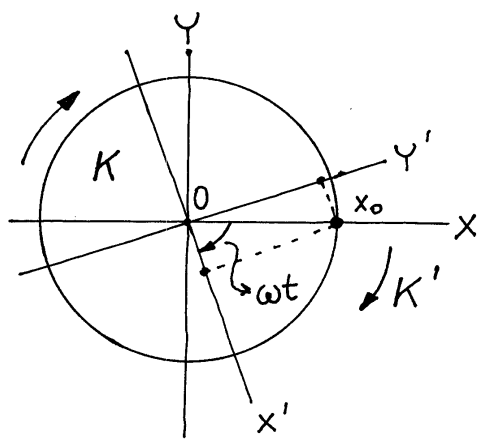
Tu $\vec{r_0}$ - wektor położenia punktu materialnego w początkowej chwili $t = 0$, a $\vec{\upsilon}$ - niezależny od czasu wektor jego prędkości w wybranym układzie odniesienia.

Łatwo sprawdzić, że wzór (II.1) jest słuszny nie dla wszystkich układów odniesienia. Jako przykład, rozważmy układ odniesienia K i niech w tym układzie na punkt materialny A $(x = x_0, y = z = 0)$ nie działa żadna siła i punkt znajduje się w spoczynku, tj. $\vec{\upsilon} = 0$. Rozpatrzmy teraz ten sam punkt materialny A w układzie odniesienia $K^/$, który obraca się względem układu K dookoła osi Oz ze stałą prędkością kątową ω („karuzela"). Względem układu odniesienia $K^/$ zależność współrzędnych punktu A od czasu opisuje wzór

$$x^/ = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad y^/ = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad z^/ = z \ . \tag{II.2}$$

Z porównania (II.1) i (II.2) widzimy, że w układzie odniesienia $K^/$ punkt materialny porusza się z przyspieszeniem, chociaż żadna siła rzeczywista nie działa na ten punkt. Więc w układzie odniesienia $K^/$ pierwsza zasada Newtona nie jest słuszna.

Układy odniesienia, w których ruch odosobnionego punktu materialnego (czyli punktu, na który nie działają żadne siły rzeczywiste) opisuje równanie (II.1) nazywamy *układami inercjalnymi*. Odpowiednio, układy odniesienia, w których nie jest spełniona pierwsza zasada Newtona nazywamy *układami nieinercjalnymi*.



Rys.II.1. Określenie położenia punktu materialnego w dwóch układach odniesienia K i K'.

W układach nieinercjalnych, jak zobaczymy później, na punkt materialny zaczynają działać siły pozorne *albo, tak zwane, siły bezwładności*. Przykładem takiej siły, jak wiemy z fizyki elementarnej, jest siła Coriolisa. Dla sił pozornych, które powstają w nieinercjalnych układach odniesienia nie istnieje źródło fizyczne (ciało albo pole fizyczne) tych sił. Chociaż skutki działania tych sił na ciała fizyczne są takie same, jak skutki działania sił rzeczywistych (ciała poruszają się, deformują się itp.).

Druga zasada dynamiki. Siła, masa, pęd. Zasada zachowania pędu.

Z pierwszej zasady mechaniki wynika, że jeżeli na punkt materialny działa siła, punkt zmienia swoją prędkość, czyli zaczyna poruszać się z przyspieszeniem. Z doświadczeń wynika, że kierunek przyspieszenia albo kierunek zmiany prędkości punktu materialnego pokrywa się z kierunkiem działania siły. A zatem możemy zapisać, że przyspieszenie, którego doznaje punkt wskutek działania siły jest wprost proporcjonalna do działającej na niego siły:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \propto \vec{F} \ . \qquad \text{(II.3)}$$

Z doświadczeń również wynika, że na przykład dwie małe jednakowe kule, jedna z drewna, a druga z żelaza, doznają różnych przyspieszeń, gdy działa na nie taka sama siła. A mianowicie kula z drewna doznaje większego przyspieszenia niż kula z żelaza. Dlatego, żeby uwzględnić ten fakt, zapiszmy wzór (II.3) w postaci

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F} \ . \qquad \text{(II.4)}$$

We wzorze (II.4) wielkość m nosi nazwę *masy bezwładnej punktu materialnego (ciała).* Masa ciała jest wewnętrzną charakterystyką ciała i zależy od tego, z czego jest zbudowane to ciało. Pod wpływem pewnej siły określona zmiana prędkości ciała mającego większą masę zachodzi w dłuższym czasie niż w przypadku ciała o mniejszej masie (ze wzoru (II.4) wynika, że $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{F} \cdot (\Delta t/m)$).

Z doświadczeń wynika, że jeżeli mamy do czynienia z ruchami ciał o prędkościach znacznie mniejszych niż prędkość światła c ($c \cong 3\ 10^8$ *m/s*) masa bezwładna ciała jest stała. Jednak, jeżeli ciało zaczyna poruszać się z prędkością porównywalną z prędkością światła, masa zaczyna rosnąc dążąc do nieskończoności. Ruchami ciał z takimi dużymi prędkościami zajmuje się *szczególna teoria względności Einsteina* i o tym będzie mowa później. Masę bezwładną ciała mierzymy za pomocą wagi równoramiennej, korzystając ze wzorców. W układzie SI jednostką masy jest kilogram (*kg*) - pewien cylinder platynowo-irydowy.

Oprócz masy bezwładnej ciała istnieje *masa ważka* ciała, którą mierzymy dynamometrem. Masa ważka ciała jest miarą oddziaływania grawitacyjnego ciała i występuje we wzorze opisującym prawo powszechnego ciążenia Newtona. Z doświadczeń oraz ogólnej teorii względności Einsteina wynika, że *masa bezwładna równa się masie ważkiej.*

Ważną rolę w fizyce odgrywa wielkość fizyczna, która nosi nazwę *pędu*. Pędem ciała nazywamy iloczyn jego masy i prędkości:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \ . \tag{II.5}$$

Druga zasada dynamiki albo zasada ruchu brzmi: *Zmiana pędu punktu materialnego w układzie inercjalnym jest proporcjonalna względem siły działającej na punkt i ma kierunek prostej, wzdłuż której ta siła działa*:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ . \tag{II.6}$$

Wzór (II.6) jest słuszny w mechanice nierelatywistycznej jak i w mechanice relatywistycznej. Jednak, ponieważ w mechanice nierelatywistycznej $(\upsilon << c)$ masa ciała jest stała w czasie ruchu, wzór (II.6) możemy zapisać w postaci

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \ . \tag{II.7}$$

W układzie SI jednostką siły jest niuton (1 *N*). $1N = 1kg \cdot 1m/s^2$, czyli siła w 1 niuton nadaje masie w 1 *kg* przyspieszenie 1 *m/s²*.

W ogólnym przypadku, na ciało może działać równocześnie kilka sił: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$. Z <u>*doświadczeń wynika*</u>, że pod wpływem tych sił ciało porusza się tak, jakby działała nań jedna siła $\vec{F}$, która jest równa sumie wektorowej wszystkich działających na ciało sil:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad . \tag{II.8}$$

Równanie (II.8) wyraża bardzo ważną zasadę w fizyce - *zasadę superpozycji sił*. Ta zasada też jest jedną z podstawowych zasad w fizyce i *słuszność tej zasady wynika tylko z doświadczenia*.

Z drugiej zasady Newtona (II.6) wynika, że jeżeli suma sił działających na punkt materialny jest równa zeru ($\vec{F} = 0$), to

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad , \tag{II.9}$$

skąd

$$\vec{p} = const \quad . \tag{II.10}$$

Wzór (II.1) wyraża tak zwane *prawo zachowania pędu*: jeżeli suma sił działających na punkt materialny jest równa zeru, to pęd punktu materialnego jest stałym niezależnym od czasu.

Trzecia zasada dynamiki

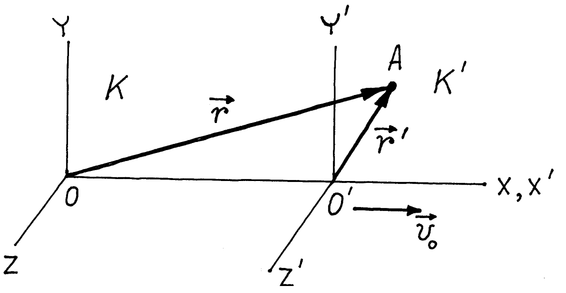
Trzecia zasada dynamiki albo zasada akcji i reakcji brzmi. *Siły, jakimi dwa punkty materialne działają jeden na drugi, są sobie równe co do wartości bezwzględnej; siły te skierowane są wzdłuż prostej łączącej dwa punkty i mają przeciwny zwrot:*

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad . \tag{II.11}$$

Tu $\vec{F}_{21}$ jest siłą, która działa ze strony drugiego punktu na pierwszy punkt. $\vec{F}_{12}$ - siła działająca na drugi punkt, wywołana przez punkt pierwszy. Trzecia zasada Newtona dotyczy siły oddziaływania między dwoma punktami materialnymi, czyli dotyczy tylko sił rzeczywistych. Dla sił bezwładności ta zasada nie jest słuszna.

Zasada względności Galileusza.

Udowodnimy, że układ odniesienia będzie również układem inercjalnym, jeżeli porusza się on względem drugiego inercjalnego układu odniesienia bez przyspieszenia.



Rys.II.2. Przekształcenie Galileusza.

Rozważmy dwa układy współrzędnych K i $K^{/}$ (rys.II.2) i niech układ K jest inercjalnym układem odniesienia, a układ $K^{/}$ porusza się względem układu K ze stałą prędkością $\vec{\upsilon}_0$. Załóżmy, że w początkowej chwili $t=0$ początki O i $O^{/}$ układów odniesienia K i $K^{/}$ pokrywają się i zegarki układów wskazują ten sam czas.

Niech w chwili t poruszający się punkt materialny znajduje się w przestrzeni w punkcie A. Z rys.II.2 wynika, że między wektorami wodzącymi punktu w układach odniesienia K i $K^{/}$ istnieje związek

$$\vec{r}=\vec{r}^{\,/}+\overrightarrow{OO^{/}}=\vec{r}^{\,/}+\vec{\upsilon}_0\cdot t, \qquad \text{(II.12)}$$

W newtonowskiej (nierelatywistycznej) mechanice przyjmuje się, że czas nosi absolutny charakter i nie zależy od wybranego układu odniesienia, a zatem czas t we wzorze (II.12) możemy zamienić na czas $t^{/}$ (czas w układzie odniesienia $K^{/}$) i zapisać:

$$\vec{r}=\vec{r}^{\,/}+\vec{\upsilon}_0\cdot t^{/}, \qquad \text{(II.13)}$$

Prędkość punktu materialnego, z określenia, jest pochodną względem czasu od wektora wodzącego, a zatem biorąc pod uwagę wzór (II.13) otrzymujemy:

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d(\vec{r}^{\,/}+\vec{\upsilon}_0\cdot t^{/})}{dt^{/}}=\frac{d\vec{r}^{\,/}}{dt^{/}}+\vec{\upsilon}_0=\vec{\upsilon}^{/}+\vec{\upsilon}_0 . \qquad \text{(II.14)}$$

Wzór (II.14) wyraża *prawo dodawania prędkości w mechanice Newtona*.

Przyspieszenie punktu materialnego, z określenia, jest pochodną względem czasu od wektora prędkości, a zatem biorąc pod uwagę wzór (II.14) znajdujemy:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d(\vec{\upsilon}^{/}+\vec{\upsilon}_0)}{dt^{/}}=\frac{d\vec{\upsilon}^{/}}{dt^{/}}+0=\vec{a}^{/} . \qquad \text{(II.15)}$$

Umówiliśmy, że układ odniesienia K jest inercjalnym układem, a zatem jeżeli w tym układzie odniesienia na punkt materialny nie działa żadna siła, przyspieszenie tego punktu $\vec{a}=0$ a prędkość $\vec{\upsilon}=const$. Z drugiej strony ze wzorów (II.14) i (II.15) znajdujemy, że w układzie odniesienia $K^{/}$ ten sam punkt materialny ma też przyspieszenie $\vec{a}^{/}=0$ i prędkość $\vec{\upsilon}^{/}=\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_0=const$. A więc układ $K^{/}$ również jest układem inercjalnym, ponieważ spełnia pierwszą zasadę Newtona.

Ze wzoru (II.15) oraz drugiej zasady Newtona (wzór(II.7)) wynika jeszcze jeden ważny wniosek: we wszystkich inercjalnych układach odniesienia siły rzeczywiste działające na punkt materialny są takie same:

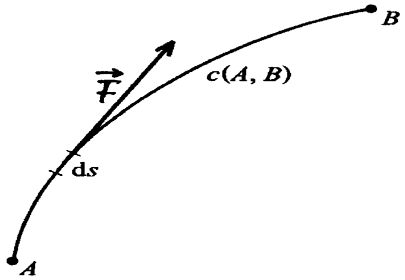
$$\vec{F}=\frac{\vec{a}}{m}=\frac{\vec{a}^{/}}{m}=\vec{F}^{/} \quad . \tag{II.16}$$

Oznacza to, że postać równania ruchu będzie taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Ta identyczność równań ruchu względem przekształcenia (II.13) jest treścią *zasady względności Galileusza*. Transformacja (II.13) nosi nazwę *transformacji Galileusza*.

Praca sił a energia kinetyczna

Rozważmy ruch punktu materialnego pod wpływem siły $\vec{F}$. Niech wskutek działania tej siły punkt przemieszcza się wzdłuż krzywej $c(AB)$ (rys.II.3). Podzielmy tą krzywą na bardzo małe przedziały $\Delta\vec{s}_i$, takie, aby siła $\vec{F}$ miała prawie stałą wartość i kierunek w tym przedziale. *Pracą siły* $\vec{F}_i$ podczas przemieszczenia punktu materialnego o $\Delta\vec{s}_i$ nazywa się iloczyn skalarny dwóch wektorów $\vec{F}_i$ i $\Delta\vec{s}_i$:

$$A_i=(\vec{F}_i\cdot\Delta\vec{s}_i)=\left|\vec{F}_i\right|\cdot\left|\Delta\vec{s}_i\right|\cdot\cos\alpha_i \quad . \tag{II.17}$$



Rys.II.3. Praca siły $\vec{F}$

Tu spotykamy się z pojęciem iloczynu skalarnego dwóch wektorów. *Iloczynem skalarnym dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest nazywany skalar równy iloczynowi wartości bezwzględnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, oraz cosinusa mniejszego kąta φ między tymi wektorami*

$$c=(\vec{a}\cdot\vec{b})=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi \quad . \tag{II.18}$$

Jeżeli zapisać wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ przez ich współrzędne ($\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$, $\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z$), to iloczyn skalarny tych dwóch wektorów możemy zapisać w postaci

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)\cdot(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) =$$
$$= a_x b_x(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x) + a_x b_y(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y) + a_x b_z(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z) +$$
$$+ a_y b_x(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x) + a_y b_y(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y) + a_y b_z(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z) +$$
$$+ a_z b_x(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x) + a_z b_y(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_y) + a_z b_z(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z) \;. \qquad \text{(II.19)}$$

Ponieważ

$$(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x) = (\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y) = (\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z) = 1\cdot 1\cdot\cos(0^0) = 1 \;,$$

$$(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y) = (\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x) = (\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z) = (\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x) = (\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z) = (\vec{e}_z\cdot\vec{e}_y) = 1\cdot 1\cdot\cos(90^0) = 0 \;,$$

ze wzoru (II.19) otrzymujemy

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \;. \qquad \text{(II.20)}$$

Wróćmy teraz do wzoru (II.17) określającego pracę siły $\vec{F}_i$. Gdy $\Delta\vec{s}_i \to 0$ będziemy zamiast skończonej wielkości przemieszczenia $\Delta\vec{s}_i$ pisać $d\vec{s}_i$, co oznacza nieskończenie małą wielkość przemieszczenia $d\vec{s}_i$. W matematyce nieskończenie małą zmianę funkcji nazywają *różniczką. Różniczką ($du(x)$) funkcji $u(x)$ w danym punkcie x nazywamy iloczyn pochodnej (du/dx) przez nieskończenie mały przyrost dx zmiennej x*

$$du = \frac{du}{dx}\cdot dx \;.$$

Przez różniczkę $d\vec{s}_i$ wzór (II.17) przyjmuje postać

$$A_i = (\vec{F}_i\cdot d\vec{s}_i) \;. \qquad \text{(II.21)}$$

Skorzystamy teraz z drugiej zasady Newtona i zapiszemy wzór (II.21) w postaci

$$A_i = (\vec{F}_i\cdot d\vec{s}_i) = m\cdot\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}\cdot d\vec{s}_i \;. \qquad \text{(II.22)}$$

Biorąc pod uwagę, że $d\vec{s}_i = \left(d\vec{s}_i / dt\right)\cdot dt \equiv \vec{\upsilon}_i\cdot dt$, ze wzoru (II.22) znajdujemy

$$A_i = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \cdot d\vec{s}_i = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \cdot dt \cdot \vec{\upsilon}_i = m \cdot \vec{\upsilon}_i \cdot d\vec{\upsilon}_i \ . \qquad \text{(II.23)}$$

Uwzględniając wzór (II.20), zapiszmy wzór (II.22) w postaci

$$A_i = m \cdot \vec{\upsilon}_i \cdot d\vec{\upsilon}_i = m \cdot \left(\upsilon_{ix} d\upsilon_{ix} + \upsilon_{iy} d\upsilon_{iy} + \upsilon_{iz} d\upsilon_{iz} \right) \ . \qquad \text{(II.24)}$$

W matematyce udowodniono, że dla dowolnej funkcji $u(x)$

$$\frac{d}{dx} u^n = n \cdot u^{n-1} . \qquad \text{(II.25)}$$

Skąd dla różniczki $d(u^n)$ znajdujemy

$$d(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot dx \ . \qquad \text{(II.26)}$$

Korzystając ze wzoru (II.26), mamy:

$$\upsilon_{ix} d\upsilon_{ix} = \frac{d(\upsilon_{ix}^2)}{2}, \quad \upsilon_{iy} d\upsilon_{iy} = \frac{d(\upsilon_{iy}^2)}{2}, \quad \upsilon_{iz} d\upsilon_{iz} = \frac{d(\upsilon_{iz}^2)}{2},$$

a zatem

$$A_i = \frac{m}{2} \cdot d\left(\upsilon_{ix}^2 + \upsilon_{iy}^2 + \upsilon_{iz}^2 \right) = \frac{m}{2} d(\upsilon_i^2) = d\left(\frac{m\upsilon_i^2}{2} \right) . \qquad \text{(II.27)}$$

Wzór (II.27) określa pracę siły $\vec{F}_i$ podczas przemieszczenia punktu materialnego o nieskończenie małe przemieszczenie $d\vec{s}_i$. Okazuje się, że wzór (II.27) jest słuszny również w przypadku skończonych przemieszczeń oraz w przypadku gdy siła działająca na punkt materialny zależy od współrzędnych (x, y, z). A więc praca, którą wykonuje siła $\vec{F}(x, y, z)$ podczas przemieszczenia ciała od punktu A do punktu B (rys.II.3) jest równa

$$A = \Delta\left(\frac{m\upsilon^2}{2} \right) = \frac{m\upsilon_B^2}{2} - \frac{m\upsilon_A^2}{2} \ . \qquad \text{(II.28)}$$

Tu υ_B - prędkość ciała w punkcie B, natomiast υ_A jest prędkością ciała w punkcie A.

Jeżeli wprowadźmy wielkość

$$T = \frac{1}{2} m\vec{\upsilon}^2 = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \ , \qquad \text{(II.29)}$$

wzór (II.28) możemy zapisać w postaci

$$A = T_B - T_A \ . \tag{II.30}$$

Wielkość $T = m\upsilon^2/2$ nazywa się *energią kinetyczną punktu materialnego*. A zatem praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ jest równa różnicy energii kinetycznych w końcowym B i początkowym A punkcie.

Jednostki energii kinetycznej i pracy są takie same. W układzie jednostek SI pracę i energię kinetyczną mierzymy w *dżulach*. 1 J (dżul)= 1 N (niuton) m (metr).

Praca może być dodatnia albo ujemna. Jeżeli praca jest dodatnia, to zgodnie z (II.30) prędkość ciała w końcowym punkcie B będzie większa niż prędkość ciała w początkowym punkcie A. A zatem, w przypadku dodatniej pracy ciało porusza się z przyspieszeniem. W przypadku ujemnej pracy prędkość ciała w końcowym punkcie B będzie mniejsza niż prędkość ciała w początkowym punkcie A, a więc ruch ciała zachodzi z opóźnieniem.

Jeżeli na punkt materialny nie działa żadna siła z zewnątrz, to, zgodnie z pierwszą zasadą Newtona, prędkość ciała pozostaję stałą, a zatem

$$T_B = T_A \ . \tag{II.31}$$

Każda praca jest wykonywana w jakimś czasie. Przedział

$$P = \lim_{\Delta t_i} \frac{\Delta A_i}{\Delta t_i} = \frac{dA}{dt} \tag{II.32}$$

nazywa się *mocą* chwilową źródła siły, która wykonuje tą pracę. W układzie SI jednostką mocy jest *wat*. 1 W (wat) = 1 J (dżul)/ 1 s (sekunda).

Siły zachowawcze i niezachowawcze

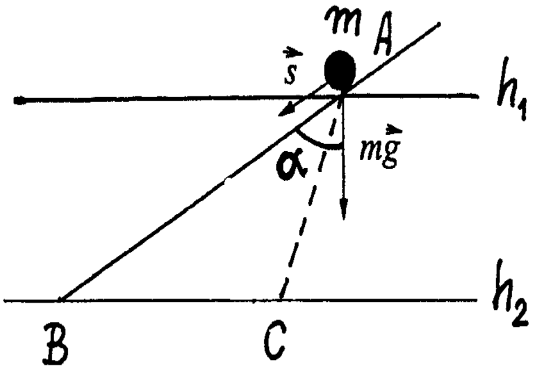
Wszystkie istniejące siły możemy podzielić na siły zachowawcze i siły nie zachowawcze. *Siła jest zachowawcza, jeżeli praca, którą wykonuję ta siła nad punktem materialnym poruszającym się po zamkniętemu toru równa się zeru*. Udowodnimy, że siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą.

Obliczmy najpierw pracę siły grawitacyjnej po przemieszczeniu punktu materialnego o masie m z wysokości h_1 do wysokości h_2 wzdłuż prostej AB (rys. II.4). Podzielmy odcinek prostej AB na n małych odcinków. W każdym punkcie prostej AB na punkt materialny działa stała skierowana w dół siła

$$\vec{F} = m\vec{g} \ . \tag{II.33}$$

A zatem praca, którą wykonuje siła grawitacyjna na i – tym odcinku prostej AB wynosi

$$A_i = \vec{F} \cdot d\vec{s}_i = mg \cdot \left| \overrightarrow{ds_i} \right| \cdot \cos\alpha \ , \qquad (II.34)$$



Rys.II.4. Obliczanie pracy siły grawitacyjnej

gdzie α jest katem między siła $\vec{F}$ i wektorem $d\vec{s}_i = \overrightarrow{AB} / n$.

Całkowita praca siły grawitacyjnej będzie równa sumie prac (II.34), czyli

$$A_{AB} = \sum_{i=1}^{n} A_i = mg \cdot \left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \cos\alpha \ . \qquad (II.35)$$

Ponieważ

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \cos\alpha = (h_1 - h_2) \ , \qquad (II.36)$$

ze wzoru (II.35) otrzymujemy

$$A_{AB} = mg(h_1 - h_2) \ . \qquad (II.37)$$

Ze wzoru (II.37) wynika, że praca siły grawitacyjnej zależy tylko od różnicy wysokości, a zatem praca siły grawitacyjnej wzdłuż prostej AC (rys.II.4) będzie taką samą, jak praca wzdłuż prostej AB.

Gdy rozważamy odwrotny ruch punktu materialnego z wysokości h_2 do wysokości h_1 wzdłuż prostej BA praca siły grawitacyjnej wynosi:

$$A_{BA} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{BA} = mg \cdot \left| \overrightarrow{BA} \right| \cdot \cos(180^0 - \alpha) = -mg \cdot \left| \overrightarrow{BA} \right| \cdot \cos\alpha \ . \qquad (II.38)$$

Tu skorzystaliśmy ze wzoru $\cos(180^0 - \alpha) = \cos(180^0) \cdot \cos\alpha + \sin(180^0) \cdot \sin\alpha = -\cos\alpha$.

Uwzględniając wzór (II.36) otrzymujemy

$$A_{BA} = -mg(h_1 - h_2) = -A_{AB} \ . \qquad (II.39)$$

Jeżeli rozważmy teraz zamkniętą krzywą o dowolnym kształcie zawierającym punkty A i B, to zgodnie z (II.39) *praca, którą wykonuję siła grawitacyjna nad punktem materialnym poruszającym się po zamkniętemu toru równa się zeru*

$$A = A_{AB} + A_{BA} = A_{AB} - A_{AB} = 0 \ . \qquad (II.40)$$

A zatem udowodniliśmy, że siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą. Przykładem siły zachowawczej jest również siła Coulomba, określająca oddziaływanie dwóch ładunków elektrycznych.

Dla sił niezachowawczych praca nad punktem materialnym poruszającym się wzdłuż zamkniętego toru nie jest równa zeru. Przykładem siły nie zachowawczej jest *siła tarcia*. W przypadku siły niezachowawczej *praca, którą wykonuje ta siła nad ciałem poruszającym się pomiędzy dwoma punktami zależy od kształtu drogi łączącej te punkty.*

Siły potencjalne. Energia potencjalna. Prawo zachowania energii.

Ze wzoru (II.37) wynika, że dla tego żeby obliczyć pracę, którą wykonuje siła grawitacyjna wystarczy wiedzieć skalarną funkcję

$$U(h) = mgh \quad . \tag{II.41}$$

Wtedy praca siły grawitacyjnej nad punktem materialnym poruszającym się od punktu A do punktu B wynosi

$$A_{AB} = U(h_1) - U(h_2) \quad . \tag{II.42}$$

Siły, dla których możemy wprowadzić skalarną funkcję $U(x, y, z)$ nazywamy *siłami potencjalnymi.* Skalarna funkcja $U(x, y, z)$ nosi nazwę *energii potencjalnej*.

Dla sił potencjalnych *praca, którą wykonuje siła potencjalna nad ciałem poruszającym się pomiędzy dwoma punktami* A *i* B *nie zależy od kształtu drogi łączącej te punkty a zależy jedynie od wartości energii potencjalnej w tych punktach*

$$A_{AB} = U_A - U_B \quad , \tag{II.43}$$

Wyżej udowodniliśmy, że praca dowolnej siły (potencjalnej albo niepotencjalnej) nad punktem materialnym poruszającym się pomiędzy dwoma punktami A i B określa wzór (II.30). Z drugiej strony dla siły potencjalnej tą samą pracę określa wzór (II.43).

Z porównania (II.30) i (II.43) otrzymujemy

$$T_B - T_A = U_A - U_B \quad . \tag{II.44}$$

Skąd mamy

$$E = T_A + U_A = T_B + U_B = const \quad . \tag{II.45}$$

Wzór (II.45) wyraża jedno z podstawowych praw w fizyce - *prawo zachowania całkowitej energii* punktu materialnego.