Wykład 10

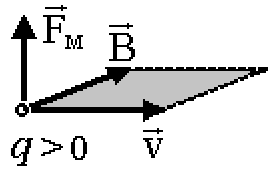
Pole magnetyczne

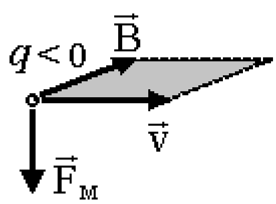
Pole magnetyczne. Wektor indukcji magnetycznej. Siła Lorentza

Do XIX - go wieku pod nazwą magnetyzm rozumieli zbiór zjawisk, związanych głownie ze zdolnością pewnych minerałów (magnetyków) przyciągać kawałki żelaza. W starożytności było zauważone, że Ziemia też posiada właściwości magnetyczne i właśnie to odkrycie dało możliwość zbudować kompas.

W roku 1820 Oersted jako pierwszy odkrył, że prąd płynący w przewodzie może wywoływać efekty magnetyczne podobne do efektów które wywołują minerały magnetyczne. Na przykład prąd płynący w przewodniku może zmieniać orientację igły kompasu. Jeżeli wyłączymy prąd, przewodnik traci swoje właściwości magnetyczne. Prąd elektryczny jest związany z uporządkowanym ruchem ładunków, a zatem łatwo dojść do wniosku, że zjawiska magnetyczne są związane z ruchem (makroskopowym, uporządkowanym) ładunków elektrycznych. Ampère na podstawie podobnych rozumowań doszedł do wniosku, że właściwości magnetyczne minerałów magnetycznych muszą również być związane z wewnętrznymi prądami molekularnymi, które istnieją w tych minerałach.

Ponieważ przewodnik z prądem wykazuje swoje właściwości magnetyczne w dowolnym punkcie z otoczenia przewodnika, mówimy, że prąd elektryczny wytwarza w otaczającej przewodnik przestrzeni pole magnetyczne . Podstawową charakterystyką pola magnetycznego stanowi *wektor indukcji magnetycznej* $\vec{B}$. Ten wektor, podobnie jak wektor natężenia pola elektrycznego, możemy określić mierząc siłę z którą pole magnetyczne działa na przykład na igłę kompasu. Okazało się, że pole magnetyczne nie działa na nieruchome ładunki elektryczne.





Z doświadczeń natomiast wynika, że na ładunek elektryczny q poruszający się z prędkością $\vec{v}$ działa siła

$$\vec{F}_m = q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] \ . \qquad \text{(X.1)}$$

Siła $\vec{F}_m$ jest zawsze skierowana prostopadle do prędkości $\vec{v}$ ładunku, a więc 1) ta siła nie może zmienić wielkości bezwzględnej prędkości ładunku, a jedynie zmienia jej kierunek; 2) siła $\vec{F}_m$ nie wykonuje pracy ponieważ $\vec{F}_m \cdot d\vec{r} = 0$.

W układzie SI jednostką miary indukcji magnetycznej B jest *tesla* (T): $T = N \cdot s / m \cdot C$ (albo $T = N / m \cdot A$).

Jeżeli w miejscu gdzie znajduje się ładunek, oprócz pola magnetycznego istnieje pole elektryczne o natężeniu $\vec{E}$, siła z którą działają na ładunek pole elektryczne i pole magnetyczne jest równa

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q \cdot [\vec{\upsilon} \times \vec{B}] \ . \tag{X.2}$$

Siłę $\vec{F}_L$ nazywamy *siłą Lorentza*. Pierwszy człon we wzorze (X.2) ($\vec{F}_E = q\vec{E}$) nazywa się *elektryczną składową siły Lorentza*, drugi wyraz zaś ($\vec{F}_m = q \cdot [\vec{\upsilon} \times \vec{B}]$) nazywa się *magnetyczną składową siły Lorentza*.

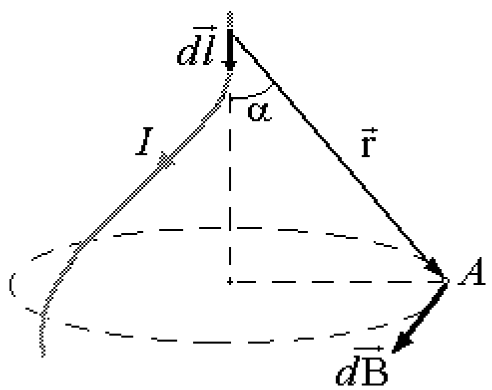
Pole magnetyczne poruszającego się ładunki elektrycznego. Prawo Biota - Savarta

Z doświadczeń wynika, że poruszający się z prędkością $\vec{\upsilon}$ ($\upsilon << c$, gdzie c - prędkość światła w próżni) ładunek elektryczny q wytwarza w dowolnym punkcie $A(x, y, z)$ pole magnetyczne o indukcji

$$\vec{B}(x, y, z) = k^{/} \frac{q[\vec{\upsilon} \times \vec{r}]}{r^3} \ . \tag{X.3}$$

Tu $\vec{r}$ jest wektorem określającym położenie punktu $A(x, y, z)$. Początek wektora $\vec{r}$ pokrywa się z punktem, gdzie znajduje się ładunek q. Współczynnik $k^{/}$ zależy od stosowego układu jednostek.

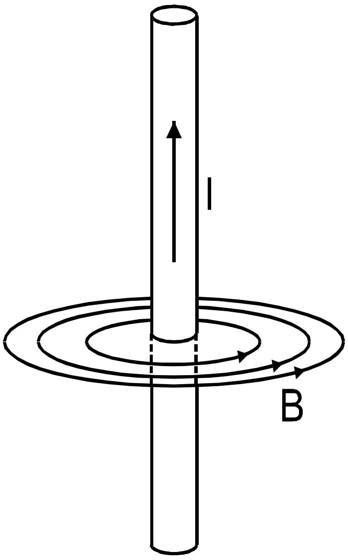
Korzystając ze wzoru (X.3) można obliczyć indukcję pola magnetycznego $d\vec{B}$, wytwarzanego przez mały odcinek dl przewodnika, w którym płynie prąd I:



$$d\vec{B}(x, y, z) = k^{/} \frac{I \cdot [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \ . \tag{X.4}$$

Wzór (X.4) nosi nazwę *prawa Biota - Savarta*. Prawo Biota - Sawarta daje możliwość znaleźć indukcję $d\vec{B}$ pola magnetycznego prądu, płynącego w przewodniku o skończonych wymiarach i dowolnym kształcie.

Pole magnetyczne możemy, podobnie do pola elektrycznego, prezentować graficznie rysując tzw. *linie pola magnetycznego* czyli linie wektora indukcji magnetycznej. Na rysunku niżej pokazane są linie pola magnetycznego wokół prostoliniowego przewodnika z prądem. Linie pola $\vec{B}$ wytwarzanego przez przewodnik są zamkniętymi współśrodkowymi okręgami w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika.



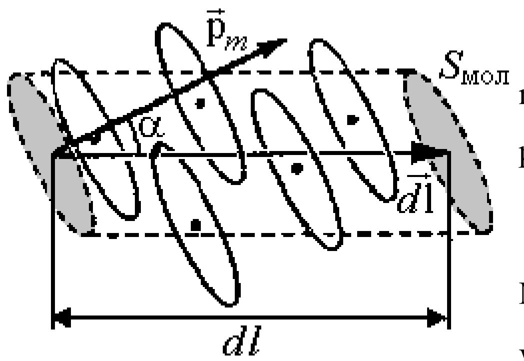
Wektor $\vec{B}$ jest styczny do tych linii pola w każdym punkcie. To, że linie pola $\vec{B}$ są zamknięte stanowi fundamentalną różnicę między polem magnetycznym i elektrycznym, którego linie zaczynają się i kończą na ładunkach. Zamkniętość linii pola magnetycznego jest wynikiem faktu, że *w przyrodzie nie występują "ładunki" magnetyczne*.

Wartość bezwzględną indukcji pola magnetycznego nieskończenie długiego przewodnika okresla wzór

$$B = k^{/} \frac{2I}{R} \quad . \qquad \text{(X.5)}$$

Pole magnetyczne w materii. Namagnesowanie. Wektor natężenia pola magnetycznego

W nauce o magnetyzmie ważną rolę odegrała hipoteza Ampère, według której *właściwości magnetyczne materii są uwarunkowane zamkniętymi prądami płynącymi w cząstkach materii - atomach, molekułach, czyli momentami magnetycznymi cząstek..*



Momentem magnetycznym p_m obwodu z prądem nazywa się iloczyn prądu I płynącego w obwodzie i pola S powierzchni tego obwodu

$$p_m = IS \quad . \qquad \text{(X.6)}$$

Moment magnetyczny jest wielkością wektorową. Wektor $\vec{p}_m$ jest prostopadły do płaszczyzny obwodu z prądem a kierunek $\vec{p}_m$ i kierunek prądu związane między sobą regułą prawoskrętnego śruba:

$$\vec{p}_m = IS \cdot \vec{n} \quad . \qquad \text{(X.7)}$$

W zewnętrznym polu magnetycznym $\vec{B}_0$ wszystkie ciała uzyskują *makroskopowy moment magnetyczny*. Mówimy, że ciało zostało *namagnesowane*. Indukowany makroskopowy moment magnetyczny ciała wytwarza we wnętrzu ciała dodatkowe pole magnetyczne $\vec{B}^{/}$, które razem z polem zewnętrznym $\vec{B}_0$ tworzą w substancji wypadkowe pole magnetyczne $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' . \qquad (X.8)$$

Źródłem pola $\vec{B}_0$ są prądy zewnętrzne (prądy swobodne), czyli prądy, które płyną w przewodnikach umieszczonych na zewnątrz ciała. Natomiast źródłem pola dodatkowego $\vec{B}'$ są prądy molekularne (prądy związane), które tworzą makroskopowy moment magnetyczny substancji.

W celu scharakteryzowania stanu namagnesowania ciała wprowadzamy wielkość fizyczną, zwaną *namagnesowaniem* J:

$$\vec{J} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_{im}}{\Delta V}\right), \qquad (X.9)$$

gdzie N oznacza liczbę cząstek, zawartych w objętości ΔV, a $\vec{p}_{im}$ - moment magnetyczny $i-$ tej cząstki z objętości ΔV.

Wektor pola magnetycznego $\vec{B}'$, które wytwarzają prądy molekularne jest wprost proporcjonalny do wektora namagnesowania J

$$\vec{B}' = \mu_0\vec{J} . \qquad (X.10)$$

Tu $\mu_0 = 4\pi \cdot k'$ - przenikalność magnetyczna próżni.

Ważną rolę w teorii elektromagnetyzmu odgrywa wektor *natężenia pola magnetycznego*

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} . \qquad (X.11)$$

Z doświadczeń wynika, że dla wielu substancji namagnesowanie jest wprost proporcjonalne do $\vec{B}$ ($\vec{J} \propto \vec{B}$), a zatem, zgodnie z (X.11), J jest wprost proporcjonalne do wektora $\vec{H}$:

$$\vec{J} = \chi \cdot \vec{H} , \qquad (X.12)$$

gdzie współczynnik χ nazywa się *podatnością magnetyczną* substancji.

Uwzględniając (X.12) ze wzoru (X.11) znajdujemy

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0(1+\chi)\cdot\vec{H} = \mu_0\mu \cdot \vec{H} , \qquad (X.13)$$

gdzie wielkość

$$\mu = 1 + \chi \tag{X.14}$$

nazywa się *przenikalnością magnetyczną danej substancji.*

Biorąc pod uwagę wzory ($\vec{B}' = \mu_0 \vec{J} \equiv \mu_0 \chi \vec{H}$; $\vec{B} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H}$), ze wzoru ($\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$) znajdujemy

$$\vec{B}_0 = \vec{B} - \vec{B}' = \mu_0 \mu \cdot \vec{H} - \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 \cdot \vec{H} \ . \tag{X.15}$$

Ze wzorów (X.13) oraz (X.15) mamy

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} \ . \tag{X.16}$$

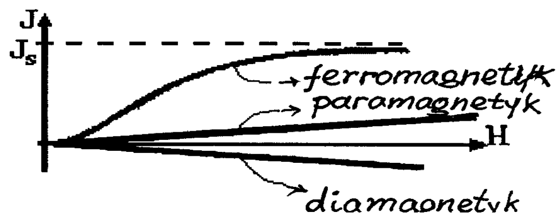
Ze wzoru (X.16) wynika, że wektor natężenia pola magnetycznego jest podobny do wektora indukcji elektrycznej $\vec{D}$. Wektor indukcji elektrycznej $\vec{D}$ określają tylko ładunki swobodne. Wektor $\vec{H}$ określają tylko prądy swobodne. Wektor $\vec{D}$ ma taką samą wartość w jednorodnym polu elektrycznym na zewnątrz oraz wewnątrz dielektryka. Wektor $\vec{H}$ tak same ma taką sama wartość w jednorodnym polu magnetycznym na zewnątrz oraz wewnątrz ciała.

Podstawiając wyrażenie (X.16) do wzoru (X.13) otrzymujemy

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{B}_0 \ . \tag{X.17}$$

Z doświadczeń wynika, że dla większości ciał przenikalność magnetyczne μ nie zależy od $\vec{B}$ i nie znacznie różni się od jedynki. Takie ciała zostały podzielone na paramagnetyki i diamagnetyki.

Dla paramagnetyków $\mu > 1$ ($\chi > 0$), a zatem zgodnie z (X.17) pole magnetyczne wewnątrz ciała będzie większe od pola zewnętrznego ($B > B_0$).



Diamagnetyki ($\mu < 1$, $\chi < 0$) są to substancje, które magnetyzują się w kierunku przeciwnym do kierunku pola magnetycznego $\vec{B}$, a zatem pole magnetyczne wewnątrz ciała będzie mniejsze od pola zewnętrznego ($B < B_0$). Istnieje też liczna grupa ciał, które nawet w zerowym polu magnetycznym posiadają niezerowe namagnesowanie. To są substancje uporządkowane magnetycznie, dla których $\mu(H) >> 1$.

Indukcja elektromagnetyczna. Prawo indukcji Faradaya i reguła Lenza

Dotychczas rozważaliśmy statyczne pole elektryczne i magnetyczne. Dla tych pól, pole elektryczne i pole magnetyczne istnieją niezależnie od siebie. Okazało się jednak, że w przypadku pól zmiennych w czasie pole magnetyczne i pole elektryczne nie są niezależne od siebie i tworzą jedyne pole elektromagnetyczne.

Po raz pierwszy związek między elektrycznymi i magnetycznymi polami wykrył w 1832 roku Faraday. Zjawisko, które odkrył Faraday nosi nazwę *indukcji elektromagnetycznej* i polega ono na powstawaniu prądów elektrycznych w zamkniętym obwodzie podczas przemieszczania się względem siebie źródła pola magnetycznego i tego zamkniętego obwodu. Mówimy, że w obwodzie jest *indukowana siła elektromotoryczna (SEM indukcji)*, która wywołuje przepływ *prądu indukcyjnego*.

Prawo indukcji Faradaya stosuje się do trzech różnych sytuacji fizycznych:

- Nieruchoma pętla, względem której porusza się źródło pola magnetycznego (mamy tzw. Elektryczną SEM).
- Przewód w kształcie pętli porusza się w obszarze pola magnetycznego (magnetyczna SEM).
  - Nieruchoma pętla i nieruchome źródło pola magnetycznego, lecz zmienia się prąd, który jest źródłem pola magnetycznego (także elektryczna SEM).

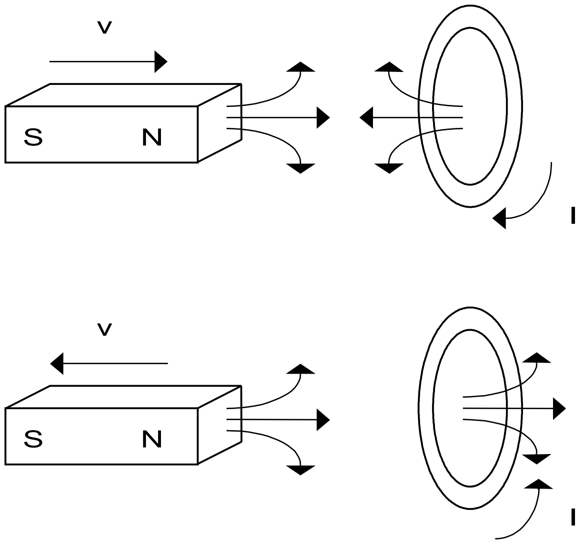
Na podstawie obserwacji Faraday doszedł do wniosku, że *indukowana w obwodzie siła elektromotoryczna* $\mathcal{E}_i$ *jest wziętej ze znakiem ujemnym szybkość, z jaką zmienia się strumień* Φ_m *przechodzący przez ten obwód*:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} . \qquad (X.18)$$

Strumień magnetyczny Φ_m określa liczba linii sił pola magnetycznego przechodzących przez pole powierzchni obwodu. Na przykład, jeżeli obwód ma kształt okręgu o promieniu R i obwód znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o wektorze indukcji $\vec{B}$, to strumień magnetyczny Φ_m przechodzący przez ten obwód wynosi

$$\Phi_m = B\cdot(\pi R^2)\cdot\cos\varphi , \qquad (X.19)$$

gdzie φ jest kąt między wektorem $\vec{B}$ i jednostkowym wektorze $\vec{n}$ prostopadłym do powierzchni obwodu.



Znak minus w prawie Faradaya wyraża tak zwaną regułę Lenza*: prąd indukowany w obwodzie ma zawsze taki kierunek, że wywołane przez niego pole magnetyczne przeciwdziała zmianom, które wywołują jego powstanie.* Kierunek prądu indukowanego w pętli (rysunek) zależy od tego czy strumień rośnie czy maleje (zbliżamy czy oddalamy magnes).

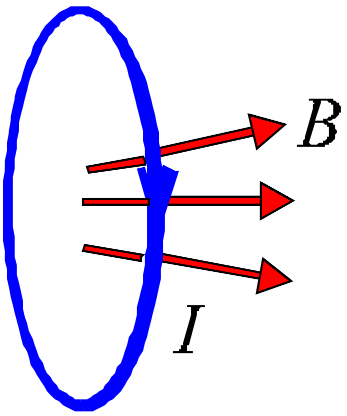
Jeżeli mamy obwód złożony z N zwojów to

$$\mathcal{E}_i = -N \cdot \frac{d\Phi_m}{dt} \quad . \qquad (X.20)$$

W układzie SI jako jednostkę strumienia magnetycznego przyjmuje się 1 *weber* (*Wb*): 1 *Wb* =1 $T \cdot 1\ m^2$.

Indukcyjność własna obwodu

Dookoła każdego przewodnika z prądem I istnieje pole magnetyczne, które zgodnie z prawem Biota-Savarta (X.4) jest wprost proporcjonalnej do I .



Własne pole magnetyczne obwodu przenika również przez powierzchnię S ograniczoną przez obwód, wytwarzając tym samym strumień magnetyczny Φ_m, który zgodnie z określeniem strumienia będzie również wprost proporcjonalny do I

$$\Phi_m = L \cdot I \quad . \qquad (X.21)$$

Współczynnik proporcjonalności L w (X.21) nosi nazwę *indukcyjności obwodu*. Indukcyjność obwodu zależy tylko od jego geometrycznego kształtu. W układzie SI jednostką indukcyjności jest *henr*. *1 H = 1 Wb/A.*

Zjawisko samoindukcji

Jeżeli w obwodzie płynie zmienny prąd, wówczas zmienny w czasie strumień magnetyczny $\Phi_m = L \cdot I$ wzbudza w obwodzie SEM indukcji. Zjawisko to nazywa się *samoindukcją albo indukcją własną*. Jeśli obwód prądu nie ulega odkształceniu, to indukcyjność obwodu pozostaje stała i SEM indukcji $\mathcal{E}_s$, zgodnie z prawem Faradaya, wynosi

$$\mathcal{E}_s = -L \cdot \frac{dI}{dt} . \tag{X.22}$$

Pod działaniem siły elektromotorycznej samoindukcji pojawia się prąd indukowany przeciwdziałający, według prawa Lenza, zmianie prądu w obwodzie: spowalnia jego wzrost lub malenie.

Fale elektromagnetyczne

Maxwell po raz pierwszy udowodnił, że z równań pola elektromagnetycznego (równań Maxwella), które są uogólnieniem doświadczalnych danych dotyczących zjawisk elektromagnetycznych, wynika możliwość istnienia nawet w pustej przestrzeni (próżni) fal elektromagnetycznych, rozchodzących się z prędkością równej prędkości światła w próżni. Ten fakt pozwolił Maxwellowi założyć, że światło jest niczym innym, jak falą elektromagnetyczną. Prędkość fali elektromagnetycznej, która wynika z teorii Maxwella określa wzór

$$\upsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon \mu} . \tag{X.23}$$

W przypadku próżni (pustej przestrzeni), dla której $\varepsilon = \mu = 1$, jak widać ze wzoru (X.23), prędkość fali jest określona tylko przez fundamentalne stałe ε_0 i μ_0 i jest równa, jak okazuje się prędkości światła w próżni ($\varepsilon_0 \approx 8{,}9 \cdot 10^{-12} C^2/(N \cdot m^2)$, $\mu_0 \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6} H/m$)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{8{,}9 \cdot 1.3}} \cdot 10^9 \approx 3 \cdot 10^8 \quad m/s .$$

W ośrodku, zgodnie z (X.23), prędkość fali elektromagnetycznej υ jest mniejsza od prędkości fali w próżni i wynosi

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} . \tag{X.24}$$

W zagadnieniach praktycznych najważniejszymi są fale o kształcie

$$A(z,t) = A_0 \cdot \cos[k(z \pm \upsilon \cdot t)] , \tag{X.25}$$

gdzie $k = 2\pi / \lambda = 2\pi\nu / (\lambda \cdot \nu) = \omega / \upsilon$.

Powierzchni fazy stałej $(kz \pm \omega \cdot t = const)$ fali określonej wzorem (X.25) - *czoło fali*, są płaszczyznami prostopadłymi do kierunku rozchodzenia się fali, czyli są prostopadłe do osi Oz . Fale takie nazywamy *falami płaskimi*.

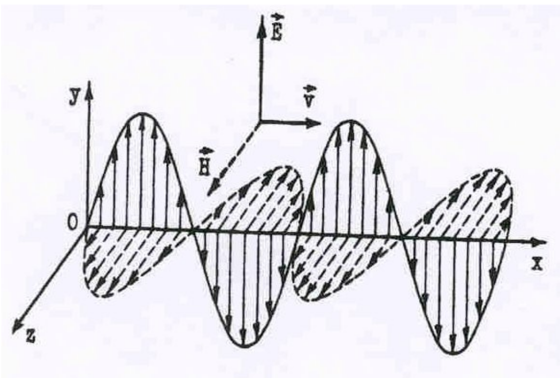
Fale postaci (X.25) nazywamy *monochromatycznymi (zależą tylko od jednej częstości* ω *) i harmonicznymi (opisuje ich funkcja cos albo sin) falami*.

Fale płaskie są dobrym przybliżeniem w przypadku, gdy rozważamy punkty znajdujące się bardzo daleko od źródła fali. Gdyś jednak odległość od źródła nie jest wystarczająco duża, stosujemy przybliżenie *fali kulistej*. Kulista fala harmoniczna ma postać

$$A(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \cos(kr - \omega \cdot t) \ . \qquad (X.26)$$

W równaniu (X.26) wielkość r jest odległością punktu od źródła fali.

W przypadku fali kulistej powierzchni stałej fazy $(kr - \omega \cdot t = const)$ będą miały postać koncentrycznych powierzchni sferycznych, a nie płaszczyzn.



Z analizy równań określających właściwości fal elektromagnetycznych wynika, że

- drgania wektorów pola elektrycznego i magnetycznego są związany między sobą; stąd te fali nazywamy falami *elektromagnetycznymi*;
- fale elektromagnetyczne są falami *poprzecznymi*: wektory $\vec{E}$ i $\vec{B}$ znajdują się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$;
- trójka wektorów $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ tworzy *trójkę wzajemnie prostopadłych wektorów*;
- wzajemnie prostopadłe wektory $\vec{E}$ i $\vec{B}$ *drgają w jednej fazie*, czyli jednocześnie osiągają wartości zerowe i maksymalne.