Wykład 1

Mechanika klasyczna

Fizyka a nauki przyrodnicze

Wszystkie nauki przyrodnicze zajmują się badaniami zjawisk zachodzących w przyrodzie. W odróżnieniu jednak od innych nauk przyrodoznawstwa fizyka zajmuje się badaniem najogólniejszych cech i form materii istniejącej w tym, co nazywamy Przyrodą. Z tego punktu widzenia fizyka stanowi podstawę przyrodoznawstwa i odgrywa integrującą rolę dla wszystkich nauk przyrodniczych.

Umownie fizyka została podzielona na kilku rozdziałów: mechanika klasyczna; fizyka molekularna i termodynamika; elektryczność i magnetyzm; optyka; fizyka atomowa; fizyka jądra i cząstek elementarnych. Jest jednak oczywistym, że zrozumienie prawie każdego zjawiska w naturze wymaga wiedzy nie z jednego, a z kilku rozdziałów fizyki. W niniejszym wykładzie są przedstawiony zwięzły opis podstawowych praw z całej fizyki, których opanowanie pozwoli studentom wydziałów przyrodniczych lepiej zrozumieć wielu problemów o podstawowym znaczeniu dla nauk przyrodniczych.

Mechanika klasyczna. Modele w mechanice. Układ odniesienia

Mechanika klasyczna zajmuje się badaniem ruchów ciał makroskopowych w przestrzeni i w czasie. W celu uproszczenia opisu ruchu ciała makroskopowego jako całości w mechanice klasycznej wprowadzamy idealizacje (modele). Główne modele w mechanice klasycznej to są 1) *model punktu materialnego*, oraz 2) *model ciała sztywnego albo model bryły sztywnej*.

Punktem materialnym nazywamy *ciało o nieskończenie małych (zerowych) wymiarach*. Oczywiście w przyrodzie nie istnieją punkty materialne. Jednak model punktu materialnego bardzo dobrze opisuje, na przykład, ruch Ziemi dookoła Słońca. Jest to związane z tym, że promień Ziemi jest o 25 000 razy mniejszy niż odległość Ziemi od Słońca. Niestety, w przybliżeniu modelu punktu materialnego nie możemy uwzględnić wiadomego faktu, że Ziemia wykonuje ruch obrotowy dookoła swojej osi, wskutek czego mamy dzień i noc. Ten ruch obrotowy możemy rozważyć korzystając z kolejnego modelu (przybliżenia) - modelu ciała sztywnego. Ciałem sztywnym nazywamy *ciało, którego kształt oraz rozmiary nie ulegają zmianie podczas ruchu ciała*. W przyrodzie nie istnieją ciała sztywne, ponieważ, jak na przykład w przypadku ruchu obrotowego, ciało zawsze deformuje się (przypomnijmy sobie, jaka siła działa na osobę znajdującą się na karuzeli). Jednak te deformacje w wielu przypadkach są tak małe, że ruch ciała w bardzo dobrym przybliżeniu możemy rozważać jako ruch ciała sztywnego. Jeżeli model ciała sztywnego nie opisuje ruchu ciała makroskopowego i ciało deformuje się, musimy stosować kolejne modele, które są rozważane w mechanice ośrodków ciągłych.

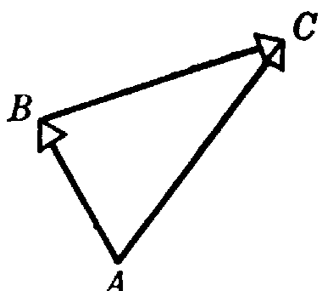
Najpierw będziemy rozważali ruch punktu materialnego. Jeżeli punkt materialny porusza się od położenia A do położenia B (rys.I.1), to jego przemieszczenie możemy przedstawić za pomocą strzałki $\overrightarrow{AB}$. Rzeczywista droga punktu materialnego nie musi być oczywiście linią prostą, a zatem strzałka przedstawia jedynie efekt ruchu, a nie prawdziwy ruch.

Jeżeli dalej punkt materialny porusza się od punktu B do punktu C, przemieszczenie to możemy przedstawić za pomocą strzałki $\overrightarrow{BC}$. Wypadkowy efekt tych dwóch przemieszczeń przedstawia strzałka łącząca punkt A i punkt C (rys.I.1).

Matematycznie możemy to zapisać w postaci

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \, . \tag{I.1}$$

W matematyce i fizyce, wielkości, mające określoną zarówno wartość, jak i kierunek oraz podlegające pewnym regułom dodawania i mnożenia, o których będzie mowa dalej, nazywamy *wektorami*. Graficznie wektory przedstawiamy jako strzałki.



Rys.I.1. Dodawanie wektorów

A więc przemieszczenie punktu materialnego od dowolnego położenia A do dowolnego położenia B możemy opisać za pomocą wektora $\overrightarrow{AB}$. Nazwa *wektor* pochodzi z łaciny i oznacza *przewoźnik*, co kojarzy się z przemieszczeniem. W fizyce istnieje wiele wielkości fizycznych, które możemy przedstawić za pomocą strzałek (wektorów). Są to siła, prędkość, przyspieszenie itd.

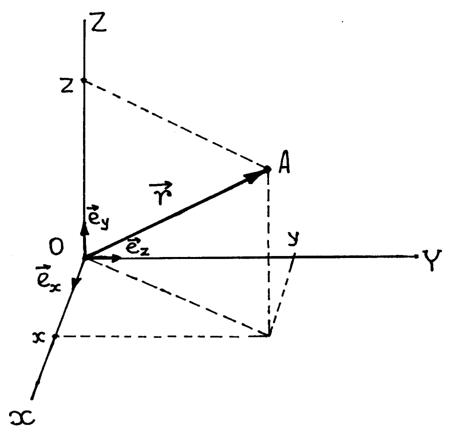
Regułę określającą dodawanie dwóch wektorów ilustruje rys.I.1. Dlatego żeby znaleźć sumę dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, musimy narysować wektor $\vec{a}$; następnie rysujemy wektor $\vec{b}$, tak, aby koniec wektora $\vec{b}$ stykał się z ostrzem wektora $\vec{a}$. Wtedy ostrze wypadkowego wektora $\vec{a}+\vec{b}$ styka się z ostrzem wektora $\vec{b}$ i łączy koniec wektora $\vec{a}$ i ostrze wektora $\vec{b}$. Metoda geometryczna dodawania wektorów jest dość żmudna w przypadku dodawania kilku wektorów w przestrzeni trójwymiarowej.

Inną metodą dodawania wektorów jest metoda analityczna, wykorzystująca rozkładanie wektorów na składowe, w jakimś szczególnym układzie współrzędnych. Często jako układ współrzędnych wybieramy trzy wzajemnie prostopadłe proste, które przecinają się w punkcie O - początku układu (rys.I.2). Taki układ współrzędnych nazywa się *układem kartezjańskim* i po raz pierwszy był wprowadzony właśnie przez Kartezjusza. W układzie kartezjańskim położenie punktu określa wektor wodzący punktu:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z \ . \tag{I.2}$$

Wielkości x, y, z nazywamy *współrzędnymi* punktu. Wektory $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$ tworzą tak zwaną *bazę kartezjańskiego* układu współrzędnych i są to <u>bezwymiarowe</u> jednostkowe ($|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$) wektory. Oznaczenie $|\vec{a}|$ określa wartość bezwzględną wektora $\vec{a}$, czyli długość strzałki, która przedstawia wektor $\vec{a}$.

Korzystając z geometrycznej reguły dodawania wektorów łatwo udowodnić, że sumując trzy wektory $\vec{a} = x \cdot \vec{e}_x$, $\vec{b} = y \cdot \vec{e}_y$ i $\vec{c} = z \cdot \vec{e}_z$ otrzymujemy właśnie wektor $\vec{r}$. Warto podkreślić, że w różnych układach współrzędnych, wektor $\vec{r}$ ma różne wartości liczbowe współrzędnych x, y, z.



Rys.2. Kartezjański układ współrzędnych

Wróćmy teraz do opisu ruchu punktu materialnego. Żeby opisać ruch punktu materialnego w przestrzeni i w czasie musimy wprowadzić tak zwany *układ odniesienia.* Układ odniesienia to układ współrzędnych oraz zegar.

Dla pomiaru czasu możemy korzystać z dowolnego okresowego procesu fizycznego, na przykład z wahadła. W układzie SI jednostką pomiaru czasu jest *sekunda* (s).

W mechanice klasycznej (mechanice Newtona) zakłada się, że czas płynie we wszystkich układach odniesienia tak samo. Oznacza to, że w pociągu i w samolocie, na Ziemi i na Słońcu wskazówki zegarów obracają się z taką samą prędkością.

Umownie mechanika została podzielona na *kinematykę* oraz *dynamikę*. Jeżeli zajmujemy się opisem ruchu ciał, nie rozważając przyczyn wywołujących ten ruch, to mówimy, że mamy do czynienia z *kinematyką*. Jeżeli uwzględniamy siły, które wywołują ruch ciał, to mówimy, że mamy do czynienia z *dynamiką*. Najprostszym zagadnieniem kinematyki jest oczywiście kinematyka punktu materialnego.

Kinematyka punktu materialnego

Mówimy, że ruch punktu materialnego jest całkowicie określony, jeżeli znamy położenie tego punktu w wybranym układzie współrzędnych w dowolnej chwili. Z punktu matematycznego, to oznacza, że wiemy jak zależą od czasu współrzędne $x(t), y(t), z(t)$ punktu materialnego, innymi słowy wiemy, jak zależy od czasu wektor wodzący punktu materialnego

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{e}_x + y(t)\cdot\vec{e}_y + z(t)\cdot\vec{e}_z \ . \qquad \text{(I.3)}$$

Krzywa $\vec{r}(t)$ w trójwymiarowej przestrzeni nosi nazwę *toru* albo *trajektorii* punktu materialnego. Warto podkreślić, że każdy punkt trajektorii ma określony czas, które wskazuje na to, kiedy punkt materialny był albo będzie w tym właśnie punkcie.

Niech w chwili t_1 punkt materialny zajmuje położenie A (rys.I.3), a w chwili późniejszej $t_2 > t_1$ ten sam punkt zajmuje położenie B. Iloraz

$$\bar{\upsilon} = \frac{przemieszczenie}{przedzial \quad czasu} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_2 - t_1} \qquad \text{(I.4)}$$

nazywa się *prędkością średnią* punktu materialnego. Za pomocą składowych (współrzędnych) wektorów równanie (I.4) możemy zapisać w postaci

$$\bar{\upsilon}_x\vec{e}_x + \bar{\upsilon}_y\vec{e}_y + \bar{\upsilon}_z\vec{e}_z \equiv \frac{1}{t_2 - t_1}[(x_B - x_A)\vec{e}_x + (y_B - y_A)\vec{e}_y + (z_B - z_A)\vec{e}_Z \ . \qquad \text{(I.5)}$$

Tu x_A, y_A, z_A są współrzędnymi wektora wodzącego punktu A, a x_B, y_B, z_B są współrzędnymi wektora wodzącego punktu B.

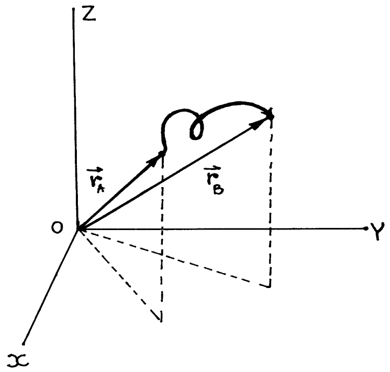
Z równania (I.5) wynika, że

$$\bar{\upsilon}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{x_B - x_A}{t_2 - t_1} \qquad \text{(I.6a)}$$

$$\bar{\upsilon}_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta t} \equiv \frac{y_B - y_A}{t_2 - t_1} \qquad \text{(I.6b)}$$

$$\bar{\upsilon}_z \equiv \frac{\Delta z}{\Delta t} \equiv \frac{z_B - z_A}{t_2 - t_1} \qquad \text{(I.6c)}$$

Jak widać z Rys.I.3, zwrot wektora przemieszczenia $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, a więc i zwrot wektora prędkości średniej $\vec{\bar{\upsilon}}$ nie pokrywa się, w ogólnym przypadku, ani z wektorem $\vec{r}_B$ ani z wektorem $\vec{r}_A$.



Rys.I.3. Tor punktu materialnego

Zadanie 1: punkt materialny porusza się wzdłuż toru

$$\vec{r}(t) = (A \cdot t) \cdot \vec{e}_x + (B \cdot t) \cdot \vec{e}_y + (C \cdot t) \cdot \vec{e}_z ,$$

gdzie A, B, C są stałe. Obliczmy prędkość średnią na odcinku czasowym $\Delta t = t_2 - t_1$.

Rozwiązanie:

$$\bar{\upsilon}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = A\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} = A ,$$

$$\bar{\upsilon}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = B\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} = B ,$$

$$\bar{\upsilon}_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} = C\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} = C ,$$

a zatem

$$\vec{\bar{\upsilon}}(t) = A \cdot \vec{e}_x + B \cdot \vec{e}_y + C \cdot \vec{e}_z = const \quad .$$

Zadanie 2: punkt materialny porusza się wzdłuż toru $\vec{r}(t) = (A \cdot t^2) \cdot \vec{e}_x +$ $+ (B \cdot t^2) \cdot \vec{e}_y + (C \cdot t) \cdot \vec{e}_z$, gdzie A, B, C są stałe. Obliczmy składowe wektora prędkości średniej na odcinku czasowym $\Delta t = t_2 - t_1$.

Rozwiązanie:

$$\bar{\upsilon}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = A\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = A \cdot (t_2 + t_1) ,$$

$$\bar{\upsilon}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = B\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = B \cdot (t_2 + t_1) \ ,$$

$$\bar{\upsilon}_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} = C\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} = C \quad .$$

Zadanie 3: promień Ziemi wynosi około $R \approx$ 6 400 km. Obliczmy średnią prędkość ruchu obrotowego ciała znajdującego na równiku powierzchni Ziemi.

Rozwiązanie: ciało znajdujące na równiku powierzchni Ziemi w ciągu doby (24 godziny) pokonuje drogę $2\pi R = 6{,}28 \cdot 6400 = 40\ 192$ km, a zatem prędkość średnia wynosi

$$\bar{\upsilon} = \frac{2\pi R}{\Delta t} = \frac{40192}{24} \approx 1700 \text{ km/h.}$$

Prędkością chwilową w chwili t_1 nazywa się granicę prędkości średniej, gdy zarówno $\Delta\vec{r}$, jak i Δt dążą do zera

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \quad . \tag{I.7}$$

W matematyce granicę (I.7) nazywamy *pochodną* wektora $\vec{r}$ względem czasu i oznaczamy jako $\frac{d\vec{r}}{dt}$. W fizyce często pochodną względem czasu oznaczają jako $\dot{\vec{r}}$. Warto podkreślić, że wektor prędkości chwilowej w ogólnym przypadku może mieć dowolny kierunek względem kierunku wektora wodzącego.

Prędkość chwilowa, zgodnie z (I.7) ma wymiar (*długość/czas*) czyli (L/T). W układzie jednostek SI prędkość mierzymy w jednostkach m/s.

Zadanie 4: punkt materialny porusza się tak, że

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \cdot t + \vec{B}, \tag{I.8}$$

gdzie $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są stałe wektory nie zależne od czasu. Obliczmy prędkość chwilową.

Rozwiązanie:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{A} \cdot (t + \Delta t) + \vec{B}] - [\vec{A}t + \vec{B}]}{\Delta t} = \vec{A} = const \quad . \tag{I.9}$$

Więc równanie (I.8) opisuje ruch punktu materialnego ze stałą prędkością $\vec{A}$. Może powstać pytanie: co oznacza wektor $\vec{B}$ w równaniu (I.8)? Sens fizyczny a raczej matematyczny tego wektora łatwo otrzymać rozważając początkową chwilę $t = 0$, czyli rozważając chwilę, kiedy włączyliśmy zegar. Podstawiając $t = 0$ do równania (I.8) otrzymujemy, że

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t = 0) = \vec{B}, \tag{I.10}$$

a zatem wektor $\vec{B}$ określa położenie punktu materialnego w początkowej chwili $t = 0$. Biorąc pod uwagę (I.10) i wprowadzając oznaczenie $\vec{A} = \vec{\upsilon}$ równanie (I.8) możemy zapisać w postaci

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon} \cdot t \ . \tag{I.11}$$

Równanie (I.11) opisuje prostoliniowy (*wzdłuż prostej*) i jednostajny (ze *stałą prędkością*) ruch punktu materialnego.

Zadanie 5: punkt materialny porusza tak, że

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{A} \cdot t^2 + \vec{B} \cdot t + \vec{C} , \tag{I.12}$$

gdzie $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$ są to wektory stałe. 1) Jakie wymiary mają wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$? 2) Obliczyć prędkość chwilową punktu.

Rozwiązanie: 1. Z lewej strony równania (I.12) znajduje się wektor, który ma wymiar *długości*, a zatem z prawej strony musi być też wektor o wymiarze *długości*. Stąd wynika, że wektor $\vec{A}$ ma wymiar (L/T^2), wektor $\vec{B}$ ma wymiar *prędkości* (L/T), a wektor $\vec{C}$ ma wymiar *długości* L.

2.

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\frac{1}{2}\vec{A}(t+\Delta t)^2 + \vec{B}(t+\Delta t) + \vec{C}] - [\frac{1}{2}\vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C}]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A} \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\vec{A} \cdot (\Delta t)^2 + \vec{B} \cdot \Delta t}{\Delta t} = \vec{A} \cdot t + \vec{B} \ . \tag{I.13}$$

Jeżeli znów rozważmy początkową chwilę $t_0 = 0$, to ze wzoru (I.13) otrzymamy, że stały wektor $\vec{B}$ będzie prędkością punktu materialnego w chwili $t_0 = 0$.

Ze wzoru (I.13) wynika także, że w ogólnym przypadku prędkość chwilowa punktu materialnego może być zmienną w czasie. Iloraz

$$\bar{\vec{a}} \equiv \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} \equiv \frac{\vec{\upsilon}(t_2) - \vec{\upsilon}(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{I.14}$$

nazywa się *przyspieszeniem średnim*.

Przyspieszeniem chwilowym nazywa się granicę przyspieszenia średniego, gdy zarówno $\Delta\vec{\upsilon}$, jak i Δt dążą do zera

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad . \tag{I.15}$$

Biorąc pod uwagę wzór (I.7), określający wektor prędkości, wzór (I.15) możemy zapisać w postaci

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad . \tag{I.16}$$

W matematyce wielkość $d^2\vec{r}/dt^2$ nosi nazwę drugiej pochodnej od $\vec{r}$, względem czasu. W fizyce często tą pochodną oznaczają jako $\ddot{\vec{r}}$.

Przyspieszenie, zgodnie z (I.14) i (I.15) ma wymiar (*prędkość/czas*) czyli $(L/T)\cdot(1/T) = L/T^2$. W układzie jednostek SI przyspieszenie mierzymy w jednostkach m/s^2.

Zadanie 6: punkt materialny porusza się wzdłuż toru określonego wzorem (I.12):

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{A}\cdot t^2 + \vec{B}\cdot t + \vec{C} \; .$$

Obliczmy przyspieszenie chwilowe punktu.

Rozwiązanie: prędkość punktu materialnego poruszającego się wzdłuż trajektorii (I.12) jest określona wzorem (I.13):

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{A}\cdot t + \vec{B} \quad .$$

Korzystając z tego wzoru otrzymujemy

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{A}(t+\Delta t)+\vec{B}]-[\vec{A}t+\vec{B}]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}\cdot\Delta t}{\Delta t} = \vec{A} = const \quad . \tag{I.17}$$

Oznaczając stałe przyspieszenie punktu jako $\vec{a}_0$, prędkość i wektor wodzący punktu w chwili $t_0 = 0$ jako $\vec{\upsilon}_0$ i $\vec{r}_0$, wzór (I.12) możemy zapisać w postaci

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 \cdot t^2 \, . \tag{I.18}$$

Równanie (I.18) opisuje ruch punktu materialnego *ze stałym przyspieszeniem*. Stałe $\vec{r}_0$, $\vec{\upsilon}_0$ i $\vec{a}_0$, określające położenie, prędkość i przyspieszenie punktu materialnego w chwili początkowej $t = 0$ nazywamy *warunkami początkowymi.*

Zadanie 7: ciało znajdujące się na dachu domu zaczyna w chwili $t_0 = 0$ swobodnie spadać na powierzchnie Ziemi. 1) Napisać wzór określający trajektorię tego ciała. 2) Zakładając, że dach domu znajduje się na wysokości 4,9 m od powierzchni Ziemi znaleźć czas spadku ciała oraz 3) prędkość ciała w chwili zderzenia z Ziemią.

Rozwiązanie: 1) Ze szkoły średniej wiemy, że ciało spada na powierzchnie Ziemi ze stałym przyspieszeniem $g = 9{,}8 \quad m/s^2$, które nazywa się *przyspieszeniem grawitacyjnym Ziemi*. Wektor tego przyspieszenia jest skierowany w dobrym przybliżeniu ku środkowi Ziemi. Wybierzemy oś Oz od środka Ziemi ku górze, a początek układu wybierzemy na powierzchni Ziemi. Zgodnie z (I.18), trajektorię spadającego ciała, określa wzór

$$h(t) = z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h_0 \ , \qquad \text{(I.19)}$$

gdzie $h_0 = 4{,}9m$. Tu uwzględniliśmy, że wektor $\vec{g}$ ma ujemną składową wzdłuż wybranej osi Oz oraz, że w chwili początkowej $t = 0$ ciało znajdowało się w spoczynku ($\vec{\upsilon}_0 = 0$).

2) Ze wzoru (I.19) znajdujemy, że w chwili gdy ciało dotknie się Ziemi ($h(t) = 0$) upłynie czas

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 1 \ \text{s} \ . \qquad \text{(I.20)}$$

3) prędkość, którą będzie miało ciało w chwili zderzenia ciała z Ziemią określa wzór (I.13)

$$|\upsilon(t)| = g \cdot t \ . \qquad \text{(I.21)}$$

Po podstawieniu (I.20) do tego wzoru otrzymujemy

$$\upsilon = g \cdot t_{sp} = 9{,}8 \ \text{m/s} \approx 36 \ \text{km/h} \ .$$