

Wykład 8

Współrzędne normalne drgań kryształu

W przybliżeniu harmonicznym drgania sieci krystalicznej tworzą fale płaskie, których częstość jest związana z wektorem kwazifalowym \vec{k} zależnością dyspersyjną $\omega(\vec{k})$. Oczywiście drgania harmoniczne, określone funkcjami wychyleń atomów $\vec{u}_{s\vec{l}}(t)$, nie opisują ogólnego ruchu atomów w kryształ. Dla tego, żeby opisać ogólny ruch atomów w kryształ wprowadźmy zamiast zmiennych $\vec{u}_{s\vec{l}}(t) \equiv \vec{u}(\vec{n}, t)$ nowe uogólnione zmienne $\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$, które noszą nazwę *współrzędnych normalnych* drgań sieci:

$$\vec{u}(\vec{n}, t) = \frac{1}{\sqrt{m_s N}} \sum_{\vec{k}} \vec{Q}_{\vec{k}}(t) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(\vec{n})} . \quad (8.1)$$

Tu wektor $\vec{r}(\vec{n}) \equiv \vec{r}_{s\vec{l}}$ określa położenie równowagi atomu s w \vec{l} - tej komórce elementarnej. Dla uproszczenia rozważmy znów łańcuch składający a jednakowych atomów. Wtedy przekształcenie (8.1) przyjmuje postać

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_k Q_k(t) \cdot e^{ika \cdot n} . \quad (8.2)$$

Tu N - liczba atomów.

Ponieważ wychylenia atomów są opisywane za pomocą funkcji rzeczywistych, $u_n(t) \equiv u_n^*(t)$, współrzędne normalne $Q_k(t)$ powinny spełniać warunek

$$Q_{-k}(t) = Q_k^*(t) . \quad (8.3)$$

Biorąc pod uwagę (8.2) otrzymujemy następujący wzór na energię kinetyczną łańcucha

$$T = \frac{m}{2} \sum_n \dot{u}_n^2 = \frac{1}{2N} \sum_n \sum_{k, k'} \dot{Q}_k(t) \dot{Q}_{k'}(t) \cdot e^{i(k+k')an} . \quad (8.4)$$

Rozważmy najpierw w (8.4) sumowanie względem wskaźnika n . Ponieważ

$$\frac{1}{N} \sum_n e^{iqan} = \frac{1}{N} e^{iqa} \frac{1 - e^{iqaN}}{1 - e^{iqa}} ,$$

uwzględniając, że $k = 2\pi m/Na$ i $k' = 2\pi m'/Na$, znajdujemy:

$$q = k + k' \neq 0 \quad e^{iqa} \frac{1 - e^{iqaN}}{1 - e^{iqa}} = e^{i2\pi \frac{(m+m')}{N}} \frac{1 - e^{i2\pi \frac{(m+m')}{N}}}{1 - e^{i2\pi \frac{(m+m')}{N}}} = 0 ,$$

$$q = k + k' = 0 \quad e^{iqa} \frac{1 - e^{iqaN}}{1 - e^{iqa}} = \frac{0}{0} ,$$

Korzystając z reguły de l'Hospitala dla $q = k + k' = 0$ mamy

$$\frac{1}{N} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dq}(1 - e^{iqaN})}{\frac{d}{dq}(1 - e^{iqa})} = \frac{1 - iaN}{N - ia} = 1 .$$

Z prowadzonej analizy wynika, że w (8.4) będą nie zerowe tylko wyrazy dla których $k' = -k$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \dot{Q}_k(t) \dot{Q}_{-k}(t) = \frac{1}{2} \sum_k \frac{dQ_k(t)}{dt} \frac{dQ_k^*(t)}{dt} . \quad (8.5)$$

Tu skorzystaliśmy z własności współrzędnych normalnych (8.3).

Przekształcimy teraz wyrażenie na energię potencjalną drgań harmoniczných łańcucha, biorąc pod uwagę wzór (8.2)

$$\begin{aligned} U &= \frac{f}{2} \sum_n (u_n - u_{n-1})^2 \\ &= \frac{f}{2mN} \cdot \sum_{k,k'} Q_k(t) Q_{k'}(t) \sum_n [e^{i(k+k')an} - 2e^{-iak'} e^{i(k+k')an} + e^{i(k+k')a(n-1)}] . \end{aligned} \quad (8.6)$$

Wykonując sumowanie względem wskaźnika n otrzymujemy

$$U = \frac{f}{m} \cdot \sum_k Q_k(t) Q_{-k}(t) (1 - e^{iak}) . \quad (8.7)$$

Uwzględniając wzór (8.3), zapiszmy (8.7) w równoważnej postaci

$$U = \frac{f}{2m} \cdot \sum_k Q_k(t) Q_k^*(t) (2 - e^{iak} - e^{-iak}) . \quad (8.8)$$

Dla łańcuchu jednoatomowego zależność dyspersyjna drgań harmoniczných ma postać

$$\omega^2(k) = \frac{2f}{m} [1 - \cos(ak)] \equiv \frac{f}{m} (2 - e^{iak} - e^{-iak}) . \quad (8.9)$$

Biorąc pod uwagę (8.9) ostatecznie znajdujemy

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \omega^2(k) \cdot Q_k(t) Q_k^*(t) . \quad (8.10)$$

Korzystając ze wzorów (8.5) oraz (8.10) dla funkcji Lagrange'a mamy

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_k [\dot{Q}_k(t) \dot{Q}_k^*(t) - \omega^2(k) \cdot Q_k(t) Q_k^*(t)] . \quad (8.11)$$

Wykazaliśmy, więc, że funkcję Lagrange'a drgań harmonicznycych sieci krystalicznej możemy przedstawić jako sumę składników odnoszących się do każdej ze współrzędnych normalnych.

Ze wzoru (8.11) łatwo otrzymać równania ruchu dla każdej uogólnionej współrzędnej

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} = \frac{d^2 Q_k}{dt^2} + \omega^2(k) \cdot Q_k = 0 . \quad (8.12)$$

Równanie (8.12) jest równaniem oscylatora harmonicznego o częstości $\omega(k)$.

Wprowadźmy z kolei pęd uogólniony P_k sprzężony do współrzędnej normalnej Q_k

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \dot{Q}_k^* . \quad (8.13)$$

Biorąc pod uwagę (8.13), funkcję Hamiltona możemy zapisać następująco:

$$H = T + U = \frac{1}{2} \sum_k [|P_k|^2 + \omega^2(k) \cdot |Q_k|^2] . \quad (8.14)$$

Widzimy, że funkcję Hamiltona także możemy przedstawić w postaci funkcji Hamiltona niezależnych oscylatorów harmonicznycych z masami równymi jednościami i częstościami $\omega(k)$.

We wzorach (8.11) i (8.14) uogólnione współrzędne Q_k i uogólnione pędy P_k są wielkościami zespolonymi. Zazwyczaj funkcje Hamiltona i Lagrange'a zapisywane są za pomocą rzeczywistych uogólnionych współrzędnych i pędów. Przejście do rzeczywistych funkcji Lagrange'a i Hamiltona łatwo wykonać za pomocą następującego przekształcenia

$$Q_k = \frac{1}{2} \left\{ x_k + x_{-k} + \frac{i}{\omega_k} (p_k - p_{-k}) \right\} , \quad (8.15a)$$

$$P_k = \frac{1}{2} \{ p_k + p_{-k} - i \omega_k (x_k - x_{-k}) \} , \quad (8.15b)$$

gdzie x_k i p_k są rzeczywistymi współrzędnymi normalnymi i sprzężonymi z nimi pędami uogólnionymi $p_k = dx_k/dt$.

Ze wzorów (8.15) znajdujemy

$$|Q_k|^2 = \frac{1}{4} \left\{ x_k^2 + 2x_k x_{-k} + x_{-k}^2 + \frac{1}{\omega_k^2} (p_k^2 - 2p_k p_{-k} + p_{-k}^2) \right\}, \quad (8.16a)$$

$$|P_k|^2 = \frac{1}{4} \left\{ p_k^2 + 2p_k p_{-k} + p_{-k}^2 + \omega_k^2 (x_k^2 - 2x_k x_{-k} + x_{-k}^2) \right\}. \quad (8.16b)$$

Po wstawieniu wzorów (8.15) do (8.14) i biorąc pod uwagę, że $\omega_k = \omega_{-k}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_k [|P_k|^2 + \omega^2(k) \cdot |Q_k|^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{2} \{ p_k^2 + p_{-k}^2 + \omega_k^2 (x_k^2 + x_{-k}^2) \} = \frac{1}{2} \sum_k (p_k^2 + \omega_k^2 \cdot x_k^2). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Wykazaliśmy więc, że energia drgań sieci jednowymiarowej jest sumą energii N niezależnych oscylatorów harmonicznycch o częstotliwościach ω_k . Każdy z oscylatorów reprezentuje drgania całego kryształu, a nie pojedynczego atomu. Drgania te noszą nazwę *drgań normalnych*.

W przypadku drgań kryształu trójwymiarowego funkcja Hamiltona w przybliżeniu harmonicznym ma postać

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k,\alpha} [p_\alpha^2(\vec{k}) + \omega_\alpha^2(\vec{k}) \cdot x_\alpha^2(\vec{k})]. \quad (8.18)$$

Tu wskaźnik α określa odpowiednią gałąź drgań sieci krystalicznej, a $\omega_\alpha(\vec{k})$ jest zależnością dyspersyjną α gałęzi.

Kwantowanie drgań sieci krystalicznej

Dotychczas drgania sieci krystalicznej rozważaliśmy korzystając z mechaniki klasycznej. Istnieją jednak problemy, w których rozważanie kwantowe staje się niezbędne. Należą do tych problemów zagadnienia natury oporu elektrycznego, nadprzewodnictwa, zjawiska optyczne i inne. Przejście do opisu kwantowego drgań sieci krystalicznej zaczniemy od funkcji Hamiltona

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (p_k^2 + \omega_k^2 x_k^2), \quad (8.19)$$

zapisaną za pomocą kanonicznie sprzężonych współrzędnych uogólnionych x_k i pędów uogólnionych p_k . Zgodnie z podstawową zasadą mechaniki kwantowej funkcję Hamiltona należy traktować jako operator, w którym zmienne x_k i p_k należy zamienić na operatory spełniające następujące reguły komutacyjne:

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_{k'}] = i\hbar\delta_{kk'} , \quad (8.20a)$$

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_{k'}] = [\hat{p}_k, \hat{p}_{k'}] = 0 . \quad (8.20b)$$

Zamiast operatorów \hat{x}_k i \hat{p}_k wprowadźmy nowe operatory \hat{a}_k i \hat{a}_k^+

$$\hat{x}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^+) , \quad \hat{p}_k = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(\hat{a}_k^+ - \hat{a}_k) . \quad (8.21)$$

Sens wprowadzenia tych nowych operatorów będzie jasny później.

Korzystając z (8.21) przekształcimy hamiltonian (8.19)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_k (\hat{p}_k^2 + \omega_k^2 \hat{x}_k^2) = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^+ + \hat{a}_k^+ \hat{a}_k) . \quad (8.22)$$

Biorąc pod uwagę reguły (8.20) łatwo udowodnić, następujące reguły komutacyjne dla nowych operatorów \hat{a}_k i \hat{a}_k^+

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_k^+] = \delta_{kk'} , \quad (8.23a)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0 , \quad [\hat{a}_k^+, \hat{a}_{k'}^+] = 0 . \quad (8.23b)$$

Korzystając ze wzoru (8.23a) zapiszmy wzór (8.22) w postaci

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2}) . \quad (8.24)$$

Wprowadzone operatory \hat{a}_k i \hat{a}_k^+ są tak zwane operatory *anihilacji* i *kreacji* fononów. Jak wiadomo z mechaniki kwantowej, operatory anihilacji i kreacji cząstek są podstawowymi operatorami w przedstawieniu zwanym przedstawieniem *drugiego kwantowania*. W tym przedstawieniu funkcje falowe $\psi(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, t)$ zależą nie od współrzędnych cząstek, a od liczb obsadzeń własnych stanów Hamiltonianu układu. Wielkość $|\psi(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, t)|^2$

określa prawdopodobieństwo tego, że w chwili t na poziomie energetycznym E_1 , znajduje się n_1 cząstek, na poziomie E_2 - n_2 cząstek i tak dalej.

Operatory anihilacji i kreacji \hat{a}_k i \hat{a}_k^+ działają na funkcje $\psi(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, t)$ w następujący sposób

$$\hat{a}_k \psi(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) = \sqrt{n_k} \cdot \psi(n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots) , \quad (8.25a)$$

$$\hat{a}_k^+ \psi(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) = \sqrt{n_k + 1} \cdot \psi(n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots) . \quad (8.25b)$$

Widzimy, że operator anihilacji zmniejsza liczbę cząstek w stanie E_k o jedynekę, natomiast operator kreacji zwiększa liczbę cząstek w stanie E_k o jedynekę. Ze wzorów (8.25) otrzymujemy, że działanie operatora $\hat{a}_k^+ \hat{a}_k$ nie zmienia liczby cząstek w stanie E_k

$$\hat{a}_k^+ \hat{a}_k \psi(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) = n_k \cdot \psi(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) . \quad (8.26)$$

Ze wzoru (8.26) wynika, że funkcje $\psi(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, t)$ są własnymi funkcjami operatora $\hat{n}_k \equiv \hat{a}_k^+ \hat{a}_k$, natomiast jego wartościami własnymi są liczby obsadzeń n_k poziomów E_k .

Hamiltonian (8.24) możemy zapisać przez operator liczby fononów $\hat{n}_k \equiv \hat{a}_k^+ \hat{a}_k$ w postaci

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right) . \quad (8.27)$$

Własne wartości – poziomy energetyczne oscylatora harmonicznego o częstotliwości ω_k , określa dobrze znany wzór

$$\hat{H} \cdot \psi = \sum_k E_k \psi = \sum_k \hbar \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \cdot \psi . \quad (8.28)$$

Z porównania wzorów (8.27) i (8.28) przekonamy się o słuszności (8.26).

Biorąc pod uwagę wzory (8.15) łatwo wyrazić operatory, odpowiadające współrzędnym normalnym Q_k przez operatory anihilacji i kreacji \hat{a}_k i \hat{a}_k^+

$$\hat{Q}_k = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega_k}} \cdot (\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^+) . \quad (8.29)$$

Posługując się wzorami (8.29) oraz (8.2) łatwo wyrazić operator wychYLENIA $\hat{u}_n(t)$ przez operatory \hat{a}_k i \hat{a}_k^+

$$\hat{u}_n(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{mN}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} (\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^+) \cdot e^{ika \cdot n} . \quad (8.30)$$

Z hamiltonianu (8.24) oraz reguł komutacyjnych (8.23) wynikają proste równania ruchu dla operatorów \hat{a}_k i \hat{a}_k^+

$$\frac{d\hat{a}_k}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}_k] = i\omega_k [\hat{a}_k^+ \hat{a}_k, \hat{a}_k] = -i\omega_k \hat{a}_k , \quad (8.31)$$

$$\frac{d\hat{a}_k^+}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}_k^+] = i\omega_k [\hat{a}_k^+ \hat{a}_k, \hat{a}_k^+] = i\omega_k \hat{a}_k^+ . \quad (8.31b)$$

Ze wzorów (8.31) wynika jawna zależność operatorów \hat{a}_k i \hat{a}_k^+ od czasu

$$\hat{a}_k(t) = \hat{a}_k(0) \cdot e^{-i\omega_k t} , \quad \hat{a}_k^+(t) = \hat{a}_k^+(0) \cdot e^{i\omega_k t} . \quad (8.32)$$

Wyżej otrzymane wzory łatwo uogólnić na przypadek drgań sieci trójwymiarowej – musimy wszędzie zamienić liczby falowe k na wektory falowe \vec{k} .

Jeżeli zapiszemy energię drgań sieci krystalicznej w postaci

$$E = E_0 + \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \cdot \hbar\omega(\vec{k}) , \quad (8.33)$$

to łatwo zauważyć, że stan wzbudzonej sieci krystalicznej możemy uważać za stan doskonałego (bez oddziaływań) gazu kwazicząstek – *fononów*. Na podstawie zasady de Broglie'a ruch fononu możemy scharakteryzować za pomocą prędkości grupowej

$$\vec{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} , \quad (8.34)$$

oraz kwazipędu

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} . \quad (8.35)$$

Stan podstawowy idealnego gazu fononów nazywamy *próżnią fononową*. Fizyczne własności próżni fononowej przejawiają się w istnieniu drgań zerowych, których energia wynosi

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k}) , \quad (8.36)$$

W przybliżeniu harmonicznym fonony są nie oddziałującymi kwazicząstkami. Gdy uwzględnimy anharmonizm drgań sieci krystalicznej, gaz fononów przestają być gazem

doskonale. Aby jakościowo wyjaśnić rolę anharmonizmu, zapiszemy funkcję potencjalną łańcucha jednowymiarowego z dokładnością do wyrazu trzeciego stopnia

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{n,n'} f(n,n') u_n u_{n'} + \frac{1}{3!} \sum_{n,n',n''} g(n,n',n'') u_n u_{n'} u_{n''} . \quad (8.37)$$

Korzystając ze wzoru (8.30), zapiszmy operator anharmoniczności w (8.37) przez operatory \hat{a}_k i \hat{a}_k^+

$$\begin{aligned} \hat{U}_{anh} &= \frac{1}{3!} \sum_{n,n',n''} g(n,n',n'') u_n u_{n'} u_{n''} \\ &= \frac{1}{3!} \left(\frac{2\hbar}{mN} \right)^{3/2} \sum_{n,n',n''} g(n,n',n'') \sum_{k,k',k''} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'} \omega_{k''}}} e^{ia(kn+k'n'+k''n'')} (\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^+) (\hat{a}_{k'} + \hat{a}_{-k'}^+) (\hat{a}_{k''} + \hat{a}_{-k''}^+) . \end{aligned} \quad (8.38)$$

Oznaczając

$$V(k,k',k'') = \frac{1}{3!N} \left(\frac{2\hbar}{m} \right)^{3/2} \sum_{n,n',n''} g(n,n',n'') e^{ia(kn+k'n'+k''n'')} , \quad (8.39)$$

zapiszmy wzór (8.38) w postaci

$$\begin{aligned} \hat{U}_{anh} &= \frac{1}{3!} \sum_{n,n',n''} g(n,n',n'') u_n u_{n'} u_{n''} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,k',k''} \frac{V(k,k',k'')}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'} \omega_{k''}}} (\hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{a}_{-k''}^+ + \hat{a}_k \hat{a}_{-k'}^+ \hat{a}_{k''} + \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{k'} \hat{a}_{k''} + \hat{a}_k \hat{a}_{-k'}^+ \hat{a}_{-k''}^+ \\ &\quad + \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{k'} \hat{a}_{-k''}^+ + \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'}^+ \hat{a}_{k''} + \hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{a}_{k''} + \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'}^+ \hat{a}_{-k''}^+) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,k',k''} \frac{V(k,k',k'')}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'} \omega_{k''}}} (3\hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{a}_{-k''}^+ + 3\hat{a}_k \hat{a}_{-k'}^+ \hat{a}_{-k''} + \hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{a}_{k''} + \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'}^+ \hat{a}_{-k''}^+) . \end{aligned} \quad (8.40)$$

Ze wzoru (8.40) widać, że operator \hat{U}_{anh} rzeczywiście jest operatorem oddziaływania fononów. Poszczególne składniki w (8.40) znajdują prostą interpretację: na przykład, człon $\hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{a}_{-k''}^+$ opisuje proces zniknięcia dwu fononów o kwazipędach $\hbar k$ i $\hbar k'$, oraz utworzenie fononu o kwazipędzie $(-\hbar k'')$. Składnik $\hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{a}_{k''}$ opisuje proces zniknięcia trzech fononów o kwazipędach $\hbar k$, $\hbar k'$ i $\hbar k''$, natomiast składnik $\hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'}^+ \hat{a}_{-k''}^+$ opisuje proces kreacji trzech fononów o kwazipędach $(-\hbar k)$, $(-\hbar k')$ i $(-\hbar k'')$.

W przypadku drgań sieci trójwymiarowej musimy we wzorze (8.40) liczby falowe k zamienić na wektory falowe \vec{k}

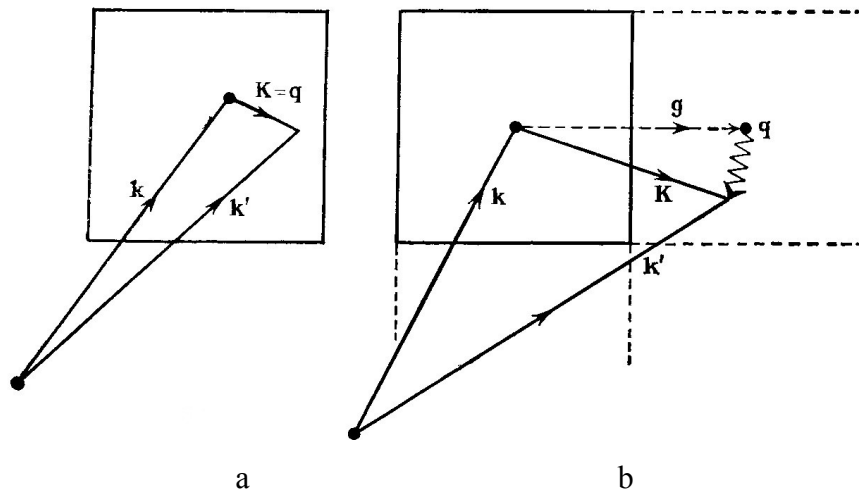
$$\hat{U}_{anh} = \frac{3}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''} \frac{V(\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}'')} {\sqrt{\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}')\omega(\vec{k}'')}} (\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}'} \hat{a}_{-\vec{k}-\vec{k}'}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}-\vec{k}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}''}^\dagger). \quad (8.41)$$

W (8.41) zaniedbaliśmy składniki określające anihilację i kreację trzech fononów, ponieważ te składniki dają wkład tylko w wyższych przybliżeniach teorii zaburzeń.

Kwazipędy fononów są określone z dokładnością do wektora $\hbar\vec{q}$, gdzie \vec{q} - wektor sieci odwrotnej. W związku z tym kwazipędy fononów $\hbar\vec{k}$, $\hbar\vec{k}'$ i $\hbar\vec{k}''$ w procesach trójfononowych muszą spełniać warunek

$$\vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{q}. \quad (8.42)$$

Procesy oddziaływania dla których $\vec{q} = 0$ nazywamy *procesami normalnymi* (albo *N procesami*). Są to zwykle najczęściej występujące procesy. Gdy natomiast we wzorze (8.42) $\vec{q} \neq 0$ oddziaływanie nazywa się *procesem z przerzutem* (albo *U procesem*, od niemieckiego wyrażenia *Umklappprozess*, wprowadzonego przez Rudolfa Peierlsa w 1927 r.) Procesy *N* i *U* ilustruje rys. 8.1.



Rys.8.1. Proces normalny (a) i z przerzutem (b)